課題演習 DB「数値計算」資料その 3(常微分方程式の初期値問題の数値計算)

主旨 常微分方程式の初期値問題の数値計算法の代表である Runge-Kutta 法のプログラムができるようになる.

参考となる URL

- サンプルプログラムの置き場所
  https://www.gfd-dennou.org/arch/ishioka/db/sample/

手順

1. 上記の URL から, ode.f90 をダウンロード.
2. 上記の内容を VSCode 等で確認した後, このプログラムを gfortran でコンパイルして実行.
3. 上記がうまくいくと, 4 つの数値が合計 10 行出力されるが, その意味をプログラムの注釈を参考に理解すること. なお, このプログラムは, 以下の常微分方程式の初期値問題:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3t^2 - t^3 - t^6 + (2t^3+1)x - x^2; \quad x_0 = 0.5,$$

   を, $t=0$ から $t=1$ まで, オイラー法で時間刻み幅 $h=0.1$ で計算するプログラムの例である. なお, 真の解は, $x = t^3 + (1+e^{-t})^{-1}$ である. プログラムでは, タイムステップ毎に, t, 数値計算された x, 真値, 真値との誤差, の 4 つを出力するようになっている. なお, この微分方程式の例は, 山本哲朗「数値解析入門 [増訂版]」(サイエンス社) に載っているものである. このプログラムがそのような計算を行っているものであることをプログラムを読んで確認せよ.
4. 時間刻みの個数 N を 10 倍にして h を 1/10 にすると, $t=1$ における誤差が元のほぼ 1/10 になることを確認せよ.
5. プログラムを 4 次の Runge-Kutta 法を使うように書き換えて, オイラー法に比べて, 誤差が非常に小さくなることと, 時間刻みの個数 N を 10 倍にして h を 1/10 にすると, $t=1$ における誤差が元のほぼ 1/10000 になることを確認せよ.

※補足: 常微分方程式の初期値問題の数値解法については, 計算地球物理学の講義資料 (keisanchikyubutsuri-3w.pdf) を参照のこと (PandA の演習の資料のところに置いている).