

第5章 渦の記述

5.1 渦現象の例

- 海洋の中規模渦 : 図 5.1

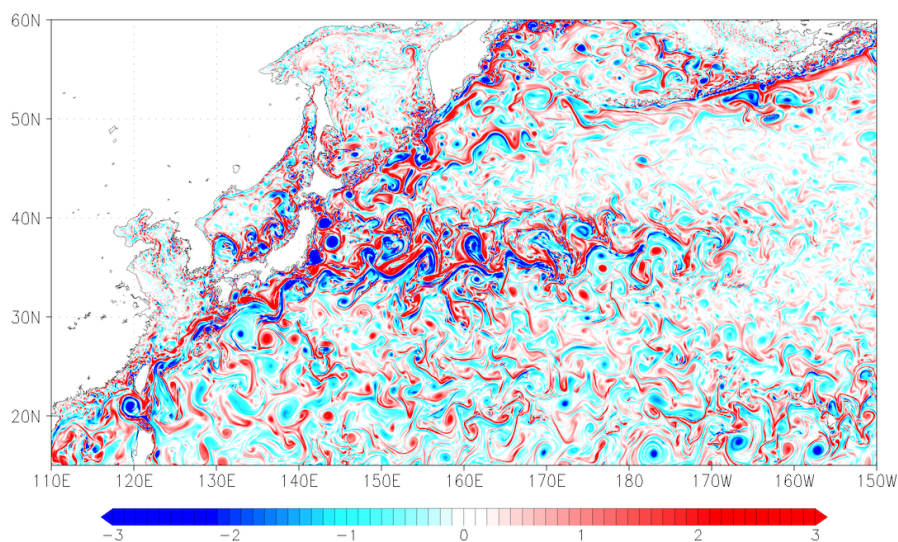


図 5.1: 海洋大循環モデル OFES を用いた計算結果. 原図は http://www.jamstec.go.jp/esc/research/AtmOcn/images/gfsg2010_fig2.png.

- 木星大気中の渦 : 図 5.2

5.2 渦に関する緒量

- 渦度 (vorticity)
 - 渦の数学的表現が渦度 (vorticity)

$$\omega \equiv \text{rot} \mathbf{v} \text{ [sec}^{-1}\text{]} \quad (5.1)$$

渦度 ω は局所的な渦の強さを表す量である.



図 5.2: ヴォエジャー 1 号によって撮影された木星原図は <http://voyager.jpl.nasa.gov/science/jupiter.html> より取得.

- 渦度の物理的意味: 渦度は流体の線素を回転させる. 流体中の線素 $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ の Lagrange 微分を考える.

$$\frac{d\delta \mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_1) = \delta \mathbf{x} \cdot \text{grad} \mathbf{v}$$

成分表示で書くと

$$\frac{d}{dt} \delta x_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j = u_{ij} \delta x_j$$

ここで, u_{ij} は速度勾配テンソル. 対称成分 (変形速度テンソル) と反対称成分 (スピンテンソル) に分けると,

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} e_{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{ij}$$

となるので,

$$\frac{d}{dt} \delta x_i = \frac{1}{2} e_{ij} \delta x_j + \frac{1}{2} \Omega_{ij} \delta x_j$$

反対称成分を行列形式で書くと

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは回転行列と同じ形式をしている. $\delta \mathbf{x}$ との積を行列形式で書くと

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{x}$$

よって,

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{x} + (\text{対称成分})$$

これより, 渦度は線素を回転させる. 渦度ベクトルは局所的な回転ベクトルの2倍の大きさを持つ.

- 渦度ベクトルはスピンテンソルの相対ベクトル

- 循環 (circulation)

- 閉曲線 C に対して

$$\Gamma \equiv \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \text{ [m}^2 \text{ sec}^{-1}\text{]}$$

を循環 (circulation) という. 循環 Γ は大域的な渦の強さを表す量である.

- 渦度の面積分に他ならない.
- ベクトル場と渦度, 循環の例

- $\mathbf{v} = (a, 0, 0)$

$$\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \Gamma = 0$$

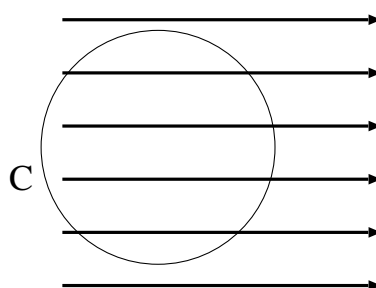


図 5.3: 渦度例 1

- $\mathbf{v} = (-ay, ax, 0)$ 渦度と, 半径 r の円 C のまわりの循環は

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 2a), \quad \Gamma = 2\pi ar^2.$$

循環 Γ の計算方法は以下の通り.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_{c'} (v_x dx + v_y dy) \\ &= \oint_{c'} (-ay dx + ax dy) \\ &= \int_0^{2\pi} (+ar \sin \theta r \sin \theta d\theta + ar \cos \theta r \cos \theta d\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} ar^2 d\theta \\ &= 2\pi ar^2 \end{aligned}$$

- $\mathbf{v} = (-ay/(x^2 + y^2), ax/(x^2 + y^2), 0)$: 渦糸の速度分布

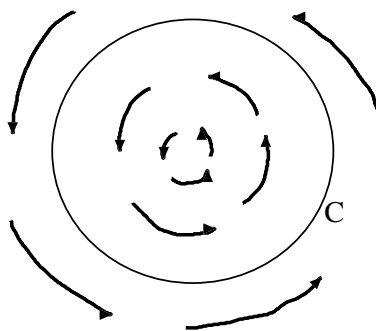


図 5.4: 渦度例 2

この速度分布 (v_x, v_y) から, v_r, v_θ を求めると

$$v_r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = \left(-\frac{ay}{r^2}, \frac{ax}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = 0,$$

$$v_\theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\theta = \left(-\frac{ay}{r^2}, \frac{ax}{r^2} \right) \cdot \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r} \right) = \frac{a}{r}.$$

となる. この速度分布から得られる渦度と循環は以下の通りである.

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0) \quad (\text{for } r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0), \quad \Gamma = 2\pi a. \quad (\text{for } r = 0 \text{ を含む積分路}).$$

渦度は以下のように計算される.

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j v_k = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= \left(0, 0, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

この z 成分は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \frac{ax}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-ay}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{a(x^2 + y^2) - ax \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(-a)(x^2 + y^2) - (-ay)2y}{x^2 + y^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

循環は以下のように計算される.

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \oint_{C'} (v_x dx + v_y dy) \\
 &= \oint_{C'} (-ay/(x^2 + y^2)dx + ax/(x^2 + y^2)dy) \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(+\frac{ar \sin \theta}{r^2} r \sin \theta d\theta + \frac{ar \cos \theta}{r^2} r \cos \theta d\theta \right) \\
 &= \int_0^{2\pi} (+a \sin^2 \theta d\theta + a \cos^2 \theta d\theta) = \int_0^{2\pi} a d\theta \\
 &= 2\pi a
 \end{aligned}$$

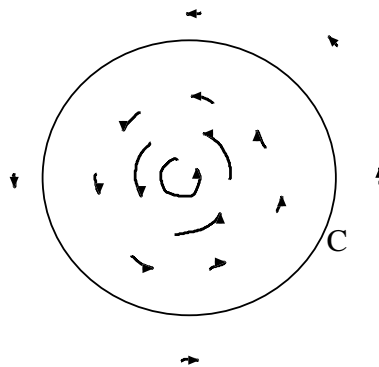


図 5.5: 渦度例 3

- 渦線 (vortex line)

ある時刻での渦度ベクトル場の積分. 渦線の微分方程式は以下である.

$$\frac{dx}{\omega_x(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{\omega_y(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{\omega_z(\mathbf{x}, t)}$$

この式は, 接線ベクトルと渦度ベクトルが平行であること: $d\mathbf{x} \parallel \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ を表している.

- 渦面 (vortex surface) (やってない)

- ある線分と, その線分上の渦度ベクトルとで張られた面.

- 渦管 (vortex tube)

- 流れの中の 1 つの閉曲線 C の各点を通る渦線群によって形成される管. C が無限小の閉曲線るとき, 渦管に含まれる流体部分を渦糸 (vortex filament) という.
- 渦面を定義する線分が閉曲線からなるもの.

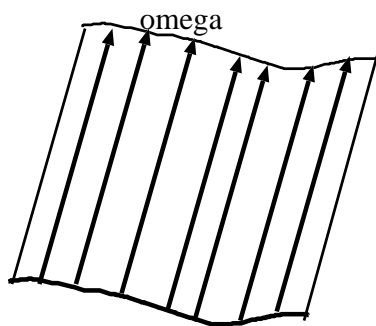


図 5.6: 渦面

- 渦管上では Γ は閉曲線のとりかたによらず同じ値となる. その理由は以下の通り. まず, 図 5.7 に示す閉曲線 S_1 では

$$\int_{S_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int \boldsymbol{\omega} d\mathbf{S} = 0$$

となる. なぜなら, 渦管の表面では, $\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{n} は直交し, そのため渦管の表面上では $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}$ の表面積分は 0 になるからである.

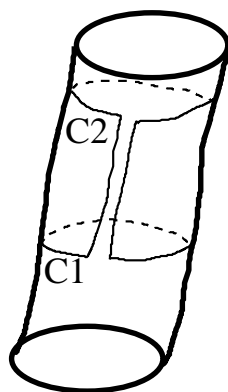


図 5.7: 渦管の循環. 積分経路全体を S_1 とする. 上の輪っかを c_1 , 下の輪っかを c_2 とする.

よって,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{c_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} - \int_{c_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\uparrow} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\downarrow} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

よって

$$\int_{c_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{c_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

- 循環は渦管の「強度」である (後述).

5.3 渦度方程式

5.3.1 渦度方程式の導出

渦度方程式の導出は以下の通り. 運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} \Phi + \mathbf{F}$$

の両辺に rot を作用する.

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot} \{(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}\} = -\text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) - \text{rot}(\text{grad} \Phi) + \text{rot} \mathbf{F}$$

各項ごとに考える.

- 左辺第二項 $\text{rot} \{(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}\}$

まず, $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$ を以下のように書き換える.¹

$$\begin{aligned} (\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - \text{grad} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right), \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - \text{grad} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right), \\ (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \text{grad} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \end{aligned}$$

これより, $\text{rot} \{(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}\}$ は

$$\begin{aligned} \text{rot} \{(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}\} &= \text{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \text{rot} \left\{ \text{grad} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right\} \\ &= \text{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

更に書き換える. ベクトル解析の公式

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\text{div} \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\text{div} \mathbf{A})$$

より,

$$\text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}(\text{div} \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\underbrace{\text{div} \boldsymbol{\omega}}_{0 \text{ になる}})$$

ここで, $\text{div} \boldsymbol{\omega} = \text{div} \text{rot} \mathbf{v} = 0$ を使うと

$$\text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}(\text{div} \mathbf{v})$$

¹ベクトル解析の公式を使った:

$$(\text{rot} \mathbf{A}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - \text{grad} \left(\frac{|\mathbf{A}|^2}{2} \right)$$

- 右辺第1項 $-\text{rot}\left(\frac{1}{\rho}\text{grad}p\right)$

ベクトル解析の公式

$$\text{rot}(fA) = (\text{grad}f) \times A + f\text{rot}A$$

を使うと

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\rho}\text{grad}p\right) = \left(\text{grad}\frac{1}{\rho}\right) \times \text{grad}p + \frac{1}{\rho}\text{rotgrad}p = -\frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^2}$$

となる. ここで,

$$\text{rotgrad}f = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0$$

を使った.

- 右辺第二項 $-\text{rot}(\text{grad}\Phi)$

ベクトル解析の公式を使えば

$$\text{rot}(\text{grad}f) = \epsilon_{ijk}\partial_j(\partial_k f) = 0$$

よって

$$-\text{rot}(\text{grad}\Phi) = 0$$

最終的に以下が得られる.

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \text{grad}\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad})\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}\text{div}\boldsymbol{v} + \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^2} + \text{rot}\boldsymbol{F}.$$

これを渦度方程式 (vorticity equation) という.

5.3.2 渦度方程式の各項の意味

$\boldsymbol{\omega}$ の向きを z 方向にとって考える. 局所直交座標 $((x, y, z)$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, とする) を用いる.

- 渦度方程式右辺第1項: $\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}\boldsymbol{v}$

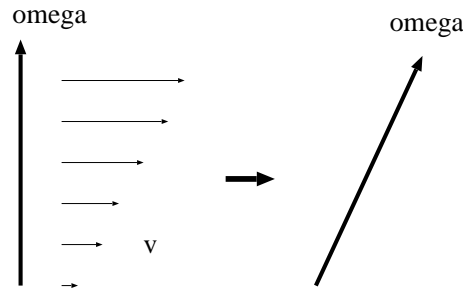
変形すると

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}\boldsymbol{v} = \underbrace{\omega \frac{\partial v_x}{\partial z} \boldsymbol{e}_x + \omega \frac{\partial v_y}{\partial z} \boldsymbol{e}_y}_{\text{傾斜項}} + \underbrace{\omega \frac{\partial v_z}{\partial z} \boldsymbol{e}_z}_{\text{引き伸ばし項}}$$

これは以下のように, 運動による渦の変形を表す.

1. 傾斜項 (立上り項) tilting term : $\mathbf{e}_x \omega \frac{\partial v_x}{\partial z} + \mathbf{e}_y \omega \frac{\partial v_y}{\partial z}$

ω 方向 (z 方向) にシア (shear) があると, ω が傾けられて, ω に垂直な方向 (x, y 方向) の渦度成分ができることを示す.



問題: ベクトル $(-ay, ax, 0)$ を速度 $(bz, 0, 0)$ で傾けるとどう変化するか?

2. 引き伸ばし項 (stretching term) あるいは, 収縮項 (shrinking term) : $\mathbf{e}_z \omega \frac{\partial v_x}{\partial z}$
 $\mathbf{e}_z \omega \frac{\partial v_x}{\partial z}$ は, 渦が引き延ばされると強度が強まることを示す.

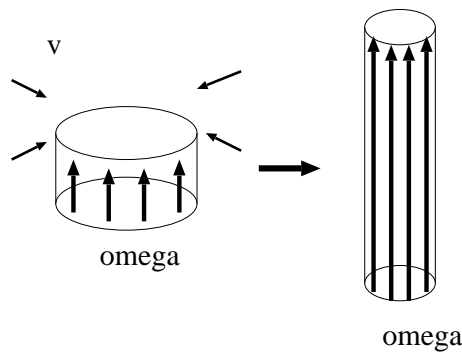
• 右辺第2項 : $\omega \text{div} \mathbf{v}$

収束があると渦が強まることを示す.

引き伸ばし項とあわせて次のように表現される. ω の向きを z 方向とする局所直交座標による表現を使うと

$$\omega \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z - \omega \text{div} \mathbf{v} = -\mathbf{e}_z \omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right).$$

ω に垂直な方向からの収束があると, 渦の強さが強まることを示す (後述, 渦管の断面積が減る場合に対応).

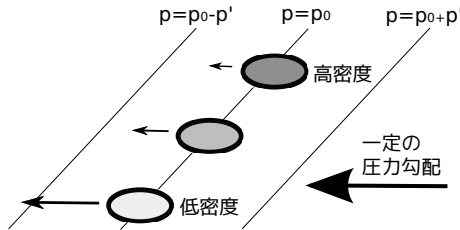


非発散流体 ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) の時は, 右辺第2項は当然0である.

2

- 右辺第3項：傾圧項 (baroclinic term) $\frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^2}$

圧力傾度が同じでも密度差があると、その加速度に差が生じ、その結果、渦度が変化する。



- 右辺第4項 $\text{rot}F$

非保存的な外力 F がある流体では渦度が変化する。例えば、非圧縮性流体では、粘性力 $F = \nu \nabla^2 v$ により、

$$\text{rot}F = \nu \text{rot}\nabla^2 v = \nu \nabla^2 \omega$$

の渦度変化がある。

5.4 ラグランジュの渦定理

5.4.1 $\frac{\omega}{\rho}$ の式 (一般形)

渦度方程式

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot \text{grad}v - \omega \text{div}v + \frac{1}{\rho^2} \text{grad}\rho \times \text{grad}p + \text{rot}F$$

と連続の式

$$\frac{d\rho^{-1}}{dt} = \rho^{-1} \text{div}v$$

から

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega}{\rho} = \frac{\omega}{\rho} \cdot \text{grad}v + \frac{1}{\rho^3} \text{grad}\rho \times \text{grad}p + \frac{1}{\rho} \text{rot}F \tag{5.2}$$

導出は以下の通り。渦度方程式を ρ で割る。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega}{\rho} \cdot \text{grad}v - \frac{\omega}{\rho} \text{div}v + \frac{1}{\rho^3} \text{grad}\rho \times \text{grad}p + \frac{1}{\rho} \text{rot}F$$

左辺の Lagrange 微分項は以下のように変形される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \text{grad} \omega \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{1}{\rho} - \omega \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} + \mathbf{v} \text{grad} \frac{\omega}{\rho} - \omega (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \frac{1}{\rho} \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{1}{\rho} + \mathbf{v} \text{grad} \frac{\omega}{\rho} - \omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \frac{1}{\rho} \right\} \\ &= \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\rho} - \omega \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

ここで, 連続の式

$$\frac{d\rho^{-1}}{dt} = \rho^{-1} \text{div} \mathbf{v}$$

を使うと

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\rho} - \omega \rho^{-1} \text{div} \mathbf{v}$$

これを渦度方程式を ρ で割った式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\rho} - \underbrace{\omega \rho^{-1} \text{div} \mathbf{v}}_{\text{消える}} &= \frac{\omega}{\rho} \cdot \text{grad} \mathbf{v} - \underbrace{\omega \rho^{-1} \text{div} \mathbf{v}}_{\text{消える}} + \frac{1}{\rho^3} \text{grad} \rho \times \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{rot} \mathbf{F}, \\ \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\rho} &= \frac{\omega}{\rho} \cdot \text{grad} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^3} \text{grad} \rho \times \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{rot} \mathbf{F} \end{aligned}$$

が得られる.

5.4.2 順圧流体 (バロトロピック流体) の場合: ラグランジュの渦定理

順圧流体で粘性も無視できる場合

$$\frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\rho} = \frac{\omega}{\rho} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \tag{5.3}$$

よって

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ で } \omega = 0 \text{ なら任意の } t \text{ で } \omega = 0 \\ \text{ある時刻で } \omega \neq 0 \text{ ならば } t = 0 \text{ で } \omega \neq 0 \\ (\text{上記の対偶}) \end{aligned}$$

となる. これをラグランジュの渦定理 (Lagrange's theorem on vorticity) という. 「順圧流体が保存力のもとで運動する場合, 渦は発生することも消滅することもない」ということを示している.

5.4.3 順圧流体における渦線の動き

流体とともに運動する線分 $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ の時間変化

$$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_1) + (\text{grad} \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}_1)$$

すなわち

$$\frac{d\delta \mathbf{x}}{dt} = \delta \mathbf{x} \cdot \text{grad} \mathbf{v}$$

を考える.

これと, ラグランジュの渦定理

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \mathbf{v}$$

により

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \lambda \delta \mathbf{x} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \lambda \delta \mathbf{x} \right) \cdot \text{grad} \mathbf{v}$$

よって

$$t = 0 \text{ において } \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \lambda \delta \mathbf{x} = 0 \text{ ならば}$$

$$\text{任意の時刻において } \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \lambda \delta \mathbf{x} = 0$$

$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \lambda \delta \mathbf{x}$ なので, $\delta \mathbf{x}$ は渦糸の接線ベクトルになっている.

つまり

順圧非粘性流体ではある時刻に渦線であった線分が, 流体の運動と共に移動した線分は渦線である. すなわち, 渦線は渦線に移動する.

5.5 循環定理

5.5.1 循環の時間変化の式

c' を流体とともに運動する閉曲線とする.

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_{c'} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l} = \oint_{c'} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l} + \oint_{c'} \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{l} \\ &= \oint_{c'} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l} + \lim_{\delta l \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} (l_{i+1} - l_i) \\ &= \oint_{c'} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l} + \lim_{\delta l \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) \\ &= \oint_{c'} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l} + \oint_{c'} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = \oint_{c'} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l} + \oint_{c'} \frac{1}{2} \delta |\mathbf{v}|^2 \\ &= \oint_{c'} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l} \end{aligned}$$

となる. 運動方程式

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} \Phi + \mathbf{F}$$

を用いると,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{c'} \frac{1}{\rho} \text{grad} p \cdot \delta \mathbf{l} + \oint_{c'} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{l}$$

が得られる. ここで, 右辺第1項をストークスの定理³ を使って変形する.

$$- \oint_{c'} \frac{1}{\rho} \text{grad} p \cdot \delta \mathbf{l} = - \int_{S'} \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S'} \frac{\text{grad} \rho \times \text{grad} p}{\rho^2} \cdot d\mathbf{S}$$

となる.⁴ 以上より,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{S'} \frac{\text{grad} \rho \times \text{grad} p}{\rho^2} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S'} \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.4)$$

が得られる.

³

$$\int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

⁴ベクトル解析の公式

$$\text{rot}(f\mathbf{A}) = (\text{grad} f) \times \mathbf{A} + f \text{rot} \mathbf{A}$$

を使った.

5.5.2 ケルビンの循環定理とヘルムホルツの渦定理

- 順圧流体
- 粘性なし ($\mathbf{F} = 0$)

の時 Γ は流れに沿って保存する量となる:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

この式の意味するところは, 次のような表現がなされる.

- ケルビンの循環定理 (Kelvin's theorem on circulation)

$$\Gamma = \oint_{c'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \text{ が保存}$$

流体粒子で作られた閉曲面についての循環は一定不変

- ヘルムホルツの渦定理 (Helmholtz's theorem on vortex)

$$\Gamma = \int_{S'} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \text{ が保存}$$

渦管の強さは一定不変

- これらは, 初期において $\Gamma = 0$ である場合には同一の物質線まわりの循環はそれ以後の全ての時間で 0 であることを示している. 初期に非回転である流れはそれ以後の時間でずっと非回転であると結論して良い. これは非回転流れの永続性として知られている.

この結果は物理的には, オイラー方程式を適用する場合に流体粒子に働く応力は圧力だけであるということによって説明できる. 圧力は粒子の表面に垂直であるため, 粒子を回転させるような偶力は働かない. 3次元流れではいったん回転が始まると, 渦度は渦のねじれと伸張によって変化する. しかし, 圧力は初期の回転を作ることはできない.

c' がどのように変形されながら流されていくのかを知るのは一般に容易でない. したがって, この保存則は使うには不便である.

順圧流体でなくても $\text{grad}\rho \times \text{grad}p = 0$ が常に成立するような, 流体と共に運動する面 A' (閉曲線 c') を選ぶことができれば, 上記は成立する.

- 断熱条件 ($Q = 0$) が成立する場合の等エントロピー面が A' の例となる.

5.6 渦位

5.6.1 渦位保存則 (順圧でない流体の保存則, Ertel)

ラグランジュの渦定理で導いた式

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^3} \text{grad} \rho \times \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{rot} \boldsymbol{F}$$

とエントロピーの式

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T}$$

から

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \frac{Q}{T} + \frac{\text{grad} \rho \times \text{grad} p}{\rho^3} \cdot \text{grad} s + \frac{\text{rot} \boldsymbol{F}}{\rho} \cdot \text{grad} s, \quad (5.5)$$

$$q \equiv \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad} s}{\rho} \quad (5.6)$$

が得られる. q を渦位 (potential vorticity) という.

証明

$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}$ の式に $\text{grad} s$ を内積する.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \cdot \text{grad} s + \left(\boldsymbol{v} \cdot \text{grad} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \cdot \text{grad} s \\ &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \boldsymbol{v} \right) \cdot \text{grad} s + \frac{\text{grad} \rho \times \text{grad} p}{\rho^3} \cdot \text{grad} s + \frac{\text{rot} \boldsymbol{F}}{\rho} \cdot \text{grad} s \end{aligned}$$

エントロピーの式に $\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad}$ を作用させる.

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \frac{\partial s}{\partial t} + \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \right) \boldsymbol{v} \cdot \text{grad} s = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \frac{Q}{T}$$

最初の式の左辺第二項は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{v} \cdot \text{grad} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \cdot \text{grad} s &= (\boldsymbol{v} \cdot \text{grad}) \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} s \right) - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot [(\boldsymbol{v} \cdot \text{grad}) \text{grad} s] \\ &= (\boldsymbol{v} \cdot \text{grad}) \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} s \right) - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \right) \boldsymbol{v} \cdot \text{grad} s \\ &\quad + \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \boldsymbol{v} \right) \cdot \text{grad} s \end{aligned}$$

これを使って2式の和を考える. すぐ上の式の右辺第2項と第3項は s の式の項とキャンセルする.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \cdot \text{grad}s + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad}s \right) + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \frac{\partial s}{\partial t} \\ &= \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^3} \cdot \text{grad}s + \frac{\text{rot}\mathbf{F}}{\rho} \cdot \text{grad}s + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \frac{Q}{T}, \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad}s \right) + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad}s \right) \\ &= \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^3} \cdot \text{grad}s + \frac{\text{rot}\mathbf{F}}{\rho} \cdot \text{grad}s + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \frac{Q}{T}, \\ & \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad}s \right) = \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^3} \cdot \text{grad}s + \frac{\text{rot}\mathbf{F}}{\rho} \cdot \text{grad}s + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \frac{Q}{T} \end{aligned}$$

5.6.2 渦位の性質

- 粘性なし ($\mathbf{F} = 0$)
- 断熱 ($Q = 0$)

の場合, 渦位は保存量

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

となる. なぜなら

$$\text{grad}s = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \text{grad}p + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \text{grad}\rho$$

なので,

$$\frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^3} \cdot \text{grad}s = 0 \quad (5.7)$$

となるから.

5.6.3 循環の保存則と渦位保存則との関係

循環 Γ の時間変化の式,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{S'} \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^2} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S'} \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

と断熱条件 ($Q = 0$) を充たす時の渦位の式

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}s}{\rho} = \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^3} \cdot \text{grad}s + \frac{\text{rot}\mathbf{F}}{\rho} \cdot \text{grad}s$$

との関係を考察する.

エントロピー s と $s + \delta s$ に挟まれた微小円柱 (質量 δm , 高さ δh , 底面積 δS) を考える (図 5.8).

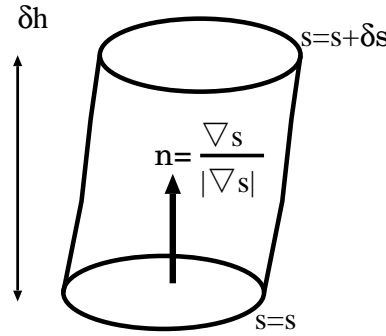


図 5.8: 等エントロピー面で作られた微小円柱.

この微小円柱では,

$$\delta s = \delta h |\text{grad}s| = \frac{1}{\rho} \frac{\delta m}{\delta S} |\text{grad}s|$$

したがって,

$$\delta S = \frac{1}{\rho} \frac{\delta m}{\delta s} |\text{grad}s|$$

また面の方向ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad}s}{|\text{grad}s|}$$

したがって, 底面における面積分は

$$\int_{S'} d\mathbf{S} = \int_{S'} \mathbf{n} \delta S = \left(\frac{\text{grad}s}{|\text{grad}s|} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta m}{\delta s} |\text{grad}s| \right) = \frac{\text{grad}s}{\rho} \frac{\delta m}{\delta s}$$

と評価できる. これから, 循環の時間変化の式は次のように書き換えられる.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S'} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \sim \frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}s}{\rho} \frac{\delta m}{\delta s} + \int_{S'} \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^2} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S'} \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \sim \frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}s}{\rho} \frac{\delta m}{\delta s}$$

左辺の各項は次のように評価される.

$$\int_{S'} \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^2} \cdot d\mathbf{S} \sim \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^3} \cdot \text{grad}s \frac{\delta m}{\delta s}$$

$$\int_{S'} \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \sim \frac{\text{rot}\mathbf{F}}{\rho} \cdot \text{grad}s \frac{\delta m}{\delta s}$$

これから, 循環 Γ の時間変化の式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega \cdot \text{grad}s}{\rho} \frac{\delta m}{\delta s} = \frac{\text{grad}\rho \times \text{grad}p}{\rho^3} \cdot \text{grad}s \frac{\delta m}{\delta s} + \frac{\text{rot}\mathbf{F}}{\rho} \cdot \text{grad}s \frac{\delta m}{\delta s} \quad (5.8)$$

と評価される. この式は, 渦位保存則の式に $\frac{\delta m}{\delta s}$ をかけたものとなっている. よって, 渦位保存則は循環定理の微分形表現であることがわかる.

$\delta m, \delta s$ は流れに沿って保存する. すなわち,

$$\frac{d\delta m}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta s}{dt} = 0$$

であることに注意せよ.