

流体力学 講義ノート

石渡正樹

2020 年 05 月 09 日

第1章 流体とは

1.1 流体の定義

流体とは、「変型しやすい」連続体である。物質を流体として扱うとは、その振舞いを「変型しやすい」連続体として近似することである。流体力学では物質を近似した仮想的なものを扱うことになる。

1.1.1 連続体

- 定義

微視的スケールについて平均して得られた、巨視的に連続な物理的性質を持つ仮想的な物質を連続体 (continuum) という。また、物質をそのような仮想的な物質として近似することを「連続体近似する」という。

物質は多数の原子・分子で構成されている。物質の振舞い（運動・状態）は個々の原子・分子の振舞いにより決定される。しかし、物質の巨視的な振舞いを扱うとき、すなわち振舞いの空間スケール（巨視的スケール）が分子・原子のスケール（微視的スケール）に比べて十分大きいとき、物質中のある点における物理的性質をその点を含む微小体積での平均値で表わすのが便利である。この微小体積領域では、巨視的にみれば微小な体積であっても、微視的にはその中に多数の原子・分子が存在するものとする。このとき、物質の物理的性質は空間について連続的に変化していると見なせる。

- 物質粒子

連続体を記述するための最小単位である微小領域を、連続体を構成する物質粒子(material particle) と呼ぶ。これは、連続体を記述するための仮想的なものであり、本当の粒子ではない。

各物質粒子は一様であり、温度等の熱力学量も定義できると仮定する。連続体が変形する際には、物質粒子も空間的に移動する。連続体における物理法則は、一様な物質に関する物理法則（質点力学、熱力学、電磁気学など）を局所的に物質粒子に適用することによって得られる。

- 近似が妥当なための条件

連続体近似が妥当であるためには、巨視的に微小な体積中に多数の原子・分子が存在して、それらの運動が平均化されるように原子・分子同士の衝突が十分頻繁に起こっていることが必要である。その目安は無次元量 Knudsen (クヌーセン)¹ 数 K が以下を満たすことである:

$$K \equiv l/L \ll 1 \quad (1.1)$$

ただし、 L は現象の巨視的スケール、 l は原子・分子の平均自由行程である。

1.1.2 変形しやすいとは

「変形しやすい」とは、わずかに力を加えても変形する、ということである。まず、流体における力を考えておかないといけない。

- 流体における力: 応力

流体の最少単位に対して働く力は面に働くとして考える。これは、分子・原子の衝突により生じる力を平均化したものである。

連続体中の平面に対して単位面積当りに働く力を 応力 という。一般に、考える平面の向きによって応力は変化する。面の向きと力の成分を指定して決まるものであり、テンソルになる。詳しくはのちほど。

- 変形しやすいということの別の表現 (定理)

流体には、静止状態において応力が面の法線方向にしか現われず、しかもその力は面を押す向きに働く (この力を圧力という)。

この別表現が成り立つことの説明 (定理の証明):

静止状態において接線方向の応力が存在すると仮定する。このとき、考えている面をはさんで隣りあった部分には、同じ大きさで逆向きの力が働く (作用反作用の法則)。流体は定義により、「変形しやすい」ので、運動が生じる (図 1.1)。これは静止状態であることに反する。したがって、静止状態では、流体中に接線方向の応力は存在しない。

また、法線方向の力が面を引っ張る向きに働けば、その部分は裂けて、真空状態が生じる (図 1.2)。したがって、法線方向の応力は、面を押す向きに働かなければならない。

法線方向の応力だけが残ることは、「流体といえども体積変化に対しては自由ではない」ということによっている。体積変化に対応する法線成分だけは一般には存在するというわけである。

- 弾性体の場合は、接線応力が働いていても静止している。ひずみが発生する。

¹マルティン・ハンス・クリスチャン・クヌーセン (Martin Hans Christian Knudsen): デンマークの海洋学者・物理学者。1871年2月15日 - 1949年5月27日。海水中の「塩分」を定義するなど海洋化学の分野で多くの貢献を行い、「近代海洋学の開祖」と呼ばれる。

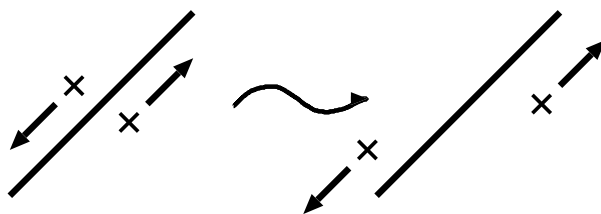


図 1.1: 静止流体に接線方向の応力が存在する場合.

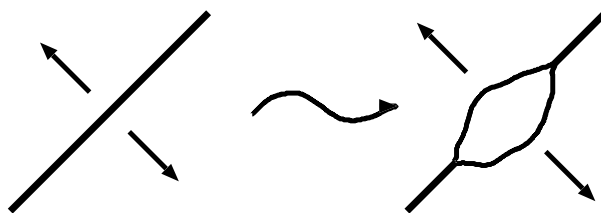


図 1.2: 静止流体に引っ張る向きの法線方向の応力が存在する場合. 流体中に真空領域ができてしまう.

1.2 流体の記述

1.2.1 流体粒子

流体力学では, 物質粒子を特に流体粒子(fluid particle)と呼ぶ. 流体粒子が流体の基本単位となる.

1.2.2 流体の記述に必要な物理量

流体の振舞いを記述するために必要な物理量として以下が挙げられる.

- 運動学的な量: 速度 \mathbf{v} : 分子のブラウン運動速度を平均したものと考えて良い.
- 熱力学的な量: 圧力 p , 密度 ρ , 温度 T , *etc.*

流体上の各点を指定するために連続体上には空間座標を張る. 局所的に定義されている熱力学量や電磁気量は空間座標の関数として表現される.

必要な式は以下の通りである.

- 質量保存則 (mass conservation) または連続の式 (continuity equation).
- 運動方程式: ニュートンの運動方程式を微小部分に関して平均して得られると考えることにする.
- 構成方程式(constitution equation): 応力と連続体を記述する座標 (変形) および熱力学量などに関係づける式.

- エネルギー保存則: 熱力学
- 状態方程式

1成分1相系の均質な物質では, 熱力学的な量は任意の2つの熱力学量を用いて表わすことができる. よって, 1成分1相系の連続体の振舞いを記述する量は5つ(運動学的な量3つ, 熱力学量2つ)となる. 式も5本(連続の式, 運動方程式, エネルギー保存則)である. 問題を解くためには, 更に初期条件と境界条件が必要である.

1.2.3 流体運動の記述法

流体の運動は, 「各瞬間」において, 流体粒子(流体の「各微小部分」)の持つ物理量により記述される. 流体粒子の運動を記述する方法には次の2通りある.

1. Lagrange の方法

流体を無数の流体粒子の集団としてとらえ, 各流体粒子の運動を記述する方法である. この記述方法は, 質点系の力学の記述方法をそのまま流体に適用したものと言える.

流体粒子を指定する方法として, 初期時刻 $t = 0$ における流体粒子の位置 ξ がよく用いられる.

物理量 A は以下のように表される.

$$A = A(\xi, t). \quad (1.2)$$

(ξ, t) は流体に張り付けられた座標であり, 物質座標またはラグランジュ座標と呼ばれる.

2. Euler の方法

流体の運動を流れの場としてとらえ, 物理量を時間 t ・空間 \mathbf{x} の関数として記述する方法である.

物理量 A は以下のように表される.

$$A = A(\mathbf{x}, t) \quad (1.3)$$

これは, ある時刻 t に, 空間の固定点 \mathbf{x} に存在する流体についての量である. 同一の \mathbf{x} における異なる時刻での値は, 一般に異なる流体粒子についての量を表わしている.

(\mathbf{x}, t) は空間に固定された座標であり, オイラー座標と呼ばれる.

1.2.4 速度, 加速度

時刻 t における流体粒子の位置を \mathbf{x} とすると, \mathbf{x} は ξ と t の関数として表わされる.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t) \quad (1.4)$$

流体は連続体であるから \mathbf{x} は ξ の連続関数と考えられる. ξ 付近の流体粒子はほとんど同じ運動を行ない, 常にその付近に存在する.

特定の流体粒子の位置 \mathbf{x} を時間微分することにより, 流体粒子の速度 \mathbf{v} , 加速度 \mathbf{a} が得られる.

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\xi}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \right)_{\xi}. \quad (1.6)$$

1.2.5 Lagrange 微分と Euler 微分

- ある流体粒子についての物理量の時間変化を表わす時間微分を Lagrange 微分 (または物質微分: material differentiation) と呼び, 通常 $\frac{d}{dt}$ で表わす.

$$\frac{dA}{dt} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\xi} = \frac{\partial A(\xi, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

熱力学の全微分とは区別される. しかし, 流体粒子の熱力学を考える場合には Lagrange 微分と熱力学の全微分は同じ量を表すものである.

- 空間のある固定点でみたときの物理量の時間変化を表わす時間微分を Euler 微分と呼び, 通常 $\frac{\partial}{\partial t}$ で表わす.

$$\frac{\partial A}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1.8)$$

1.2.6 Lagrange 微分の Euler 表現

直交直線座標で考える. スカラー量 A の Euler 表現が得られているとする. 時刻 t において \mathbf{x} に位置した流体粒子の Δt 後の位置は $\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \Delta t$ である. したがって, 流体粒子にともなう A の変化量 ΔA は

$$\Delta A = A(\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \Delta t, t + \Delta t) - A(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \Delta t + \text{grad} A \cdot \mathbf{v} \Delta t,$$

ゆえに

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}A.$$

$\mathbf{v} \cdot \text{grad}$ は、方向微分と呼ばれる。A の \mathbf{v} 方向への変化を表現する。直交直線座標の場合、Lagrange 微分の Euler 表現は

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}A = \frac{\partial A}{\partial t} + v_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \quad (1.9)$$

で与えられる。

Lagrange 微分の Euler 表現はベクトル量に対しても同様の式が得られる。直交直線座標系では、ベクトル \mathbf{A} の Lagrange 微分の Euler 表現の直交直線座標系における成分表示は

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \quad (1.10)$$

である。

一般の直交曲線座標では上のような単純な形にはならない。一般の座標にも適用できる関係式を求めるには、(1.9) の右辺をベクトル解析の公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{2} \{ & \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \text{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{A} + \text{rot}\mathbf{A} \times \mathbf{v} \\ & - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{A}) + \mathbf{v} \text{div}\mathbf{A} - \mathbf{A} \text{div}\mathbf{v} \} \end{aligned} \quad (1.11)$$

となる。²

\mathbf{A} として、速度ベクトル \mathbf{v} をとった場合には次のようになる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - \mathbf{v} \times \text{rot}\mathbf{v}$$

²ベクトル解析の公式

$$\begin{aligned} \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad})\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\text{rot}\mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\text{rot}\mathbf{A}), \\ \text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \text{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} + \mathbf{A}(\text{div}\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\text{div}\mathbf{A}) \end{aligned}$$

を使って $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{A}$ を変形すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{A} &= \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\text{rot}\mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\text{rot}\mathbf{v}) \\ &= \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \{ \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{A} - \mathbf{v}(\text{div}\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\text{div}\mathbf{v}) \} \\ &\quad - \mathbf{v} \times (\text{rot}\mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\text{rot}\mathbf{v}), \\ 2(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{A} &= \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{A}) + \mathbf{v}(\text{div}\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\text{div}\mathbf{v}) \\ &\quad - \mathbf{v} \times (\text{rot}\mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\text{rot}\mathbf{v}), \\ 2(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{A} &= \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{A}) + \mathbf{v}(\text{div}\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\text{div}\mathbf{v}) + \text{rot}\mathbf{A} \times \mathbf{v} + \text{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

1.3 参考文献

Batchelor,G.K., 橋本英典 他 訳 : 入門流体力学, 東京電機大学出版局, 614pp.

Landau,L.D., Lifshitz,E.M., 竹内 均 訳, 1970 : 流体力学 1 , 東京図書, 280pp.

ファン著, 大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生訳, 1980: 連続体の力学入門.

今井 功, 1973 : 流体力学 (前編) , 裳華房, 428pp.

第2章 流体力学の基礎方程式

2.1 連続の式・質量保存則

流体中に質量の source, sink がないと仮定する.

2.1.1 Euler 的見方

空間に固定した領域 D を考える. 領域 D 内の流体の質量変化は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \iint_{\partial D} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

ρ は流体の密度, \mathbf{v} は流体運動の速度, \mathbf{n} は D を囲む閉曲面 ∂D の外向き単位法線ベクトルである. 右辺は単位時間当りに ∂D を通して流れ込む流体の質量を表わす.

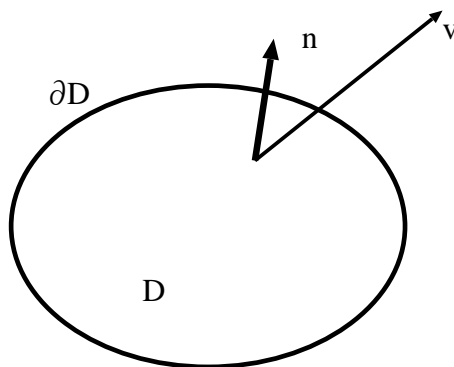


図 2.1: 空間に固定された領域 D における質量保存.

D は空間に固定した領域だから左辺の時間微分は積分の中に入れることができる. また, 右辺に対して Gauss の定理

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

を適用すると

$$\iiint_D \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right\} dV = 0.$$

領域 D のとりかたは任意であるから被積分関数は 0 でなければならない。よって以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.1)$$

2.1.2 Lagrange 的見方

流体とともに運動する領域 D' において、領域 D' 内の質量は保存しなければならない。この質量保存則は、積分を空間に固定した座標で実行することにより次のように書ける。

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D'(\mathbf{x},t)} \rho(\mathbf{x},t) dx dy dz = 0.$$

左辺の積分について、積分変数を \mathbf{x} から流体粒子のラベル座標¹ $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ に変換する。

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D'(\mathbf{x},t)} \rho(\mathbf{x},t) dx dy dz = \frac{d}{dt} \iiint_{D'_\xi} \rho(\boldsymbol{\xi},t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta$$

ここで、オイラー座標からラベル座標への座標変換は以下のように行なっている。

$$\begin{aligned} dx dy dz &= \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \dots \right\} d\xi d\eta d\zeta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned}$$

D' が流体とともに運動するので、 $\boldsymbol{\xi}$ 座標での積分領域 D'_ξ は任意の時間で変化しない。したがって時間微分は空間積分と交換する。

$$\text{左辺} : \frac{d}{dt} \iiint_{D'_\xi} \rho(\boldsymbol{\xi},t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{D'_\xi} \frac{d}{dt} \left(\rho(\boldsymbol{\xi},t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta \right)$$

この時間微分は、ラベル座標一定のもとで実行する Lagrange 微分であることに注意しよう。

¹ $t = t_0$ における流体粒子の位置を用いることが多い。

\mathbf{x} が ξ, t の関数であることに注意して右辺は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &: \iiint_{D'_\xi} \frac{d}{dt} \left(\rho(\xi, t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta \right) \\
&= \iiint_{D'_\xi} \frac{d\rho(\xi, t)}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta + \underbrace{\iiint_{D'_\xi} \rho(\xi, t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta d\zeta}_{=} \\
&= \iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} dx dy dz + \underbrace{\iiint_{D'_\xi} \rho(\xi, t) \left(\frac{\partial(\dot{x}, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{\partial(x, \dot{y}, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{\partial(x, y, \dot{z})}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right) d\xi d\eta d\zeta}_{=} \\
&= \iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} dx dy dz \\
&\quad + \underbrace{\iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial(\dot{x}, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{\partial(x, \dot{y}, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{\partial(x, y, \dot{z})}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} dx dy dz}_{=} \\
&= \iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \frac{d\rho}{dt} dx dy dz \\
&\quad + \underbrace{\iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial(\dot{x}, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, \dot{y}, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, y, \dot{z})}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} \right) dx dy dz}_{=} \\
&= \iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \frac{d\rho}{dt} dx dy dz + \underbrace{\iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} (\mathbf{x}, t) \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz}_{=} \\
&= \iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dx dy dz
\end{aligned}$$

ヤコビアン の時間微分の計算では以下を使った。

$$\frac{\partial(\dot{x}, y, z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

したがって、

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dx dy dz = \iiint_{D'(\mathbf{x}, t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dx dy dz = 0 \quad (2.2)$$

となる。これが任意の体積 D' について成り立つから、以下の式が得られる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.3)$$

2.1.3 質量保存則 (連続の式) の種々の形

連続の式は以下のように書き換えることもできる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{密度変化率}), \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\rho^{-1}} \frac{d\rho^{-1}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{体積変化率}) \quad (2.7)$$

$\rho \mathbf{v}$ を質量流束密度という.

連続の式のテンソル表現は以下のようなになる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$$

ここで, テンソルの縮約表現を用いている.

2.2 保存則の一般形

2.2.1 単位体積当りのスカラー量の保存

単位体積あたりのスカラー量 A (例えば, 密度) の保存則は以下のようなになる.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = \sigma[A]. \quad (2.8)$$

ここで, \mathbf{F} は A の流束密度 (flux density), $\sigma[A]$ は単位体積・単位時間当りの A の生成・消滅 (source, sink) を表わす.

特に, \mathbf{F} が流体の運動による移流の部分 $A\mathbf{v}$ と, その他の部分 \mathbf{F}' に分けられるときは次のように書ける.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(A\mathbf{v} + \mathbf{F}') = \sigma[A].$$

$\mathbf{F}' = 0$ の場合,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(A\mathbf{v}) = \sigma[A].$$

となる.

2.2.2 単位質量当りのスカラー量の保存

単位質量あたりのスカラー量 s (例えば, 単位質量あたりのエネルギー) の保存の式は以下のようになる.

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{F}' = \sigma[\rho s]. \quad (2.9)$$

移流以外の流束 \mathbf{F}' がなく生成消滅もないときには, s は流体の運動にともなって保存する.

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (2.10)$$

このような s を **Lagrange** 保存量という.

2.2.3 流束形式, 移流形式

単位体積当りのスカラー量の保存の式において, A として ρs をとった式を考える:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v} + \mathbf{F}') = \sigma[\rho s].$$

これと, 単位質量当りのスカラー量の保存の式

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{F}' = \sigma[\rho s].$$

と比較すると, 次の公式が得られる.

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}). \quad (2.11)$$

さらに Lagrange 微分の Euler 表現を用いると,

$$\rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}). \quad (2.12)$$

ここで, 右辺第2項 $\operatorname{div}(\rho s \mathbf{v})$ を流束の発散 (flux divergence), $\rho s \mathbf{v}$ を流束密度 (flux density) と呼び, 右辺の形を流束形式 (flux form) という.

一方, 左辺中の $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s$ を移流項 (advective term) と呼び, 左辺の形を移流形式 (advective form) という.

2.2.4 補足

1. 単位質量あたりのスカラー量の保存則 (2.11)

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v})$$

を用いると, ラグランジュ的保存量 $\frac{ds}{dt} = 0$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \text{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (2.13)$$

も満たす.

2. また, 以下の式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho A dV = \int_{D'} \rho \frac{dA}{dt} dV. \quad (2.14)$$

その理由は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D'} \rho A dV &= \frac{d}{dt} \int_{D'} \rho A \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} d\xi = \int_{D'} \frac{d}{dt} (A \rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}) d\xi \\ &= \int_{D'} \frac{dA}{dt} \rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} d\xi + \int_{D'} A \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) \underbrace{d\xi}_{\frac{d}{dt} \text{の中に入る}} \\ &= \int_{D'} \rho \frac{dA}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} d\xi + \int_{D'} A \underbrace{\frac{d}{dt} (\rho d\mathbf{x})}_{\text{質量保存より0}} \\ &= \int_{D'} \rho \frac{dA}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} d\xi \\ &= \int_{D'} \rho \frac{dA}{dt} dV. \end{aligned}$$

ちなみに, 質量素片

$$dm = \rho J d\xi = \rho dV$$

をラグランジュ的保存量として扱えば簡単である.

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho A dV = \int_{D'} \frac{d}{dt} (A \rho dV) = \int_{D'} \frac{d}{dt} (A) \rho dV = \int_{D'} \frac{dA}{dt} \rho dV$$

となるからである.

3. 体積の時間変化の式

上式で $A = \rho^{-1}$ の場合を考えると

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} dV = \int_{D'} \rho \frac{d\rho^{-1}}{dt} dV = - \int_{D'} \rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} dV$$

となる. 連続の式を使えば

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} dV = \int_{D'} \text{div} \mathbf{v} dV \quad (2.15)$$

が得られる. これは流体粒子の体積の時間変化を表す式である.

2.3 応力

2.3.1 流体に働く力

流体内のとある部分とそれ以外の部分の相互作用を考える。厳密に考えると、流体内のどんな微小領域も多くの粒子(分子または原子)を含むので、粒子の概念から相互作用の問題を解くことは無理である。そこで、流体内部の閉領域 D' とその境界面を仮想的に定義できるとして、領域 D' の内部とその外側との相互作用は、以下の2種類の力で表現できると考えることにする。

1. 外力:

遠隔作用として現れる巨視的な力。

重力や電磁気力など、大きさが物質質量すなわち体積や質量に比例する力。その意味で外力は体積力(body force あるいは物体力)と呼ばれる。通常、ポテンシャルを用いて記述される。

2. 内力:

分子原子レベルの微視的な相互作用を平均した結果現れる巨視的な力。

相互作用の距離は非常に短い(微視的な距離でしかない)。領域 D' の内側では作用反作用で完全に打ち消しあうものとする。領域 D' の表面 $\partial D'$ においてのみ、領域に作用する力として現れる(打ち消しあう相手がいないので)。

内力の大きさは $\partial D'$ の面積に比例。その意味で応力は 面積力(surface force あるいは表面力)と呼ばれる。

補足: 表面力の考え方

質点系の力学では、特定の質点の運動方程式は

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \tilde{\mathbf{F}}_{ij}$$

と表される。ここで、 $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$ は、質点 j から質点 i に及ぼされる相互作用の力である。このように、質点系力学では粒子間の相互作用を考えなければならない。流体(連続体)においても同様に隣の領域(あるいは隣の流体粒子)との相互作用の効果を考えなければならない。この相互作用の効果を表現するものが応力である。これは、流体中の分子同士の相互作用を全て考慮するというものではなく、相互作用の効果を考える領域の表面に働く力という形で表現する。

2.3.2 応力ベクトル

一般に, 表面力は考える平面の向きに依存している. 連続体の内部の閉じた 3 次元領域 D' を考え, D' の表面 $\partial D'$ 上の点 P (座標を \mathbf{x} とする) に注目する. そこでの面積要素 (微小面積素片) を δS , 面積要素の外向き法線ベクトルを \mathbf{n} とする.

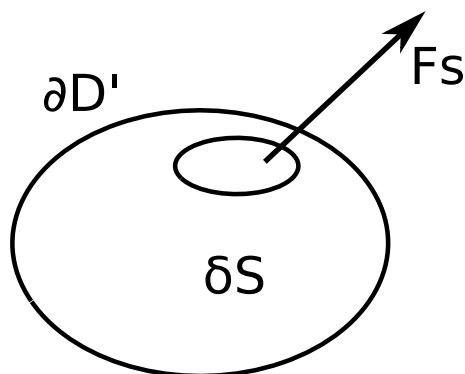


図 2.2: 応力の表現. 流体とともに運動する 3 次元領域を D' とする. D' の表面を $\partial D'$ とする. D' 中の微小面積素片を δS とする.

応力ベクトル (stress vector) は面積要素 δS に対して

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{F}_s}{\delta S} \quad (2.16)$$

で定義される.¹ ただし, $\delta \mathbf{F}_s$ は面積要素 δS の \mathbf{n} 側の面に働く力のベクトルである. ここで, 応力ベクトルは, 0 でもなければ, ∞ でもない有限確定の大きさをもつベクトルとして定義されると仮定することにする.

応力ベクトルの表現 $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x})$ は, 引数としてあらわした \mathbf{x} , すなわち, 面を考えている P 点の座標と, 添字としてあらわした \mathbf{n} , すなわち, その面の向き, に応力ベクトルが依存していることを示している.

2.3.3 応力の性質

例題を使って応力の性質を考える.

0 準備: 微小領域に成りたつ方程式.

流体とともに動く微小領域 D' を考える.

¹ 応力ベクトルが, 連続体内部の仮想閉曲面 S 上で定義され, S の内部の空間を占める物体へのその相互作用が外部の物体の作用に等しいという主張がオイラー・コーシーの応力原理 (stress principle of Euler and Cauchy) である.

微小領域の運動方程式: D' に対して運動量の釣り合いを考える (ニュートン力学を適用すると) と次のようになる:

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial D'} \boldsymbol{\sigma}_n dS + \int_{D'} \mathbf{F}_b dV \quad (2.17)$$

ここで, $\mathbf{F}_b(\mathbf{x})$ は各点に働く体積力, $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x})$ は表面 ∂D に働く応力である.

積分形で表現されるこの運動方程式は, オイラーの第一運動法則という (Euler's first law of motion)

微小領域の角運動量保存則: D' に対して角運動量保存則を考えると次のようになる:

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \mathbf{j} \rho dV = \int_{\partial D'} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) dS + \int_{D'} \mathbf{x} \times \mathbf{F}_b(\mathbf{x}) dV \quad (2.18)$$

\mathbf{j} は角運動量密度であり,

$$\mathbf{j} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

である. 積分形で表現されるこの角運動量の式を特にオイラーの第二運動法則という (Euler's second law of motion) ことがある.

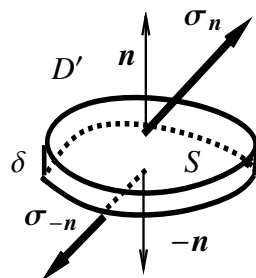
1 面の表の応力と裏の応力 (作用・反作用を考える)

応力では

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\sigma}_{-n}(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

が成り立つ.

上式を示すため, D' として点 \mathbf{x} を含む厚さ δ , 上面・下面が面積 S の微小領域を考察する.



応力の作用反作用を考えるための領域 D' .

運動方程式 (2.17) において $\delta \rightarrow 0$ に近づけると, 以下のようなになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho \mathbf{v} dV}_{\sim \delta^3 \text{ なので } \delta \rightarrow 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}} = \int_{S_u} \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) dS + \int_{S_d} \boldsymbol{\sigma}_{-n}(\mathbf{x}) dS$$

$$+ \underbrace{\int_{\text{側面}} \boldsymbol{\sigma}_n dS}_{\delta \rightarrow 0 \text{ で面積が } 0 \text{ に近づくので } 0 \text{ に収束}} + \underbrace{\int_{D'} \mathbf{F}_b dV}_{\sim \delta^3 \text{ なので } \delta \rightarrow 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}}$$

S_u は領域の上面, S_d は領域の下面をあらわす. よって, 上面と下面の面積分だけが残
り $\delta \rightarrow 0$ として面積分を上面だけで評価すれば

$$0 = \int_{S_u} \{\sigma_n(\mathbf{x}) + \sigma_{-n}(\mathbf{x})\} dS$$

この関係は連続体内の領域の取り方によらないので

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = -\sigma_{-n}(\mathbf{x})$$

連続体の内部に想定した境界面の, 正の側の領域が負の側の領域に及ぼす作用 $\sigma_n(\mathbf{x})$
は, 負の側の領域が正の側の領域に及ぼす作用 $\sigma_{-n}(\mathbf{x})$ と大きさが同じで向きが反対,
ということである.

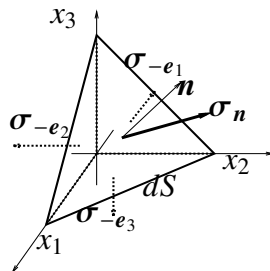
2 応力の表現 (「力の合成」を考える)

「力の合成」を考えると, 応力は

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j \mathbf{e}_i \tag{2.20}$$

と表現されることがわかる. この表現から, $\sigma_n(\mathbf{x})$ はテンソル量であることがわかる.
応力テンソル (stress tensor) とも呼ばれる.

上記の説明: ここでは, 連続体内の領域 D' として, 点 \mathbf{x} を含む, 微小4面体を考える.
局所直交座標系をとり, 4面のうち, 3面は座標面に平行, 残りの1面は法線ベクトル
を \mathbf{n} とする面である (図).



応力がテンソルであること
を考察するための4面体. 面
 dS の法線ベクトル \mathbf{n} の成分
が $n_1 > 0, n_2 > 0, n_3 > 0$ で
あるものとして描いた. ただ
し, $n_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j$.

4面体の高さを δ とする. 4面体の形を保ったまま $\delta \rightarrow 0$ に近づける. 力のつりあいの式 (2.17) は以下のようなになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho v dV}_{\sim \delta^3 \text{なので} \delta \rightarrow 0 \text{で} 0 \text{に収束}} = \int_{\partial D'} \sigma_n dS + \underbrace{\int_{D'} \mathbf{F}_b dV}_{\sim \delta^3 \text{なので} \delta \rightarrow 0 \text{で} 0 \text{に収束}}$$

よって, $\delta \rightarrow 0$ においては

$$0 = \int_{\partial D'} \sigma_n(\mathbf{x}) dS$$

でなければならない。

面積分を各面上で分けて評価する。 x_i 軸方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_i とする。 \mathbf{n} を法線ベクトルとする面を S とする。その微小面積を dS とすれば、 $n_i > 0$ としている上の図の場合で考えると x_i 軸と垂直な面の面積は $n_i dS$ である。よって、

$$0 = \sigma_n(\mathbf{x})dS + \sigma_{-\mathbf{e}_1}(\mathbf{x})n_1dS + \sigma_{-\mathbf{e}_2}(\mathbf{x})n_2dS + \sigma_{-\mathbf{e}_3}(\mathbf{x})n_3dS$$

となる。²面の向きを考慮して、 $\sigma_n(\mathbf{x}) = -\sigma_{-\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ を使うと、

$$0 = \{\sigma_n(\mathbf{x}) - \sigma_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{x})n_1 - \sigma_{\mathbf{e}_2}(\mathbf{x})n_2 - \sigma_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{x})n_3\} dS$$

である。この関係は連続体内の領域の取り方によらずに成り立たなければならないから

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = \sigma_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{x})n_1 + \sigma_{\mathbf{e}_2}(\mathbf{x})n_2 + \sigma_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{x})n_3 = \sum_j \sigma_{\mathbf{e}_j}(\mathbf{x})n_j$$

これで、任意の面に働く応力は3つのベクトルで表現されることが示された。よって、成分としては9つが必要である。

ここで、 $\sigma_{\mathbf{e}_j}(\mathbf{x})$ の i 成分を σ_{ij} と書くことにすると (σ_{ij} を $\sigma_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{\mathbf{e}_j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i$ と定義すると)、

$$\sigma_{\mathbf{e}_j}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \quad (2.21)$$

となる。これより

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = \sum_j \sigma_{\mathbf{e}_j}(\mathbf{x})n_j = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\mathbf{x})n_j\mathbf{e}_i$$

であることになる。 σ_{ij} の最初の添字 i は応力ベクトルの第 i 成分、後ろの添字 j は面の向きの j 成分に対応している。この式は Cauchy の公式 (Cauchy's formula) と呼ばれている。この公式は、 σ_{ij} がわかれば任意の面に働く応力を与えるものとなっている。

この表現から、座標変換則にしたがった変換則が得られるので、応力はテンソルで表現されることもわかる。

²面の向きとして一般的な場合を考えると、各軸に垂直な面の面積は $|n_i|dS$ である。よって、面積力のつりあいの式は、一般的には

$$0 = (\sigma_n(\mathbf{x}) + \sigma_{-(\text{sgn}n_1)\mathbf{e}_1}(\mathbf{x})|n_1| + \sigma_{-(\text{sgn}n_2)\mathbf{e}_2}(\mathbf{x})|n_2| + \sigma_{-(\text{sgn}n_3)\mathbf{e}_3}(\mathbf{x})|n_3|) dS$$

となる。ここで、 $\text{sgn}n_i$ は n_i の符号である。 $n_i > 0$ の場合は、 i 軸に垂直な面の法線ベクトルは $-\mathbf{e}_i$ である。よって、 i に関する項は

$$\sigma_{-(\text{sgn}n_i)\mathbf{e}_i}|n_i| = \sigma_{-\mathbf{e}_i}(n_i) = -\sigma_{\mathbf{e}_i}n_i$$

となる。 $n_i < 0$ の場合は、 i 軸に垂直な面の法線ベクトルは \mathbf{e}_i である。よって、 i に関する項は

$$\sigma_{-(\text{sgn}n_i)\mathbf{e}_i}|n_i| = \sigma_{\mathbf{e}_i}(-n_i) = -\sigma_{\mathbf{e}_i}n_i$$

となる。

2.3.4 法線応力 (圧力)

平面の接線応力 (接線方向の応力. せん断応力もしくはずれ応力ともいう) が常に 0 である場合, 法線応力 (法線方向の応力) は平面の向きによらない.

これを示すために, 連続体中に 図 2.3 のようなプリズム型の領域を考える. 各面の法線方向に応力 p_i ($i = 1, 2, 3$) が働いているとする.

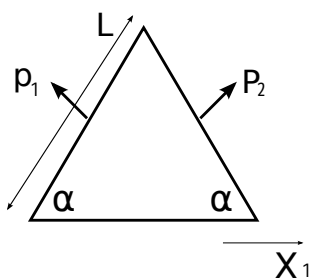


図 2.3: 応力の法線成分を考えるためのプリズム型領域. 底角 α , 斜辺 L の二等辺三角形である.

1. まず, 連続体が静止していて働く力が応力のみである場合を考える.

x 方向の力が釣り合うことから

$$p_1 L \sin \alpha = p_2 L \sin \alpha \quad \text{ゆえに} \quad p_1 = p_2$$

ここで, 圧力の x 成分は $p \sin \alpha$ であることを使った.

任意の角度 α について成り立つので, 法線方向の応力は面の向きによらず一定である.

2. 次に, 連続体は静止していて体積力が働く場合を考える.

プリズム領域に働く体積力は L^3 に比例する. 一方, 領域の境界面に働く力 (応力の寄与) は L^2 に比例する. 領域を十分小さくとれば, 体積力は応力の寄与より十分小さくなるので無視することができる. したがって, 体積力が働いていない場合の結果がそのまま成り立ち, 法線方向の応力は面の向きによらず一定である.

3. さらに, 連続体が運動している場合を考える.

プリズム型の領域とともに動く座標系にのって見たとき, 連続体には応力・外力に加えて慣性力が働き, それらがつりあって静止している. ところで慣性力は体積力であるから, 領域を十分小さくとれば, 応力の寄与より十分小さくなるので無視することができる. したがって, このときも先の結果と一致して, 法線方向の応力は面の向きによらず一定であることがわかる.

以上より, 接線方向の応力が常に 0 であるならば, 法線方向の応力の大きさは面の向きによらないことが示された.

これを圧力と呼び,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{2.22}$$

と表す.

2.3.5 応力テンソルの対称性

応力テンソルは対称テンソルである:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.23}$$

復習すると, j が面の向きを表す添字である.

これはモーメントの釣り合いから得られる. 「流体粒子は勝手にクルクル回り始めない」ということを表すものである.

説明: モーメントの釣り合い (流体粒子は勝手にクルクル回り始めないということ) を用いて説明する.

連続体内の領域 D として点 \mathbf{x} を含む, 微小立方体 (6 面体) を考察する. 各面が座標面に平行になるように局所直交座標系をとる (図 2.5).

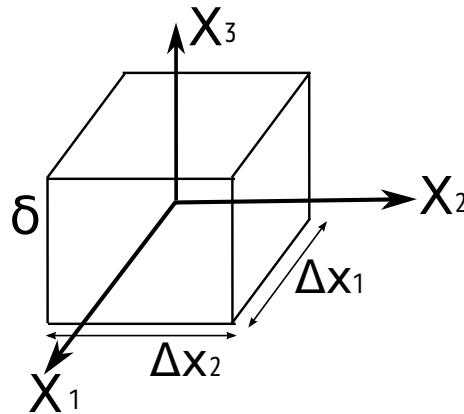


図 2.4: 応力の対称性を考えるための微小立方体.

立方体の辺の長さのスケールを δ とする. 立方体の形を保ったまま $\delta \rightarrow 0$ に近づける. 角運動量方程式 (2.18) は以下のようなになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{D'} \mathbf{j} \rho dV}_{\sim \delta^4 \text{なので} \delta \rightarrow 0 \text{で} 0 \text{に収束}} = \underbrace{\int_{\partial D'} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) dS}_{\sim \delta^2} + \underbrace{\int_{D'} \mathbf{x} \times \mathbf{F}_b(\mathbf{x}) dV}_{\sim \delta^4 \text{なので} \delta \rightarrow 0 \text{で} 0 \text{に収束}} \tag{2.24}$$

ここで, $\mathbf{j} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ である. よって, $\delta \rightarrow 0$ においては

$$0 = \int_{\partial D} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) dS$$

でなければならない。これはベクトル式である。以下では第3軸成分のみを考える。

直前の式はベクトルの式である。ここでは第3軸成分について考える。このとき面積分に寄与するのは第1軸, 2軸成分に垂直な面だけであり,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial D} [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x})]_3 dS \\
&\sim \int_{x_1=\Delta x_1/2} \left[\left(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \times \boldsymbol{\sigma}_{e_1} \right]_3 dx_2 dx_3 + \int_{x_1=-\Delta x_1/2} \left[\left(-\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \times \boldsymbol{\sigma}_{-e_1} \right]_3 dx_2 dx_3 \\
&\quad + \int_{x_2=\Delta x_2/2} \left[\left(0, \frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \times \boldsymbol{\sigma}_{e_2} \right]_3 dx_1 dx_3 + \int_{x_2=-\Delta x_2/2} \left[\left(0, -\frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \times \boldsymbol{\sigma}_{-e_2} \right]_3 dx_1 dx_3 \\
&= \int_{x_1=\Delta x_1/2} \left[\left(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \times (\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}) \right]_3 dx_2 dx_3 \\
&\quad + \int_{x_1=-\Delta x_1/2} \left[\left(-\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \times (-\sigma_{11}, -\sigma_{21}, -\sigma_{31}) \right]_3 dx_2 dx_3 \\
&\quad + \int_{x_2=\Delta x_2/2} \left[\left(0, \frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \times (\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}) \right]_3 dx_1 dx_3 \\
&\quad + \int_{x_2=-\Delta x_2/2} \left[\left(0, -\frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \times (-\sigma_{12}, -\sigma_{22}, -\sigma_{32}) \right]_3 dx_1 dx_3 \\
&= \frac{\Delta x_1}{2} \sigma_{21} \Delta x_2 \Delta x_3 + \left(-\frac{\Delta x_1}{2} \right) (-\sigma_{21}) \Delta x_2 \Delta x_3 \\
&\quad - \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{12} \Delta x_1 \Delta x_3 - \left(-\frac{\Delta x_2}{2} \right) (-\sigma_{12}) \Delta x_1 \Delta x_3
\end{aligned}$$

なお, $\boldsymbol{\sigma}_{e_1}$ は法線ベクトルが \mathbf{e}_1 の面 (x_1 軸に直交する面) に働く応力. $\boldsymbol{\sigma}_{e_1}$ の 2 軸方向成分 ($\boldsymbol{\sigma}_{e_1} \cdot \mathbf{e}_2$) は σ_{21} .

よって,

$$0 = \sigma_{21} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 - \sigma_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (2.25)$$

領域の取りかたに依存しないので任意の $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ について成り立たねばならない。したがって

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (2.26)$$

である。

同様のことを 1, 2 軸成分について行うことにより

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad (2.27)$$

が得られる。したがって応力テンソルは対称である。

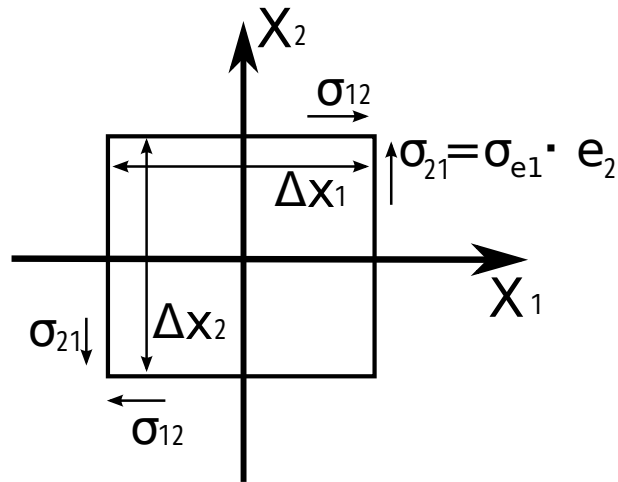


図 2.5: 角運動量バランスから考える応力の対称性.

2.3.6 応力テンソルの表現

結局, 流体の応力は以下のテンソル形式で表現されることがわかった.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \tag{2.28}$$

σ'_{ij} は非対角成分のみをもつ対称テンソルである.

2.4 運動方程式・運動量保存則

2.4.1 運動方程式の導出

流体とともに運動する領域 D' を考える. 領域 D' に働く力は

- 領域 D' を囲む閉曲面 $\partial D'$ に働く応力
- 保存力

である. これらの力と流体に働く慣性力がつりあわなければならない. 直交座標系をとり, D' についてオイラーの第一運動法則の i 成分 ($i = 1, 2, 3$) を書き下すと,

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho v_i dV = \int_{\partial D'} \sigma_{ik} n'_k dS' + \int_{D'} \rho \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dV \tag{2.29}$$

である. ベクトル形式で書くと

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial D'} \boldsymbol{\sigma}_n dS' + \int_{D'} \rho (-\text{grad}\Phi) dV$$

ただし n'_k は閉曲面 $\partial D'$ の外向き単位法線ベクトルである。 σ_{ik} は応力テンソルである。 応力テンソル σ_{ik} の各成分は、 k 方向に垂直な面（単位面積）に働く、 応力の i 成分を表す。 右辺第1項は応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{ij}n_j\mathbf{e}_i$ の面積分である。 Φ は保存力のポテンシャルエネルギーである。

この式を以下を用いて変形する。

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho v_i dV}_{(2.14) \text{ より } \int_{D'} \rho \frac{dv_i}{dt} dV} = \underbrace{\int_{\partial D'} \sigma_{ik} n'_k dS'}_{\text{ Gauss の定理から } \int_{D'} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV} + \int_{D'} \rho \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dV \quad (2.30)$$

これより以下の式が得られる。

$$\int_{D'} \left\{ \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\} dV = 0.$$

領域 D' が任意にとれることから、以下の流体の運動方程式が得られる。

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (2.31)$$

$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ を使うと

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (2.32)$$

これは運動方程式の移流形式になっている。

2.4.2 運動方程式の流束形式

質量保存則を用いて、運動方程式の流束形式の微分項を書き換えると

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k v_i) - v_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k v_i) - v_i \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k v_i) \end{aligned}$$

これから、以下のように運動量保存則が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (2.33)$$

これは運動量保存則を表す形式になっている。

$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$ を運動量流束密度テンソルという。 $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$ は、単位時間に k 方向に垂直な面（単位面積）を通り、単位時間に流れる運動量の i 成分を表す。

2.5 エネルギー保存則

2.5.1 エネルギー保存則の導出

流体とともに運動する領域 D' を考える. 領域内の流体になされる仕事と流体が受け取る熱は

- 領域を囲む閉曲面 $\partial D'$ に働く応力がする仕事
- 保存力のする仕事
- 閉曲面を通して流れ込む熱

である. 熱力学第1法則 (エネルギー保存則) によれば, 加えられた仕事と熱が流体の運動エネルギーと内部エネルギーの増加に等しい. したがって D' についてのエネルギーの式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D'} \rho \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon \right) dV &= \int_{\partial D'} \sigma_{ik} v_i n'_k dS - \int_{D'} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i dV \\ &\quad - \int_{\partial D'} q_i n'_i dS + \int_{D'} Q dV \end{aligned} \quad (2.34)$$

ε は単位質量当りの流体の内部エネルギー, q_i は閉曲面を通して流れ込む熱流束である. Q は内部熱源.

熱流束として考えるものはおもに次の2つである.

- 熱伝導による熱流束 q^T

流体中に温度勾配が存在するとき, それを解消する方向に熱流束が生じる.

特に熱伝導による熱流束は, 考える流体中の温度勾配が十分小さいとき, $q_i^T = -\kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$

と表わされる. ここで, κ_{ij} は熱伝導率を表すテンソルである.

- 放射による熱流束 q^{rad}

(2.14)

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho A dV = \int_{D'} \rho \frac{dA}{dt} dV$$

を用いて時間微分と積分を交換し, Gauss の定理を用いて変型すると

$$\int_{D'} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon \right) dV = \int_{D'} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} v_i) dV - \int_{D'} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i dV - \int_{D'} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV + \int_{D'} Q dV.$$

領域 D' が任意にとれることから

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} v_i) - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + Q. \quad (2.35)$$

全エネルギーの形にするため、ポテンシャルエネルギーの項 (右辺第2項) を次のように変型する.

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i = \rho \frac{d\Phi}{dt} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.36)$$

右辺と左辺の項を組み替えると

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (-\sigma_{ik} v_i + q_k) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q. \quad (2.37)$$

応力テンソルで、圧力を用いた表現 $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$ を使うと、

$$\underbrace{\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right)}_{e_{tot} \text{とおく}} + \frac{\partial}{\partial x_k} (p v_k - \sigma'_{ik} v_i + q_k) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q. \quad (2.38)$$

2.5.2 エネルギー保存式の流束形式

質量保存則を用いて変形すると、以下が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho e_{tot})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k e_{tot} - v_i \sigma_{ik} + q_k) &= \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q, \\ \frac{\partial (\rho e_{tot})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k e_{tot} + p v_k - v_i \sigma'_{ik} + q_k) &= \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q, \end{aligned} \quad (2.39)$$

これは粘性流体のエネルギー保存則を表す形式になっている. ただし、

$$e_{tot} \equiv \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right).$$

e_{tot} は、単位質量当りの流体のもつ全エネルギーである. ρe_{tot} は、単位体積当りの流体のもつ全エネルギーである. $F_k = \rho e_{tot} v_k - v_i \sigma_{ik} + q_k$ をエネルギー流束密度ベクトルという.

2.5.3 流体の方程式 (ここまでのまとめ)

ここまで導出したのは連続の式 (質量保存則), 運動方程式 (運動量保存則), エネルギー保存則である.

流体の運動場, 熱力学状態を決定するためには, 上記に加えて以下の2つの方程式が必要となる. いずれも流体の「種類」を指定するものである.

- 構成方程式 (constitution equation): 応力と連続体を記述する座標 (変形) および熱力学量などと関係づける法則.
- 状態方程式 (equation of state): 熱力学量 (p, T, ρ) の間の関係式. 例えば, 理想気体の場合は $p = nkT$

更に, 境界条件と初期条件が必要である.

2.6 境界条件

境界で与えるべき情報は, 質量フラックス, 運動量フラックス, エネルギーフラックスである. しかし普通, 境界条件としては, 境界におけるフラックスを直接与えるのではなく, 物理的意味付けのはっきりした変数, 例えば, 圧力, 速度の境界における値を与えることが多い. その場合, 与えられた条件が境界における各フラックスの値を決めているかどうかは, 問題に応じて考察, 確認しなければならない³.

2.6.1 境界条件の例: 固体境界

- 静止した固体表面における条件
質量保存則より, 固体表面を通しての質量流束は 0 であるから,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{at surface.} \quad (2.40)$$

\mathbf{n} は固体表面の法線ベクトルである.

粘性流体の場合は, これだけでは条件が不足して解くことができないので, 境界条件を付け加える必要がある. 固体表面では流体は密着していると考えて (粘着条件)

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{at surface.} \quad (2.41)$$

- 動いている物体の表面における条件
境界を通しての質量フラックスが 0 であるから, 境界面の法線方向の速度成分が一致する. すなわち,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^{(s)} \cdot \mathbf{n} \quad \text{at surface.} \quad (2.42)$$

ただし $\mathbf{v}^{(s)}$ は物体の表面速度である.

粘性流体の場合の対応する粘着条件は, 流体の速度と物体表面の速度が一致することである.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(s)} \quad \text{at surface.} \quad (2.43)$$

³実践的には, 1 次の差分スキームをつくって検討するとよい.

境界条件のもとになる考え方は、流体粒子と壁の相互作用が流体粒子同士の相互作用と同じである、ということである。

さらにこの他に、熱に関する境界条件が必要である。これは、問題設定により異なるので、ここでは述べない²。

2.7 基礎方程式から得られる諸々の式

2.7.1 力学的エネルギーの時間変化の式

運動方程式

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

に $\frac{v_i}{\rho}$ をかけて i について和をとる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) = -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

これが運動エネルギーの式である。運動エネルギーの式の流束形式は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ v_k \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) - v_i \sigma_{ik} \right\} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i - \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (2.44)$$

運動エネルギーの式の両辺に $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ を加えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (v_i p)}{\partial x_i} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (v_i \sigma'_{ik})}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

となる。よって、以下のように力学的エネルギーの式が得られる。

$$\rho \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} (-v_k p + v_i \sigma'_{ik}) + p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.45)$$

力学的エネルギーの式の流束形式は以下の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left\{ \frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right\} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left\{ \frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right\} + p v_k - v_i \sigma'_{ik} \right] = p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.46)$$

²例えばよく用いられるのは、断熱条件 $q_k = 0$. at surface である。あるいは、Benard 問題のように、 T を fix にすることである。

2.7.2 内部エネルギーの時間変化の式

全エネルギーの式

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (p v_k - \sigma'_{ik} v_i + q_k) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q.$$

から, 力学的エネルギーの式

$$\rho \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} (-v_k p + v_i \sigma'_{ik}) + p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

を差し引く.

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + Q.$$

左辺と右辺を多少組み替えると

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + Q.$$

内部エネルギーの式の流束形式は

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \varepsilon v_i) = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + Q.$$

ベクトル形式で書けば,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \mathbf{v}) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div} \mathbf{q} + Q. \quad (2.47)$$

内部エネルギーの式の各項の意味は以下の通りである.

- 右辺第1項: $-p \operatorname{div} \mathbf{v}$

流体要素が周辺の流体からされる仕事を表す. 熱力学で良く知られている第一法則

$$dU = -p dV + d'Q$$

の右辺第1項に相当する.

- 右辺第2項以降: $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \dots$

流体要素に与えられる熱を表す. 熱力学で良く知られている第一法則

$$dU = -p dV + d'Q$$

の右辺第2項に相当する.

2.7.3 エンタルピーの時間変化の式

単位質量あたりのエンタルピーを h とする. 熱力学関係式 $h = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$ を用いると内部エネルギーの式の左辺は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(h - \frac{p}{\rho} \right) \right\} + \operatorname{div} \left\{ \rho \left(h - \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) - \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{v}) - \operatorname{div}(p \mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{v}) - \frac{dp}{dt} - p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned}$$

よってエンタルピーの式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{v}) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{dp}{dt} + Q. \quad (2.48)$$

2.7.4 エントロピーの時間変化の式

単位質量あたりのエントロピーを s とする. 熱力学関係式 $d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$ と質量保存則を用いて内部エネルギーの式の左辺を変型すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{v}) &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \varepsilon \\ &= \rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \rho \\ &= \rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s - p \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

よってエントロピーの式は

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div} \mathbf{q} + Q. \quad (2.49)$$

この式は熱輸送の式とも呼ばれる. 左辺 $\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s$ は単位時間に単位体積の流体が受け取った熱, 右辺第1項 $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ は粘性散逸により発生した熱, 右辺第2項は熱流の収束発散である.

第3章 等方ニュートン流体の方程式

3.1 等方ニュートン流体の構成方程式

構成方程式とは、応力と連続体を記述する座標 (変形) および熱力学量などに関係づける法則である。¹

通常、流体では、応力は速度の空間微分の関数と考えるのが自然である。速度勾配テンソル (deformation rate tensor) $u_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$ を導入しておく。したがって、構成方程式は応力を速度勾配テンソルで表現したものとなる。

ここでは、ニュートン流体の構成方程式の表式について考える。

3.1.1 等方ニュートン流体とは

以下の仮定を満たす流体を等方ニュートン流体という。

- 速度勾配が十分小さい。よって、応力が速度勾配の1次式で表すことができると考える。つまり、応力は $u_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$ の1次関数であると仮定する。このような流体をニュートン流体 (Newtonian Fluid) と呼ぶ。そうでないものを非 Newton 流体 (Non-Newtonian Fluid) という。
- 流体が等方的である。

ニュートン流体として扱われるものとしては、地球の大気、海洋などが挙げられる。

3.1.2 σ_{ij} の速度勾配テンソル u_{kl} による展開

速度勾配が小さいので、 σ_{ij} を u_{kl} で展開し、2次以上の項を微小として無視する。

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} u_{kl} + O(u_{kl}^2). \quad (3.1)$$

¹構成方程式という用語は、まとめたものを指すこともある。例えば、熱伝導を表現する Fourier 則や状態方程式をまとめたもの。

速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) u_{kl} は対称部分と反対称部分に分けることができる。

$$u_{kl} = \frac{1}{2} \cdot e_{kl} + \frac{1}{2} \cdot \Omega_{kl}, \quad (3.2)$$

ただし

$$e_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k},$$

$$\Omega_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = -\epsilon_{klm} \cdot \omega_m.$$

ここで, ϵ_{klm} はエディントンのイプシロンと呼ばれるもので,

$$\epsilon_{klm} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \\ -1 & (i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

e_{kl} は変型速度テンソル (rate-of-deformation tensor)², Ω_{kl} はスピテンソルである。後でやるが³, ω_m は渦度ベクトルである。 ω_m は渦度の m 方向の成分である³。したがって σ_{ij} はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} \left(\frac{1}{2} e_{kl} - \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \omega_m \right) \\ &= (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl} e_{kl} + b_{ijm} \omega_m + O(u_{kl}^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし, $a_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}}$, $b_{ijm} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} \epsilon_{klm}$ である。

3.1.3 応力テンソルの表式

- $(\sigma_{ij})_0$ の表式

流体が静止している場合を考える。

流体中に働く応力は、面に垂直な方向に押す向きに働く圧力 p だけである。よって、応力テンソルは $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ となるべきである。一方、速度勾配による σ の展開式 (3.3) については、流体が静止しているので $e_{kl} = 0, \omega_m = 0$ となり $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0$ となる。よって、

$$(\sigma_{ij})_0 = -p\delta_{ij}. \quad (3.4)$$

²ひずみ速度テンソル (strain rate tensor) とも言う (異)。 $\frac{1}{2}e_{kl}$ を変型速度テンソルと定義する流儀も多い。

³ $\omega_m \equiv \epsilon_{ijm} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ よって、

$$-\epsilon_{klm} \cdot \omega_m = -\epsilon_{klm} \cdot \epsilon_{ijm} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -(\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{il}) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$$

• b_{ijm} の表式

流体が剛体回転している場合を考える。

速度のずれによる応力は存在せず、圧力だけである。応力テンソルは $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ となるべき。今、流体が x_1 軸を回転軸として角速度 Ω で剛体回転しているとする。剛体回転の速度場は、 $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$ より

$$\mathbf{v} = (0, \Omega \cdot x_3, -\Omega \cdot x_2)$$

$$\Omega = |\Omega|.$$

この速度分布では $e_{kl} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = 0$, $\omega_1 = -2\Omega$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ である。したがって、応力テンソル $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl}e_{kl} + b_{ijm}\omega_m$ は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - b_{ij1} \cdot 2\Omega. \tag{3.5}$$

となる。したがって、 $b_{ij1} = 0$ である。同様に、 x_2 軸、 x_3 軸回転について考えると、 ω_m の係数 b_{ijm} はすべて 0 となる。

$$b_{ijm} = 0. \tag{3.6}$$

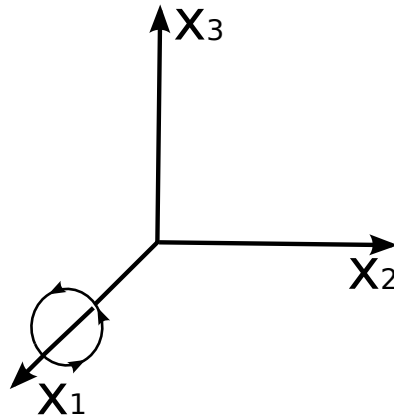


図 3.1: x_1 軸まわりの剛体回転。

• a_{ijkl} の表式

流体が等方的であるという仮定により、 e_{kl} の係数 a_{ijkl} は 4 階の等方性テンソルでなければならない。任意の座標回転 (より正確には、直交基底変換) により形が変わらないテンソルを等方性テンソルという。4 階の等方テンソルは次の形をもつ (次節参照)。

$$a_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3.7}$$

物質	密度 ρ [Kg/m ³]	粘性係数 μ [Pa · sec=Kg m ⁻¹ sec ⁻¹]	動粘性係数 ν [m ² / sec]
水 H ₂ O (280K)	996.93	1.4×10^{-3}	1.4×10^{-6}
水 H ₂ O (300K)	996.62	8.5×10^{-4}	8.6×10^{-7}
空気 (298K)	1.184	1.8×10^{-5}	1.5×10^{-5}
グリセリン C ₃ H ₅ (OH) ₃ (280K)	1267	5.5	4.3×10^{-3}
グリセリン C ₃ H ₅ (OH) ₃ (300K)	1257	7.8×10^{-1}	6.2×10^{-4}
水銀 (280K)	13.5877×10^3	1.6×10^{-3}	1.2×10^{-7}

表 3.1: 粘性流体の密度・粘性係数の値. 流体力学ハンドブックと理科年表による

以上を (3.3) に代入することにより, 応力テンソルは次のように書ける.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl}e_{kl} + b_{ijm}\omega_m + O(u_{kl}^2) \\
&= -p\delta_{ij} + (A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk})e_{kl} \\
&= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + Be_{ij} + Ce_{ji} \\
&= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + (B + C)e_{ij}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ここであらためて $A = \frac{\lambda}{2}, B + C = \mu$ とおく. また, $e_{kk} = 2\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 2\text{div}\mathbf{v}$ と変型することにより応力テンソルの表現が得られる.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\text{div}\mathbf{v} + \mu e_{ij} \\
&= -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

μ を粘性係数 (率), λ を第2粘性係数 (率) という.

応力テンソルの表式は, さらに次のように変形されることも多い.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \delta_{ij} \cdot \text{div}\mathbf{v} \\
&= -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ij} \cdot \text{div}\mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$\eta \equiv \mu$ は粘性係数 (率) である. $\zeta \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu$ は体積粘性率 (bulk viscosity) と言われる. 体積粘性率は, 体積変化の程度によって平均圧力が静止状態での圧力からずれる効果の大きさを表す.

3.1.4 等方テンソルの表式の導出

等方テンソルの形の導出の例を以下に示す.

1. 1 階の等方性テンソル

座標の回転による座標変換を考える. 変換行列を β_{ji} とすると, 1 階テンソルの変換則により, ベクトル t_j は

$$t'_j = \beta_{ji} t_i$$

と変換される. t_j が等方だとすると t'_j は t_j に等しい. 回転変換として, x_1 軸まわりの 180° 回転 (x_2 軸と x_3 軸がひっくり返る) を考えると

$$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$t'_1 = t_1, \quad t'_2 = -t_2, \quad t'_3 = -t_3$$

が得られる. よって, 等方性の条件 $t'_j = t_j$ から

$$t_2 = 0, \quad t_3 = 0$$

が得られる. 同様に, x_2 軸まわりの 180° 回転を考えると $t_1 = 0$ が得られる. よって, $t_i = 0$ となる.

更に, 任意の座標回転に対して $(0,0,0)$ は形を変えない. したがって 1 階の等方性テンソルは $t_i = 0$ である.

2. 2 階の等方性テンソル⁴

計算の便宜上, a_{ij} を成分とするテンソルを \mathbf{T}_2 と書くことにすると,

$$\mathbf{T}_2 = a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (3.11)$$

と表すことができる. ここで \mathbf{e}_i は x_i 軸に平行な単位ベクトルであり, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ はテンソルの基底である⁵. 座標系を任意の向きに回転させるとき, 等方性テンソルの成分は回転前後で不変である. この条件を満たすように成分 a_{ij} を定める.

アインシュタインの規約を用いずに (3.11) を書き下すと,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 = & a_{xx} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + a_{xy} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + a_{xz} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \\ & + a_{yx} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x + a_{yy} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + a_{yz} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \\ & + a_{zx} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + a_{zy} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y + a_{zz} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.12)$$

⁴今井 (1973) 第 57 節, 佐野 (2000) 第 4.3 節, ファン (1980) 第 8.4 節による.

⁵2 階テンソルに関して, (3.11) のように単位ベクトルを 2 つ併記して成分の位置付けを表す方法をダイアディック (dyadic) と呼ぶ. また 4 階テンソルに関して, (3.20) のように単位ベクトルを 4 つ併記して成分の位置付けを表す方法をテトラディック (tetradic) と呼ぶ.

となる. 座標系を x 軸について反時計回りに π rad 回転させる. このとき T_2 は (3.12) において単位ベクトルを $e_y \rightarrow -e_y, e_z \rightarrow -e_z$ と置き換えたもので表現される. すなわち

$$\begin{aligned} T_2 &= a_{xx}e_xe_x - a_{xy}e_xe_y - a_{xz}e_xe_z \\ &\quad - a_{yx}e_ye_x + a_{yy}e_ye_y + a_{yz}e_ye_z \\ &\quad - a_{zx}e_z e_x + a_{zy}e_z e_y + a_{zz}e_z e_z \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる. (3.12), (3.13) の T_2 の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{xy} = 0, \quad a_{xz} = 0, \quad a_{yx} = 0, \quad a_{zx} = 0 \quad (3.14)$$

が得られる. 同様に座標系を y 軸について反時計回りに π rad 回転させると, T_2 は (3.12) において単位ベクトルを $e_x \rightarrow -e_x, e_z \rightarrow -e_z$ と置き換えることで表現されるので,

$$\begin{aligned} T_2 &= a_{xx}e_xe_x - a_{xy}e_xe_y + a_{xz}e_xe_z \\ &\quad - a_{yx}e_ye_x + a_{yy}e_ye_y - a_{yz}e_ye_z \\ &\quad + a_{zx}e_z e_x - a_{zy}e_z e_y + a_{zz}e_z e_z \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる. (3.12), (3.15) の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{yz} = 0, \quad a_{zy} = 0 \quad (3.16)$$

が得られる. また座標系を y 軸について反時計回りに $\pi/2$ rad 回転させた後, 新たな x 軸について時計回りに $\pi/2$ rad 回転させる. このとき T_2 は (3.12) において単位ベクトルを $e_x \rightarrow e_y, e_y \rightarrow e_z, e_z \rightarrow e_x$ と置き換えることで表現されるので,

$$\begin{aligned} T_2 &= a_{xx}e_ye_y + a_{xy}e_ye_z + a_{xz}e_ye_x \\ &\quad + a_{yx}e_z e_y + a_{yy}e_z e_z + a_{yz}e_z e_x \\ &\quad + a_{zx}e_x e_y + a_{zy}e_x e_z + a_{zz}e_x e_x \\ &= a_{zz}e_x e_x + a_{zx}e_x e_y + a_{zy}e_x e_z \\ &\quad + a_{xz}e_y e_x + a_{xx}e_y e_y + a_{xy}e_y e_z \\ &\quad + a_{yz}e_z e_x + a_{yx}e_z e_y + a_{yy}e_z e_z \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる. (3.12), (3.17) の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} \quad (3.18)$$

が得られる. $a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = A$ と置くと, (3.14), (3.16), (3.18) より,

$$a_{ij} = A\delta_{ij} \quad (3.19)$$

となる.

逆に, (3.19) なら任意の回転に対して不変となることが示せる (はず). よって, (3.19) が 2 階の等方テンソルである.

3. 4階の等方性テンソルの導出

a_{ijkl} を成分とするテンソルを \mathbf{T}_4 と書くことにすると,

$$\mathbf{T}_4 = a_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \quad (3.20)$$

と表すことができる. 座標系の回転に対してテンソルの成分は回転前後で不変となるように成分 a_{ijkl} を定める.

\mathbf{T}_4 は 81 個の成分を持つので, アインシュタインの規約を用いずに各項を陽に書き下すのはあまり現実的ではない. よりシステムティックに議論する為に, 成分を以下のように分類する.

- (a) 添字が全て等しいもの. a_{xxxx} など 3 成分が該当する.
- (b) 添字の種類が 2 種類で, 一方の添字が 2 つのみ現れるもの. a_{xxyy} など 18 成分が該当する.
- (c) 添字が奇数回現れるもの. a_{xxyx}, a_{xxyz} など 60 成分が該当する.

座標系を 1 つの軸の周りに π rad 回転させるとき, 単位ベクトルは $(\mathbf{e}_x \rightarrow -\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y \rightarrow -\mathbf{e}_y), (\mathbf{e}_x \rightarrow -\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_z), (\mathbf{e}_y \rightarrow -\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_z)$ のように置き換わる. この回転操作により, テンソルの基底は $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \rightarrow -\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y$ のように変換され, 1 つの添字が奇数回現れる成分は自身に負号をつけたものと等しくなる. 従って 3. に分類される成分は全てゼロとなる.

座標系を 1 つの軸の周りに $\pi/2$ rad 回転させるとき, 単位ベクトルは $(\mathbf{e}_x \rightarrow -\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_x), (\mathbf{e}_y \rightarrow -\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z \rightarrow \mathbf{e}_y), (\mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{e}_z)$ のように置き換わる. この回転操作により, テンソルの基底は $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x$ のように変換されるので, 2. に分類される成分に関して以下の関係が得られる.

$$a_{xxyy} = a_{yyxx}, \quad a_{yyzz} = a_{zzyy}, \quad a_{zzxx} = a_{xxzz}, \quad (3.21)$$

$$a_{xyxy} = a_{yxyx}, \quad a_{yzyz} = a_{zyzy}, \quad a_{zxzx} = a_{xzxz}, \quad (3.22)$$

$$a_{xyyx} = a_{yxxy}, \quad a_{yzzy} = a_{zyyz}, \quad a_{zxxz} = a_{xzzx}. \quad (3.23)$$

座標系を 1 つの軸の周りに $\pi/2$ rad 回転させた後, 新たな座標系におけるある軸の周りに $-\pi/2$ rad 回転させるとき, 単位ベクトルは $(\mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z \rightarrow \mathbf{e}_x)$ と置き換わる. この回転操作により, テンソルの基底は $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y$ のように変換される. 従って, 各成分に関して以下の関係が得られる.

$$a_{xxyy} = a_{yyzz} = a_{zzxx}, \quad (3.24)$$

$$a_{xyxy} = a_{yzyz} = a_{zxzx}, \quad (3.25)$$

$$a_{xyyx} = a_{yzzy} = a_{zxxz}, \quad (3.26)$$

$$a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz}. \quad (3.27)$$

(3.21) – (3.26) をまとめると,

$$a_{xxyy} = a_{yyzz} = a_{zzxx} = a_{yyxx} = a_{zzyy} = a_{xxzz} \equiv B, \quad (3.28)$$

$$a_{xyxy} = a_{yzyz} = a_{zxzx} = a_{yxxy} = a_{zyzy} = a_{xzxz} \equiv C, \quad (3.29)$$

$$a_{xyyx} = a_{yzzz} = a_{zzzz} = a_{yxxz} = a_{zyyz} = a_{xzzx} \equiv D \quad (3.30)$$

となる。但し B, C, D はスカラー量である。

更に z 軸の周りに微小角度 $\delta\theta$ だけ回転させる場合について考える。この場合は $\pi/2$ rad, π rad 回転させる場合とは異なり, 基底を単純に置き換えることによって議論することが困難である。そこでテンソルの定義に立ち戻って, テンソルの変換法則を導く。4階のテンソル a_{ijkl} について, 回転変換した後のテンソルを a'_{pqrs} とする。このときテンソルの定義より, a_{ijkl} と a'_{pqrs} の間には以下の関係式が成り立つ。

$$a'_{pqrs}(x', y', z') = a_{ijkl}(x, y, z)\beta_{pi}\beta_{qj}\beta_{rk}\beta_{sl}. \quad (3.31)$$

但し x', y', z' は回転後の座標であり, β_{pi} は回転行列の成分である。 z 軸の周りに角度 $\delta\theta$ だけ回転させる場合,

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta\theta) & \sin(\delta\theta) & 0 \\ -\sin(\delta\theta) & \cos(\delta\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

となる。(3.32)において, $\sin(\delta\theta), \cos(\delta\theta)$ を $\delta\theta = 0$ の周りで展開し, $|\delta\theta| \ll 1$ であるとして $\delta\theta$ の2次以上の項を無視すると,

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

となる。(3.33) はクロネッカーのデルタ記号及びエディントンのイプシロン記号を用いて

$$\beta_{ij} = \delta_{ij} + \delta\theta\epsilon_{3ij} \quad (3.34)$$

と表される。(3.34) を (3.31) に代入すると,

$$\begin{aligned} a'_{pqrs} &\simeq a_{ijkl}(\delta_{pi} + \delta\theta\epsilon_{3pi})(\delta_{qj} + \delta\theta\epsilon_{3qj})(\delta_{rk} + \delta\theta\epsilon_{3rk})(\delta_{sl} + \delta\theta\epsilon_{3sl}) \\ &= a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk}\delta_{sl} \\ &\quad + (a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk}\epsilon_{3sl} + a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{sl}\epsilon_{3rk} + a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{rk}\delta_{sl}\epsilon_{3qj} \\ &\quad + a_{ijkl}\delta_{qj}\delta_{rk}\delta_{sl}\epsilon_{3pi})\delta\theta + O((\delta\theta)^2) \\ &\simeq a_{pqrs} + (a_{pqrl}\epsilon_{3sl} + a_{pqks}\epsilon_{3rk} + a_{pjrs}\epsilon_{3qj} + a_{iqrs}\epsilon_{3pi})\delta\theta \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。 a_{pqrs} が等方性テンソルである為には, $\delta\theta$ に依らず $a'_{pqrs} = a_{pqrs}$ でなければならない。従って (3.35) より

$$a_{pqrl}\epsilon_{3sl} + a_{pqks}\epsilon_{3rk} + a_{pjrs}\epsilon_{3qj} + a_{iqrs}\epsilon_{3pi} = 0 \quad (3.36)$$

となる. (3.36) において $p = q = r = 1, s = 2$ と置くと,

$$\begin{aligned} & a_{111l} \varepsilon_{32l} + a_{11k2} \varepsilon_{31k} + a_{1j12} \varepsilon_{31j} + a_{i112} \varepsilon_{31i} \\ &= -a_{1111} + a_{1122} + a_{1212} + a_{2112} \\ &= -a_{xxxx} + a_{xyxy} + a_{xyxy} + a_{yxyx} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる. (3.27) – (3.30) 及び (3.37) より

$$a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz} = A + B + C \quad (3.38)$$

となる. (3.28) – (3.30), (3.38) より,

$$a_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (3.39)$$

となる. (3.39) に関して, 任意の軸の周りの任意の回転に対して不変であることが示される.

以上で4階までの等方テンソルの一般形が得られた.

3.2 ニュートン流体の運動方程式

3.2.1 Navier-Stokes 方程式

流体の運動方程式

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

にニュートン流体の応力テンソルの表現

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ij} \cdot \text{div} \mathbf{v}$$

を代入することにより, Newton 流体の一般的な運動方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\zeta \cdot \text{div} \mathbf{v}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \right\} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

これを Navier-Stokes 方程式 という.

参考:円筒座標・球座標における表現

円筒座標系における応力テンソルの r, ϕ, z 成分は以下の通りである.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \sigma_{r\phi} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right), \\ \sigma_{\phi z} &= \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right), \\ \sigma_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Navior-Stokes 方程式の3成分と連続の式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0\end{aligned}$$

球座標系における応力テンソルの r, ϕ, θ 成分は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\phi} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi \cot \theta}{r} \right), \\ \sigma_{\phi r} &= \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right).\end{aligned}$$

Navier-Stokes 方程式の 3 成分と連続の式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right], \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right. \\ \left. - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0\end{aligned}$$

3.2.2 非圧縮の場合の Navier-Stokes 方程式

次の仮定が成り立つ場合を考える。

- 非圧縮流体である, すなわち $\frac{d\rho}{dt} = 0$ とみなせる. このとき, $\text{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = 0$ である.
- 粘性率 η が流体中で大きく変化しない.

Navier-Stokes 方程式は次のようになる.

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (3.41)$$

これが非圧縮での Navier-Stokes 方程式である.

ベクトル形式で書けば

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \right) = -\text{grad} p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \rho \cdot \text{grad} \Phi. \quad (3.42)$$

あるいは ρ で割って

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \text{grad} \Phi. \quad (3.43)$$

$\nu \equiv \frac{\eta}{\rho}$ は動粘性係数 (率) と呼ばれる.

3.3 ニュートン流体のエネルギー保存則

ニュートン流体の熱力学の式の表式を与える. 力学的エネルギーの式 (2.46) と内部エネルギーの式 (2.47) を思い出そう.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho v_k \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] + p v_k - v_i \sigma'_{ik} \right\} &= p \text{div} \mathbf{v} - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \text{div} (\rho \varepsilon \mathbf{v}) &= -p \text{div} \mathbf{v} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \text{div} \mathbf{q} + Q \end{aligned}$$

この $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ の表式を求めておく. これは粘性散逸項である.

3.3.1 粘性散逸項

等方的なニュートン流体の σ_{ik} の表式を用いると

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (3.44)$$

右辺第1項は

$$\begin{aligned}
& \eta \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)} \\
&= \eta \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)} \\
& \hspace{15em} \text{前にある} \delta_{ik} \text{をかけると消える} \\
&= \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2
\end{aligned}$$

となる⁶ 右辺第2項は

$$\zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2.$$

よって

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (3.45)$$

$\eta > 0, \zeta > 0$ ならともに正定値. 運動エネルギーの散逸を表現している.

⁶下から2つめの式の第2項は以下のようにして消える.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{2}{3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \cdot \left(\delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \delta_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{2}{3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \cdot \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.3.2 熱力学の式

等方的な Newton 流体についての内部エネルギー・エンタルピー・エントロピーの式は次のようになる。

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 - p\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{div}\mathbf{q} + Q, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + \frac{dp}{dt} + Q, \quad (3.47)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + Q. \quad (3.48)$$

特に、非圧縮流体 のとき、熱力学の式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + Q, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + \frac{dp}{dt} + Q, \quad (3.50)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} + Q. \quad (3.51)$$

この場合のエントロピーの式は、流体素片が持つ熱エネルギーの変化が粘性散逸による発熱と熱フラックスの収束発散によって決まることを表している。

また 粘性・熱流の効果を見捨てる 場合 ($\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\mathbf{q} = 0$, $Q = 0$)、は次のようになる (圧縮性があっても良い)。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{v}) = -p \cdot \operatorname{div}\mathbf{v}, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h\mathbf{v}) = \frac{dp}{dt}, \quad (3.53)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) s = 0. \quad (3.54)$$

この場合、

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

となる。この式からエントロピーは Lagrange 不変量であることがわかる。