

傾圧不安定の基礎

石渡正樹

2020年07月12日

第1章 傾圧不安定とは

1.1 傾圧不安定の定義

傾圧不安定とは, 回転系における安定成層流体において鉛直シア(鉛直速度分布)が存在する場合に発生する不安定現象である. 温度風平衡の関係から鉛直シアは南北温度勾配によって維持されている. したがって, 回転系における安定成層流体に水平温度差をつけた場合に生じる不安定現象ととらえても良い. 傾圧不安定が生じる場では, 等圧面上において温度差が存在する. したがって, 等密度面と等圧面が交叉する場(傾圧場)となっている.

1.2 傾圧不安定現象の例

1.2.1 地球大気における傾圧不安定

傾圧不安定現象の1例は, 地球大気における低気圧・高気圧である. 低気圧の例を図1.1, 図1.2に示す.

衛星画像の動画においても低気圧・高気圧の発達および移動を観察することができる. 衛星画像動画は「デジタル台風」(<http://agora.ex.nii.ac.jp/digital-typhoon/>)から取得できる.

1.2.2 実験室における傾圧不安定

回転水槽実験においても傾圧不安定現象を観察することができる. 回転水槽実験の例は「地球流体基礎実験集」(http://dennou-k.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/index.htm)に掲載されている.

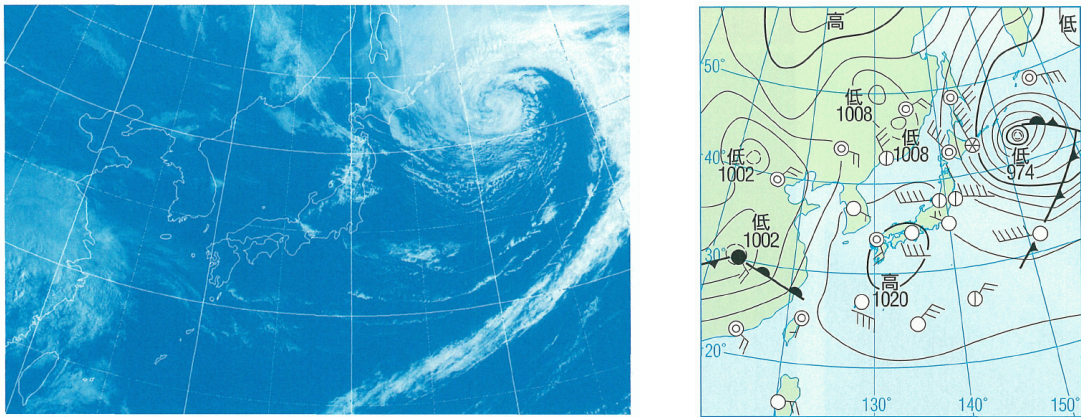


図 1.1: 日本付近に存在する低気圧. 右図は衛星画像. 左図は天気図. 地学図表 (浜島書店) より転載.

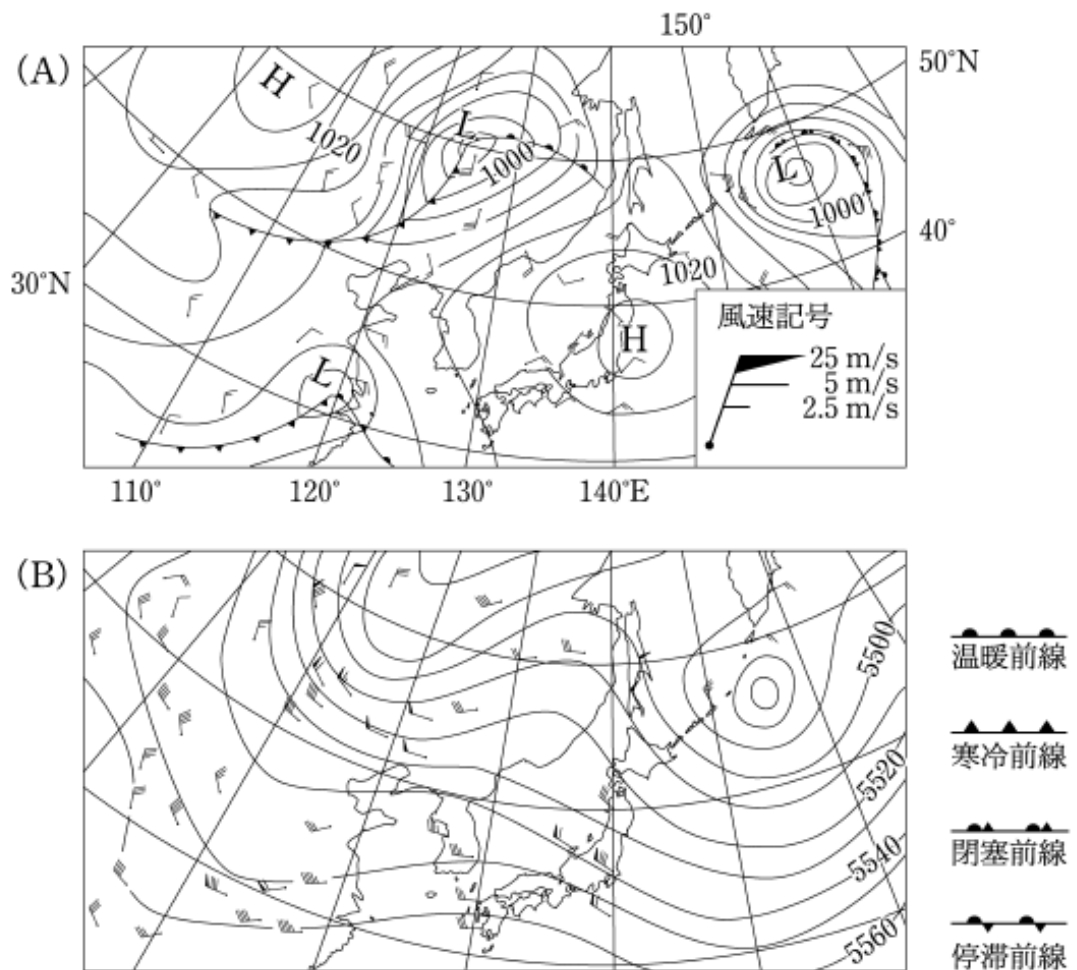


図 1.2: 低気圧が発生している場合の天気図. 地球惑星科学入門 (北海道大学出版会) より転載.

上図は地上天気図. 下図は 500 hPa 高層天気図

第2章 準地衡流方程式

2.1 鉛直座標変換

z 座標を他の鉛直座標に変換する (例: 圧力 p , エントロピー (温位), p/p_s (p_s : 表面気圧)).

もともになる式は, 以下である.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (2.3)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T}. \quad (2.5)$$

ここで, s はエントロピー, Q は熱源, T は温度である.

2.1.1 任意の鉛直座標系への変換

z を $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$ に変換することを考える. ζ は z について一価関数であるとする. 以下, 微分演算子が ζ 系においてどのように表現されるか考える.

水平微分

関数 $f(x, y, z, t)$ が,

$$f(x, y, z, t) = \tilde{f}(x, y, \zeta, t) \quad (2.6)$$

となるように ζ 系へ変数変換されたとする.

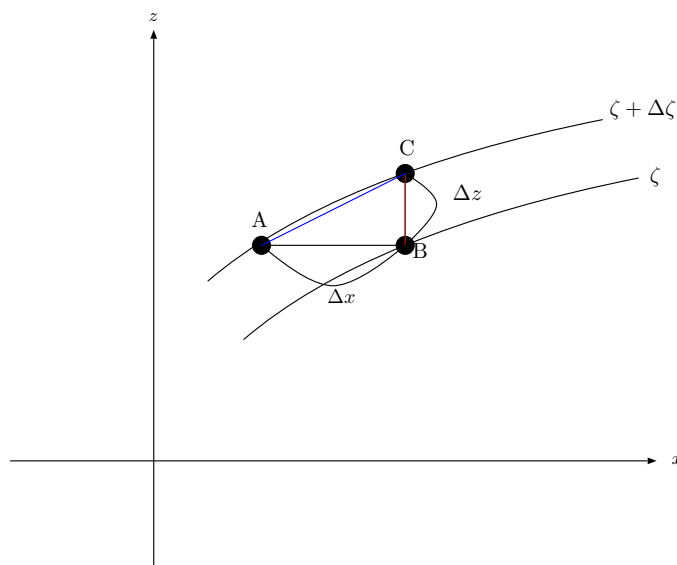


図 2.1: 水平微分の図. z を固定した微分は, 線分 AB に沿っておこなう.

図 2.1.1 を使うと

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right)_\zeta - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta \quad (2.7)$$

が得られる. ここで, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z$ は z 座標系における微分を, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\zeta$ は ζ 座標系における微分をあらわす.

y 微分についても同様に,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z \approx \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)_\zeta - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta \quad (2.8)$$

となる¹. この概略図が図 2.1.1 である.

鉛直微分

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (2.9)$$

¹実際は $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right)_\zeta$ の部分は $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial(AC)}$ としなければならないが $AC \approx \Delta x$ と置いて考えている.

時間微分

x 微分を導く議論において, x を t に置き換えても同様な議論が成り立つ.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\right)_\zeta - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta. \quad (2.10)$$

ラグランジュ微分

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z + u \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z + v \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z + w \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{df}{dt} &= \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)_\zeta - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta - \tilde{w} \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし,

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \tilde{u}(x, y, \zeta, t), \\ v(x, y, z, t) &= \tilde{v}(x, y, \zeta, t), \\ w(x, y, z, t) &= \tilde{w}(x, y, \zeta, t) \end{aligned}$$

である. (2.11) において, $f = \zeta$ とおくと,

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial \zeta}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta - \tilde{w} \right\}. \quad (2.12)$$

(2.11) と (2.12) を組み合わせると,

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)_\zeta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt}. \quad (2.13)$$

これより, ζ 座標系におけるラグランジュ微分を

$$\frac{d}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_\zeta + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (2.14)$$

と定義すれば,

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_z = \left(\frac{df}{dt}\right)_\zeta \quad (2.15)$$

となる.

以上を用いて、基礎方程式を ζ 座標系に書き換えると、

$$\left(\frac{d\tilde{u}}{dt}\right)_\zeta - f\tilde{v} = -\frac{1}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}\right)_\zeta - \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta \right\} + \tilde{F}_x(x, y, \zeta, t), \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{d\tilde{v}}{dt}\right)_\zeta - f\tilde{u} = -\frac{1}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}\right)_\zeta - \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta \right\} + \tilde{F}_y(x, y, \zeta, t). \quad (2.17)$$

静水圧の式は、

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.18)$$

連続の式についてはまず $\text{div}\mathbf{v}$ を ζ 系の表現に書き換える。

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_z \\ &= \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)_\zeta - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)_\zeta - \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta \\ &\quad + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial\zeta} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta + \dot{\zeta} \frac{\partial z}{\partial\zeta} \right\}. \end{aligned}$$

ここで、

$$\nabla_\zeta = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\zeta, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_\zeta, 0 \right), \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, 0) \quad (2.20)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{v} &= \left\{ \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)_\zeta \right\} - \left\{ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta \right\} \\ &\quad + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial\zeta} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta + \dot{\zeta} \frac{\partial z}{\partial\zeta} \right\} \\ &= \nabla_\zeta \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \frac{\partial\zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial\zeta} \left(\tilde{u} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta \right) \\ &\quad + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial\zeta} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta + \dot{\zeta} \frac{\partial z}{\partial\zeta} \right\} \\ &= \nabla_\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial\zeta} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + \dot{\zeta} \frac{\partial z}{\partial\zeta} \right\} = \nabla_\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial\zeta} \frac{\partial z}{\partial t} \right)_\zeta + \frac{\partial}{\partial\zeta} \dot{\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial\zeta} \\ &= \nabla_\zeta \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial\zeta} \right)_\zeta. \quad (2.21) \end{aligned}$$

これにより, 連続の式は,

$$\frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right)_{\zeta} + \nabla_{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{\zeta} = 0. \quad (2.22)$$

これを变形すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \left[\frac{d}{dt} (\ln \tilde{\rho}) \right]_{\zeta} + \left[\frac{d}{dt} \left(\ln \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| \right) \right]_{\zeta} + \nabla_{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left[\ln \left(\rho \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| \right) \right] \right]_{\zeta} + \nabla_{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる. 熱の式は,

$$\tilde{T} \left(\frac{d\tilde{s}}{dt} \right)_{\zeta} = \tilde{Q}(x, y, \zeta, t) \quad (2.24)$$

となる.

2.1.2 $\zeta = p$ の場合 (圧力座標系)

鉛直座標系として p (圧力) を使った方程式は, p 座標系, 圧力座標系の式と呼ばれる. p 座標系だと連続の式が簡単な形になる. 観測では圧力が直接決定されることが多いので, 観測結果との対応をつけやすい.

p 座標系における方程式は以下のようなになる (ティルダは省略).

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_p - fv = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p + F_x, \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_p + fu = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p + F_y, \quad (2.26)$$

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0, \quad (2.27)$$

$$g \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \quad (2.28)$$

$$T \left(\frac{ds}{dt} \right)_p = Q(x, y, p, t). \quad (2.29)$$

ただし, z は等圧力面の高さであり, 時間変化する.

2.1.3 $\zeta = p/p_s$ の場合 (σ 座標系)

鉛直座標系として $\sigma \equiv \frac{p}{p_s}$ を使った方程式は, σ 座標系と呼ばれる. σ 座標系は, 大気大循環モデルで使用されることが多い.

z 座標から σ 座標への微分の変換則は以下ようになる.

$$\left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma, \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial \bullet}{\partial z}\right)_z = \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} = -\frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}, \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{\partial \bullet}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \bullet}{\partial x}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial \bullet}{\partial x}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma, \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{\partial \bullet}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial \bullet}{\partial y}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial \bullet}{\partial y}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\sigma. \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \bullet}{dt}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z + u \left(\frac{\partial \bullet}{\partial x}\right)_z + v \left(\frac{\partial \bullet}{\partial y}\right)_z + w \left(\frac{\partial \bullet}{\partial z}\right)_z \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + u \left(\frac{\partial \bullet}{\partial x}\right)_\sigma + v \left(\frac{\partial \bullet}{\partial y}\right)_\sigma + \dot{\sigma} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\right)_\sigma \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$= \left(\frac{d \bullet}{dt}\right)_\sigma. \quad (2.35)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{dz}{dt}\right). \quad (2.36)$$

σ -座標鉛直速度 $\dot{\sigma}$ は次のように定義される.

$$\dot{\sigma} \equiv \frac{g\sigma}{R^d T_v} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + u \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma + v \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\sigma - w \right\}. \quad (2.37)$$

上記の変換則を用いて, 圧力勾配項を書き換えると以下ようになる.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\sigma + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma \right\} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma \\ &= -\frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{RT\sigma}{p} \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ &= -\frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

これより, 運動方程式は以下ようになる.

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + F_x, \quad (2.39)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} + F_y. \quad (2.40)$$

静力学平衡の式は以下の通り.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} &= -\frac{R^d T_v}{\sigma}, \\ p_s \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= -\rho g. \end{aligned} \quad (2.41)$$

熱力学の式は以下の通り.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R^d T_v}{c_p^d} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\sigma} \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right\} + \frac{Q^*}{c_p^d}. \quad (2.42)$$

熱力学の式は以下のようにも書き換えられる.

$$\frac{dc_p^d T}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + Q^*. \quad (2.43)$$

連続の式は以下の通り.

$$\frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.44)$$

連続の式は以下のようにも書き換えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p_s u) + \frac{\partial}{\partial y} (p_s v) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_s \dot{\sigma}) &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\sigma} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right)_{\sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.2 圧力座標系における準地衡流方程式

鉛直座標として圧力を用いた系において, 準地衡流方程式と呼ばれる近似方程式を導出する.

2.2.1 準地衡流方程式の導出

まず p 座標の方程式からスタートする.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\nabla\Phi, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p}, \quad (2.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (2.48)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) T - S_p \omega = \frac{J}{c_p} \quad (2.49)$$

ただし, $\Phi = gz$ とおいた. Φ はジオポテンシャルと呼ばれる. また, 最後の温度の式は, エントロピーの式を温度で書き換え, エントロピー勾配が次の S_p で与えられる基本場からのずれを考えたものである.

$$S_p \equiv -T \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}. \quad (2.50)$$

最初に地衡流成分と非地衡流成分に分ける.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_a. \quad (2.51)$$

ただし, 地衡流成分は以下のように定義される.

$$\mathbf{v}_g \equiv \frac{1}{f_0} \mathbf{k} \times \nabla \Phi. \quad (2.52)$$

したがって,

$$\mathbf{v}_a \equiv \mathbf{v} - \frac{1}{f_0} \mathbf{k} \times \nabla \Phi \quad (2.53)$$

ということである.

ここで

$$|\mathbf{v}_a|/|\mathbf{v}_g| \sim O(R_o) \ll 1 \quad (2.54)$$

という状況を考える. ここで, R_o はロスビー数である. これですケーリングをしてみると

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \sim \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_g. \quad (2.55)$$

が得られる.

次に中緯度 β 面近似を行う:

$$f = f_0 + \beta y. \quad (2.56)$$

オーダーを見積もってみると

$$\frac{\beta y}{f_0} \sim \frac{\beta L}{f_0} \sim \frac{\cos \phi_0 L}{\sin \phi_0 a} \sim O(R_o) \ll 1. \quad (2.57)$$

ただし, L は南北方向の長さスケールである.

運動方程式のコリオリ項と圧力勾配項は, 地衡流成分の速度を用いて

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{v} + \nabla \Phi = f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a + \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g \quad (2.58)$$

となる. したがって, 運動方程式は次のようになる.

$$\frac{d_g \mathbf{v}_g}{dt} = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a - \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g. \quad (2.59)$$

連続の式は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{v}_g + \mathbf{v}_a) + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0.\end{aligned}\tag{2.60}$$

なぜなら, \mathbf{v}_g は定義により発散成分を持たないからである.

次に, 温度の式について考える. 水平移流は地衡流成分で近似できる. しかし, 通常安定度は大きいので鉛直移流項のオーダは水平移流に匹敵する大きさになるので, 鉛直移流項は消えずに断熱加熱項の中に繰り込まれる. 温度を

$$T_{tot}(x, y, p, t) = T_0(p) + T(x, y, p, t)\tag{2.61}$$

と分けて考えると

$$\begin{aligned}S_p \omega &= -T \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \omega = -(T_0(p) + T(x, y, p, t)) \frac{\partial \ln(\theta_0 + \theta)}{\partial p} \omega \\ &\sim -T_0(p) \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial p} \omega = -\frac{p}{R} \frac{RT_0}{p} \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial p} \omega = -\frac{S_t p}{R} \omega\end{aligned}\tag{2.62}$$

となる. ただし,

$$S_t \equiv -\frac{RT_0}{p} \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial p}\tag{2.63}$$

とおいた. 以上より温度の式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) T + \frac{S_t p}{R} \omega = \frac{J}{c_p}\tag{2.64}$$

となる.

以上より, 準地衡流方程式は以下のようにまとめられる.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p},\tag{2.65}$$

$$\mathbf{v}_g = (u_g, v_g) = \frac{1}{f_0} \mathbf{k} \times \nabla \Phi,\tag{2.66}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial y} = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a - \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g,\tag{2.67}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0,\tag{2.68}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) T + \frac{S_t p}{R} \omega = \frac{J}{c_p}.\tag{2.69}$$

2.2.2 準地衡流渦度方程式

直角座標の場合, 速度の地衡流成分は

$$f_0 v_g = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.70)$$

$$f_0 u_g = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.71)$$

を満たすので, 地衡流成分から計算される渦度は

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi \quad (2.72)$$

運動方程式の回転をとったもの, f の全微分

$$\frac{d_g f}{dt} = \mathbf{v}_g \cdot \nabla f = \beta v_g \quad (2.73)$$

と連続の式を使うと, 渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) (\zeta + \beta y) - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.74)$$

が得られる.

熱力学第1法則は以下のようになる.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial p} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla (\partial \Phi / \partial p) + S_t \omega = 0. \quad (2.75)$$

この式は比容 $\alpha \equiv 1/\rho$ を使って書くこともある. (2.75) に

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \quad (2.76)$$

を代入すると

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \alpha - S_t \omega = 0 \quad (2.77)$$

となる.

また,

$$\psi = \frac{\Phi}{f_0} \quad (2.78)$$

と変数を書き換えることもある.

第3章 2層モデル

3.1 系の設定と基礎方程式

3.1.1 系の設定

p 座標系で考える.

- (i) β 面 (β は一定) において, 鉛直方向に東西方向速度の大きさが変化する場合の流れの安定性を考える.
- (ii) 局所直交座標系を用い, 東西方向に x 軸, 南北方向に y 軸をとる. 鉛直方向には圧力座標を使う.
- (iii) 境界条件として, 地表面 $p = p_s$ と対流圏界面 $p = p_t$ において $\omega = 0$ という条件を考える. x 方向には周期的境界条件を課す.
- (iv) ここでは, 図 3.1 に示したような 2 層モデルを考える. 層の境界は 0,2,4 level (ここでは, 200, 600, 1000 hPa 面を想定する) と呼ぶことにし, そこでは鉛直風を与える. 層の中間の 1,3 level (ここでは, 400, 800 hPa 面を想定する) では, 水平風を与える.
- (v) 鉛直シアーが存在する基本場を与え, そこからのずれ (摂動) を考える. 摂動量は y 方向に一様であると仮定する.

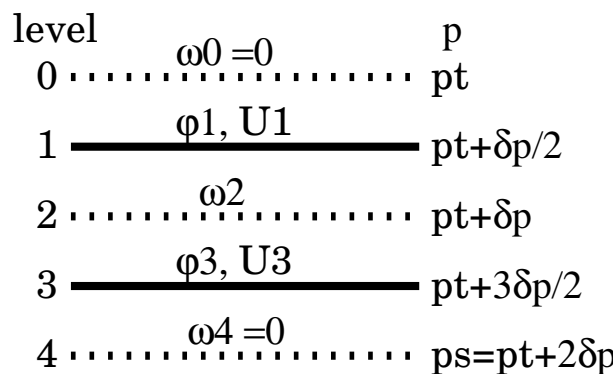


図 3.1: 2層モデル.

3.1.2 基礎方程式

(2層モデルではなく)連続成層における準地衡流の渦度方程式, 熱力学第1法則, 静水圧の式は以下ようになる.¹

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \times \nabla\psi \cdot \nabla\right) (\nabla^2\psi + \beta y) - f_0 \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0, \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \times \nabla\psi \cdot \nabla\right) \frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{S_t}{f_0} \omega = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}. \quad (3.3)$$

ただし,

$$S_t \equiv -\frac{RT_0}{p} \frac{d}{dp} (\ln \theta). \quad (3.4)$$

また, $\psi \equiv \Phi/f_0$ は流線関数. 速度ベクトル, 渦度の関係は以下の通り.

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times \nabla\psi, \quad (3.5)$$

$$(u_g, v_g) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}\right). \quad (3.6)$$

境界条件は, 地表面 $p = p_s$ と対流圏界面 $p = p_t$ において $\omega = 0$ であることである.

¹第2.2節を参照.

3.1.3 準地衡流方程式の2層モデル化

(3.2) と (3.3) の有限差分をとる. 1層, 3層に渦度方程式 (3.2) を使い, 2層に熱力学第1法則 (3.3) を用いる. 微分は中央差分の形で考える.

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)_1 \sim \frac{\omega_2 - \omega_0}{\delta p}, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)_3 \sim \frac{\omega_4 - \omega_2}{\delta p}, \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)_2 \sim \frac{\psi_3 - \psi_1}{\delta p}. \quad (3.9)$$

こうすると2層モデルの基礎方程式は以下ようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla(\nabla^2 \psi_1) + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{f_0}{\delta p} \omega_2, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_3 + \mathbf{v}_3 \cdot \nabla(\nabla^2 \psi_3) + \beta \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = -\frac{f_0}{\delta p} \omega_2, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 - \psi_3) = -\mathbf{v}_2 \cdot \nabla(\psi_1 - \psi_3) + \frac{S_t \delta p}{f_0} \omega_2. \quad (3.12)$$

\mathbf{v}_2 を決定するために必要な ψ_2 は以下のようにして決めることにする.

$$\psi_2 = (\psi_1 + \psi_3)/2. \quad (3.13)$$

これで, ψ_1, ψ_3, ω_2 に関する閉じた方程式系となる.

level 2 における温度の擾乱は, 静水圧の式の摂動方程式

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial p} = -\frac{RT'}{p} \quad (3.14)$$

の差分表現

$$T_2' = f_0(\psi_1 - \psi_3)/[R \ln(p_3/p_1)]. \quad (3.15)$$

から得られる. ただし, $\Phi' = f_0 \psi'$ を使った.

3.2 線型化

3.2.1 線形化

基本場に加え y に独立な擾乱場が存在するとして、物理量を以下のように表現する。

$$\psi_1 = -U_1 y + \psi'_1(x, p, t), \quad (3.16)$$

$$\psi_3 = -U_3 y + \psi'_3(x, p, t), \quad (3.17)$$

$$\omega_2 = \omega'_2(x, p, t). \quad (3.18)$$

これで摂動方程式が次のように得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} = \frac{f_0}{\delta p} \omega'_2, \quad (3.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi'_3}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi'_3}{\partial x} = -\frac{f_0}{\delta p} \omega'_2, \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_m \frac{\partial}{\partial x} \right) (\psi'_1 - \psi'_3) - U_t \frac{\partial}{\partial x} (\psi'_1 + \psi'_3) = \frac{\sigma \delta p}{f_0} \omega'_2. \quad (3.21)$$

境界条件は、地表面 $p = p_s$ と対流圏界面 $p = p_t$ において $\omega' = 0$ 。

ψ_m, ψ_t を次のように定義する。

$$\psi_m \equiv (\psi'_1 + \psi'_3)/2, \quad (3.22)$$

$$\psi_t \equiv (\psi'_1 - \psi'_3)/2. \quad (3.23)$$

更に、 U についても、以下の記号を導入しておく。

$$U_m \equiv (U_1 + U_3)/2, \quad (3.24)$$

$$U_t \equiv (U_1 - U_3)/2. \quad (3.25)$$

ψ_m, ψ_t が満たす式は以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + U_m \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + U_t \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi_m}{\partial x} = 0. \quad (3.26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_m \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x^2} - 2\lambda^2 \psi_t \right) + \beta \frac{\partial \psi_t}{\partial x} + U_t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + 2\lambda^2 \psi_m \right) = 0. \quad (3.27)$$

ここで、以下の量を導入した。

$$\lambda^2 \equiv \frac{f_0^2}{S_t(\delta p)^2}. \quad (3.28)$$

λ は、 L^{-1} のスケールをもつ。

よって、摂動方程式はまとめると以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_m \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi_m}{\partial x} + U_t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (3.29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_m \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x^2} - 2\lambda^2 \psi_t \right) + \beta \frac{\partial \psi_t}{\partial x} + U_t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + 2\lambda^2 \psi_m \right) = 0, \quad (3.30)$$

$$T_2' = \frac{f_0(\psi_1 - \psi_3)}{R \ln(p_3/p_1)}. \quad (3.31)$$

3.2.2 無次元量による表現

ここで、方程式を無次元化した表現を求めておく(しかし、以下の計算では主に有次元方程式を用いる)。線形安定論の結果を図示する際には無次元の表式を用いる。各スケールは次のように選ぶ。

$$\text{長さスケール } (\sqrt{2}\lambda)^{-1}, \quad (3.32)$$

$$\text{速度スケール } \frac{\beta}{2\lambda^2}, \quad (3.33)$$

$$\text{時間スケール } \frac{\sqrt{2}\lambda}{\beta}. \quad (3.34)$$

これより、各量は以下のように無次元化される。

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \tilde{x}, \quad (3.35)$$

$$k = \sqrt{2}\lambda \tilde{k}, \quad (3.36)$$

$$U_t = \frac{\beta}{2\lambda^2} \tilde{U}_t, \quad (3.37)$$

$$\psi = \frac{\beta}{2^{3/2}\lambda^3} \tilde{\psi}, \quad (3.38)$$

$$\omega = \frac{\beta\delta p}{\sqrt{2}\lambda} \tilde{\omega} \quad (3.39)$$

ψ_1 の式 (3.19) を無次元で書くと以下のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\sqrt{2}\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{1}{(\sqrt{2}\lambda)^{-2} 2^{3/2} \lambda^3} \frac{\beta}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial \tilde{x}^2} + \beta \frac{1}{(\sqrt{2}\lambda)^{-1} 2^{3/2} \lambda^3} \frac{\beta}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{\psi}'_1}{\partial \tilde{x}} &= \frac{f_0 \beta \delta p}{\delta p \sqrt{2}\lambda} \tilde{\omega}'_2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial \tilde{\psi}'_1}{\partial \tilde{x}} &= \frac{f_0 \sqrt{2}\lambda}{\beta} \tilde{\omega}'_2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

同様に, ψ_3 の式 (3.20) を無次元で書くと以下のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\sqrt{2}\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{1}{(\sqrt{2}\lambda)^{-2} 2^{3/2} \lambda^3} \frac{\beta}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_3}{\partial \tilde{x}^2} + \beta \frac{1}{(\sqrt{2}\lambda)^{-1} 2^{3/2} \lambda^3} \frac{\beta}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{\psi}'_3}{\partial \tilde{x}} &= -\frac{f_0 \beta \delta p}{\delta p \sqrt{2}\lambda} \tilde{\omega}'_2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_3}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial \tilde{\psi}'_3}{\partial \tilde{x}} &= -\frac{f_0 \sqrt{2}\lambda}{\beta} \tilde{\omega}'_2. \end{aligned}$$

熱の式は次のように無次元化される.

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\sqrt{2}\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_m \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{\beta}{2^{3/2} \lambda^3} (\tilde{\psi}'_1 - \tilde{\psi}_3) - \frac{\beta}{\sqrt{2}\lambda} \tilde{U}_t \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\beta}{2^{3/2} \lambda^3} (\tilde{\psi}'_1 + \tilde{\psi}_3) &= \frac{\sigma \delta p \beta \delta p}{f_0 \sqrt{2}\lambda} \tilde{\omega}'_2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_m \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) (\tilde{\psi}'_1 - \tilde{\psi}_3) - \tilde{U}_t \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{\psi}'_1 + \tilde{\psi}_3) &= \frac{\sigma 2^{3/2} \delta p^2 \lambda^3}{f_0 \beta} \tilde{\omega}'_2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.3 モード解

3.3.1 モード展開

有次元の方程式のモード解を求める.

以下のようにモードの形の解を考える.

$$\psi_m = A e^{ik(x-ct)}, \quad (3.42)$$

$$\psi_t = B e^{ik(x-ct)}. \quad (3.43)$$

これより, 摂動方程式を行列形式で書けば

$$\begin{pmatrix} ck^3 - U_m k^3 + \beta k & -U_t k^3 \\ U_t k (-k^2 + 2\lambda^2) & k(c - U_m)(k^2 + 2\lambda^2) + \beta k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

となる.

3.3.2 分散関係

振幅 A, B がゼロでないならば, (3.44) の係数の行列式は消えなければならない. この条件により, c について以下の2つの解が得られる.

$$c^\pm = U_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \pm \left[\frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4(k^2 + 2\lambda^2)^2} - \frac{(2\lambda^2 - k^2)U_t^2}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2} \quad (3.45)$$

となる. これが分散関係となる.

U_m, U_t を使わないで書けば,

$$c^\pm = \frac{U_1 + U_3}{2} - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \pm \frac{[\lambda^4 \beta^2 - k^4(4\lambda^4 - k^4)(U_1 - U_3)^2]^{1/2}}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \quad (3.46)$$

となる.

根号の中が負となる場合には,

$$c^\pm = c_r \pm i \frac{\sigma}{k} \quad (3.47)$$

という形になる. ここで $\sigma = kc_i$ は成長率である.

3.3.3 中立曲線

安定・不安定の境界を定める条件は, (4.29) の根号が0になるための条件で与えられる. これは,

$$U_t = \frac{\lambda^2 \beta}{k^2 \sqrt{4\lambda^4 - k^4}} \quad (3.48)$$

と得られる.

無次元波数 (3.36), 無次元速度 (3.37) を使えば

$$\tilde{U}_t = \frac{1}{2\tilde{k}^2 \sqrt{1 - \tilde{k}^4}} \quad (3.49)$$

となる. 無次元系における中立曲線の図を 図 3.2 に示す.

不安定境界 (中立曲線) の性質は以下の通り.

- U_t の臨界値

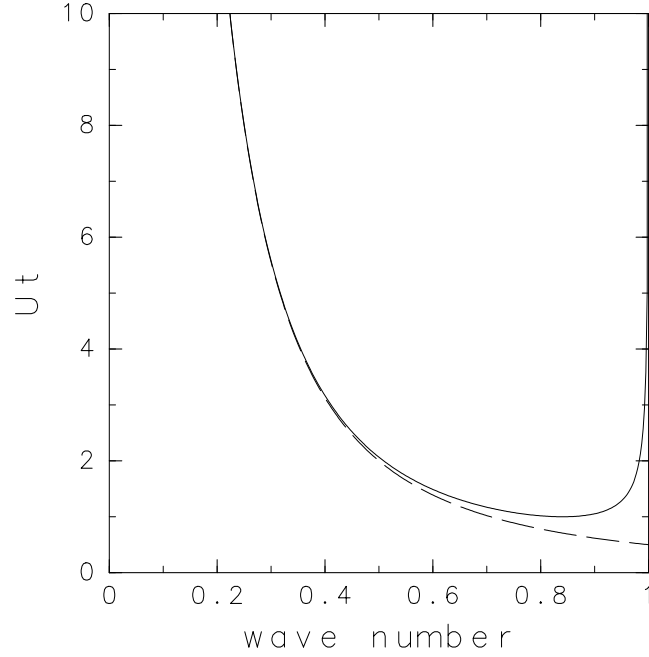


図 3.2: 2層モデルにおける, 中立曲線の図. 横軸は無次元波数 $\tilde{k} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}k$, 縦軸は無次元の鉛直シア $\tilde{U}_t = \frac{2\lambda^2}{\beta}U_t$. 実線が中立曲線, 破線は低波数側の漸近線.

不安定となるための U_t の最小値 (不安定となるための U_t の臨界値) を求める. (3.48) の k に関して微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} U_t &= \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\lambda^2 \beta}{k^2 \sqrt{4\lambda^4 - k^4}} \right) = \frac{-\lambda^2 \beta \left\{ 2k\sqrt{4\lambda^4 - k^4} + k^2 \frac{1}{2} (4\lambda^4 - k^4)^{-1/2} (-4k^3) \right\}}{k^4 (4\lambda^4 - k^4)} \\ &= \frac{-\lambda^2 \beta \{ 2k(4\lambda^4 - k^4) - 2k^5 \}}{k^4 (4\lambda^4 - k^4)^{3/2}} = \frac{-4\lambda^2 \beta k (2\lambda^4 - k^4)}{k^4 (4\lambda^4 - k^4)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

よって, $k = 2^{1/2}\lambda$ の時に, 中立曲線上の U_t は最小値をとる. この最小値が, 不安定が発生する鉛直シアの臨界値を与えることになる. U_t の臨界値は

$$(U_t)_{critical} = \frac{\lambda^2 \beta}{2^{1/2} \lambda^2 \sqrt{4\lambda^4 - 2\lambda^4}} = \frac{\beta}{2\lambda^2} = \frac{\beta S_t \delta p^2}{2f_0^2} \quad (3.51)$$

となる. 不安定鉛直シアの最小値は β と静的安定度の積に比例する.

- 地球大気における値.

地球大気の値を使って $(U_t)_{critical}$ を与える波長を見積もってみる. 地球大気の値として以下を使ってみる.

$$f_0 = 10^{-4} \text{s}^{-1}, \quad (3.52)$$

$$\beta = 1.67 \times 10^{-11} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}, \quad (3.53)$$

$$S_t = 2.1 \times 10^{-6} \quad (3.54)$$

これらの数値と, $\delta p = 400 \text{ hPa}$ を用いると,

$$\lambda \sim \times 10^{-6} \quad (3.55)$$

となる.

これらの数値を用いると, 臨界波長は以下のようになる.

$$\frac{2\pi}{k_{critical}} \sim 3000 \text{km}. \quad (3.56)$$

その値は観測される総観規模の波のものと一致する, とよく教科書には書かれる. これを使うと,

$$(U_t)_{critical} = \frac{\beta}{\lambda^2} = 10 \text{m/sec} \quad (3.57)$$

となり, 400 hPa と 800 hPa の間に 10 m/sec の速度差がある状況に対応する. 地球大気で観測される中緯度のシアーは, 普通この値よりも大きい.

臨界モードの位相速度の値を見積もってみる. 位相速度の式

$$c_r = \frac{U_1 + U_3}{2} - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)}$$

に臨界波数 $k_{critical} = 2^{1/2}\lambda$ を代入すると

$$\begin{aligned} c_{r,critical} &= \frac{U_1 + U_3}{2} - \frac{\beta \{(2^{1/2}\lambda)^2 + \lambda^2\}}{(2^{1/2}\lambda)^2 \{(2^{1/2}\lambda)^2 + 2\lambda^2\}} \\ &= \frac{U_1 + U_3}{2} - \frac{3\beta}{8\lambda^2} \end{aligned}$$

β と λ の値を代入してみると

$$c_r \sim \frac{U_1 + U_3}{2} - \frac{3 \times (1.67 \times 10^{-11})}{8 \times (1.7 \times 10^{-6})^2} \sim \frac{U_1 + U_3}{2} - 2.2 [\text{m sec}^{-1}] \quad (3.58)$$

- 短波側における cutoff

(3.48) からわかるように, 中立曲線では k^4 は絶対に $4\lambda^4$ を越えられない. したがって, 短波側の境界は

$$k = \sqrt{2}\lambda = \frac{\sqrt{2}f_0}{\Delta p S_t^{1/2}} \quad (3.59)$$

で与えられる. これは中立曲線の漸近線にもなっている. 短波の切断 (3.59) は静的安定度で与えられることになる.

cutoff の式は無次元表現では

$$\tilde{k} = 1 \quad (3.60)$$

で与えられる.

- 中立曲線の長波側における漸近線

(3.48) において $k \rightarrow 0$ とすると

$$U_t^2 \sim \frac{\lambda^4 \beta^2}{4k^4 \lambda^4} = \frac{\beta^2}{4k^4} \quad (3.61)$$

なので以下のようなになる.

$$|U_t| = \frac{\beta}{2k^2}. \quad (3.62)$$

この漸近線の式の形は非発散ロスビー波の分散関係

$$c = U - \beta/k^2. \quad (3.63)$$

の第二項と似ており, β 効果の存在によってもたらされるものである. 実際に, 後で考察する $\beta = 0$ の場合では, 長波長側では全ての U_t に対して不安定となる.

(3.62) を無次元変数で書くと以下のようなになる.

$$|\tilde{U}_t| = \frac{1}{2\tilde{k}^2}. \quad (3.64)$$

3.3.4 安定領域のモード

以下の条件が満たされる時, c は実数となる. $k^4 < 4\lambda^4$ の場合には,

$$\begin{aligned} \lambda^4 \beta^2 - k^4 (4\lambda^4 - k^4) U_t^2 &> 0, \\ U_t^2 &< \frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4 (4\lambda^4 - k^4)}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

$k^4 > 4\lambda^4$ の場合には、 U_t の値によらず c は実数となる。

この場合、以下の2つの中立波が解となる。

$$c^+ = U_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} + \left[\frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4(k^2 + 2\lambda^2)^2} - \frac{(2\lambda^2 - k^2)U_t^2}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2}, \quad (3.66)$$

$$c^- = U_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} - \left[\frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4(k^2 + 2\lambda^2)^2} - \frac{(2\lambda^2 - k^2)U_t^2}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2}. \quad (3.67)$$

後でおこなう $U_t = 0$ の場合の考察で明らかになるように、 c^+ は傾圧ロスビー波、 c^- は傾圧ロスビー波に対応する。

3.3.5 不安定領域のモード

$k^4 < 4\lambda^4$ かつ以下の条件が満たされる時、 c は複素数となる。

$$\begin{aligned} \lambda^4 \beta^2 - k^4(4\lambda^4 - k^4)U_t^2 &< 0, \\ U_t^2 &> \frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4(4\lambda^4 - k^4)}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

k^4 が $4\lambda^4$ より小さく、 U_t^2 が十分に大きければ不安定になるということである。この時、2つのモードの c は次のようになる。

$$\begin{aligned} c^+ &= U_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} + i \left[-\frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4(k^2 + 2\lambda^2)^2} + \frac{(2\lambda^2 - k^2)U_t^2}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2}, \\ c^- &= U_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} - i \left[-\frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4(k^2 + 2\lambda^2)^2} + \frac{(2\lambda^2 - k^2)U_t^2}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

c^+ のモードは不安定モード、 c^- のモードは減衰モードである。不安定モードと減衰モードの位相速度は等しく、

$$c_r = U_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)}. \quad (3.70)$$

不安定モードの成長率は

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= k \left[-\frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4(k^2 + 2\lambda^2)^2} + \frac{(2\lambda^2 - k^2)U_t^2}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2} \\ &= \frac{[-\lambda^4 \beta^2 + k^4(4\lambda^4 - k^4)U_t^2]^{1/2}}{k(k^2 + 2\lambda^2)}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.3.6 特殊な場合 1: $U_t = 0$ の場合

$U_t = 0$ の場合を考える. この場合は, 温度風が存在せず平均場の風は順圧的である. この場合では, 不安定が発生せず, 中立モードがどのような種類の波に対応しているかが明確となる.

位相速度は, (4.29) において $U_t = 0$ とすると

$$\begin{aligned}
 c &= U_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \pm \left[\frac{\lambda^4 \beta^2}{k^4(k^2 + 2\lambda^2)^2} \right]^{1/2} \\
 &= U_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \pm \frac{\lambda^2 \beta}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \\
 &= U_m - \frac{\beta k^2}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)}, \quad U_m - \frac{\beta(k^2 + 2\lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \\
 &= U_m - \frac{\beta}{k^2 + 2\lambda^2}, \quad U_m - \frac{\beta}{k^2}
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

となる. 不安定モードは発生しない.

それぞれのモードは以下のようにになっている.

- $c^- = U_m - \frac{\beta}{k^2}$ のモード

これは, y 依存性がない順圧ロスビー波の分散関係である. 固有値方程式から, ψ_t の複素係数 B が 0 になることがわかる. よって, $\psi'_1 = \psi'_3$ となり構造においても順圧的になっていることがわかる. この場合では, $U_m = U_1 = U_3$ となるので, 後で導く (3.93) から $\omega'_2 = 0$ となる.

- $c^+ = U_m - \frac{\beta}{k^2 + 2\lambda^2}$

これは internal baroclinic Rossby wave の位相速度である. 固有値方程式から, ψ_m の複素係数 A が 0 になることがわかる. よって, $\psi'_1 = -\psi'_3$ となり傾圧的な構造を持っていることがわかる. (3.93) から $\omega'_2 \neq 0$ となる.

傾圧モードの位相速度は, 順圧モードの位相速度よりも小さい.

3.3.7 特殊な場合 2: $\beta = 0$ の場合

$\beta = 0$ の場合は, 例えば, 実験室内で上にふたをした流体で重力の方向と回転軸がどこでも平行となる場合に対応する.

- 分散関係
分散関係は, (4.29) において $\beta = 0$ とすると

$$c = U_m \pm |U_t| \left[\frac{(k^2 - 2\lambda^2)}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2} \quad (3.73)$$

となる.

- 中立曲線
分散関係式において根号の中身が0になる条件は

$$k = k_{cutoff} \equiv \sqrt{2}\lambda. \quad (3.74)$$

k_{cutoff} は cutoff wavenumber となる. $k < k_{cutoff}$ の場合は, 0 でない全ての U_t において不安定になる. 地球の回転をゼロにした場合, $\lambda = 0$ となるので不安定が起こらない.

cutoff の波長は

$$L_{cutoff} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{2} \{f_0^2 / \sigma(\delta p)^2\}^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}\sigma\delta p\pi}{f_0} \quad (3.75)$$

となる.

- 不安定モードの成長率
成長率は

$$\omega = ck = U_t k \left[\frac{(k^2 - 2\lambda^2)}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2}. \quad (3.76)$$

成長率は U_t に依存し, U_t が大きくなると成長率も大きくなる.

U_t を固定した時の most unstable mode の波数を求める. そのために

$$\frac{1}{U_t} \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0 \quad (3.77)$$

を満たす k を求める.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{U_t} \frac{\partial \omega}{\partial k} &= \left[\frac{(-k^2 + 2\lambda^2)}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2} \\
&\quad + k \frac{\frac{1}{2} (-k^2 + 2\lambda^2)^{-1/2} (-2k) (k^2 + 2\lambda^2)^{1/2} - (-k^2 + 2\lambda^2)^{1/2} \frac{1}{2} (k^2 + 2\lambda^2)^{-1/2} (2k)}{(k^2 + 2\lambda^2)} \\
&= \left[\frac{(k^2 - 2\lambda^2)}{(k^2 + 2\lambda^2)} \right]^{1/2} \\
&\quad - k^2 \frac{(-k^2 + 2\lambda^2)^{-1/2} (k^2 + 2\lambda^2)^{1/2} + (-k^2 + 2\lambda^2)^{1/2} (k^2 + 2\lambda^2)^{-1/2}}{(k^2 + 2\lambda^2)} \\
&= \frac{(-k^2 + 2\lambda^2)^{1/2} (k^2 + 2\lambda^2)^{1/2} - k^2 (-k^2 + 2\lambda^2)^{-1/2} (k^2 + 2\lambda^2)^{1/2} - k^2 (-k^2 + 2\lambda^2)^{1/2} (k^2 + 2\lambda^2)^{-1/2}}{(k^2 + 2\lambda^2)} \\
&= \frac{(-k^2 + 2\lambda^2) (k^2 + 2\lambda^2) - k^2 (k^2 + 2\lambda^2) - k^2 (-k^2 + 2\lambda^2)}{(k^2 + 2\lambda^2)^{3/2} (-k^2 + 2\lambda^2)^{1/2}} \tag{3.78}
\end{aligned}$$

この分子だけ取り出すと

$$\begin{aligned}
&(-k^2 + 2\lambda^2) (k^2 + 2\lambda^2) - k^2 (k^2 + 2\lambda^2) - k^2 (-k^2 + 2\lambda^2) \\
&= -k^4 + 4\lambda^4 - k^2 (k^2 + 2\lambda^2 - k^2 + 2\lambda^2) \\
&= -k^4 + 4\lambda^4 - 4\lambda^2 k^2
\end{aligned}$$

これを 0 にする k は

$$k^4 + 4\lambda^2 k^2 - 4\lambda^4 = 0 \tag{3.79}$$

を満たす. 解を求めると

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{-4\lambda^2 \pm \sqrt{16\lambda^4 + 16\lambda^4}}{2} = -2\lambda^2 \pm 2\sqrt{2}\lambda^2, \\
k &= (2\sqrt{2} - 2)^{1/2} \lambda \tag{3.80}
\end{aligned}$$

ここで, k は実数なので復号の負は捨てた. most unstable mode の k も U_t によらない.

- 安定モードの位相速度

分散関係は, $k^2 > \lambda^2$ の条件下で

$$c = U_m \pm U_t \left(\frac{k^2 - 2\lambda^2}{k^2 + 2\lambda^2} \right) \tag{3.81}$$

3.4 波の構造

3.4.1 係数 A, B の関係

係数 A と B の関係は,

$$(k^3 c - U_m k^3 + \beta k)A - U_t k^3 B = 0 \quad (3.82)$$

または

$$U_t k \left(-k^2 + 2\lambda^2 \right) A + \left\{ k(c - U_m) \left(k^2 + 2\lambda^2 \right) + \beta k \right\} B = 0 \quad (3.83)$$

で与えられる. (3.82) を使うと,

$$B = \frac{k^3 c - U_m k^3 + \beta k}{U_t k^3} A = \frac{k^2 c - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} A. \quad (3.84)$$

3.4.2 ψ_1 と ψ_3 の構造

ψ_m の構造をもとにして, 各物理量の構造を決定する.

ψ_m は,

$$\psi_m^\pm = \Re \left[A e^{ik(x-c^\pm t)} \right]. \quad (3.85)$$

ψ_t は, (3.84) から,

$$\psi_t = \frac{ck^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} A e^{ik(x-ct)}. \quad (3.86)$$

ψ_1, ψ_3 は

$$\psi_1'(x, t) = \psi_m + \psi_t = \left(1 + \frac{ck^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) e^{\sigma t} A e^{ik(x-c_r t)}, \quad (3.87)$$

$$\psi_3'(x, t) = \psi_m - \psi_t = \left(1 - \frac{ck^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) e^{\sigma t} A e^{ik(x-c_r t)}. \quad (3.88)$$

(3.87), (3.88) の実部をとった形を求めておく. 位相を

$$\theta = k(x - c_r t) \quad (3.89)$$

としておく。このとき、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\psi'_1(x,t) &= \left\{ 1 + \frac{(c_r + ic_i^\pm)k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right\} e^{\sigma t} (A_r + iA_i)(\cos \theta + i \sin \theta) \\
&= \left[\left(1 + \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) + i \frac{c_i}{U_t} \right] e^{\sigma t} [A_r \cos \theta - A_i \sin \theta + iA_i \cos \theta + iA_r \sin \theta] \\
&= \left[\left(1 + \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) \right] e^{\sigma t} (A_r \cos \theta - A_i \sin \theta) - \frac{c_i^\pm}{U_t} e^{\sigma t} (A_i \cos \theta + A_r \sin \theta), \\
\psi'_3(x,t) &= \left\{ 1 - \frac{(c_r + ic_i^\pm)k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right\} e^{\sigma t} (A_r + iA_i)(\cos \theta + i \sin \theta) \\
&= \left[\left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) - i \frac{c_i^\pm}{U_t} \right] e^{\sigma t} [A_r \cos \theta - A_i \sin \theta + iA_i \cos \theta + iA_r \sin \theta] \\
&= \left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) e^{\sigma t} (A_r \cos \theta - A_i \sin \theta) + \frac{c_i^\pm}{U_t} e^{\sigma t} (A_i \cos \theta + A_r \sin \theta).
\end{aligned}$$

3.4.3 ψ'_1 と ψ'_3 の位相関係

ψ'_1 と ψ'_3 の位相関係を求めておく。そのために、(3.87) と (3.88) の比をとる。

$$\begin{aligned}
\frac{\psi'_1}{\psi'_3} &= \frac{c - (U_3 - \beta/k^2)}{c - (U_1 - \beta/k^2)} = \frac{c_r \pm i \frac{\sigma}{k} - (U_3 - \beta/k^2)}{c_r \pm i \frac{\sigma}{k} - (U_1 - \beta/k^2)} \\
&= \frac{\{c_r - (U_3 - \beta/k^2) \pm i \frac{\sigma}{k}\} \{c_r - (U_1 - \beta/k^2) \mp i \frac{\sigma}{k}\}}{\{c_r - (U_1 - \beta/k^2) \pm i \frac{\sigma}{k}\} \{c_r - (U_3 - \beta/k^2) \mp i \frac{\sigma}{k}\}} \\
&= \frac{\{c_r - (U_3 - \beta/k^2) \pm i \frac{\sigma}{k}\} \{c_r - (U_1 - \beta/k^2) \mp i \frac{\sigma}{k}\}}{\{c_r - (U_1 - \beta/k^2)\}^2 - i^2 \frac{\sigma^2}{k^2}} \tag{3.90}
\end{aligned}$$

この式の分子は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&\{c_r - (U_3 - \beta/k^2) \pm i \frac{\sigma}{k}\} \{c_r - (U_1 - \beta/k^2) \mp i \frac{\sigma}{k}\} \\
&= \{c_r - (U_3 - \beta/k^2)\} \{c_r - (U_1 - \beta/k^2)\} \\
&\quad \pm i \frac{\sigma}{k} \{c_r - (U_1 - \beta/k^2)\} \mp i \frac{\sigma}{k} \{c_r - (U_3 - \beta/k^2)\} - i^2 \frac{\sigma^2}{k^2} \\
&= (c_r - U_3 + \beta/k^2) (c_r - U_1 + \beta/k^2) \mp i \frac{\sigma}{k} U_1 \pm i \frac{\sigma}{k} U_3 + \frac{\sigma^2}{k^2} \\
&= (c_r + \beta/k^2)^2 - (U_1 + U_3) (c_r + \beta/k^2) + U_1 U_3 \mp i \frac{\sigma}{k} (U_1 - U_3) + \frac{\sigma^2}{k^2} \\
&= \left(c_r + \beta/k^2 - \frac{1}{2}(U_1 + U_3) \right)^2 - \frac{1}{4}(U_1 - U_3)^2 \mp i \frac{\sigma}{k} (U_1 - U_3) + \frac{\sigma^2}{k^2}
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\psi'_1}{\psi'_3} = \frac{\{c_r + \beta/k^2 - \frac{1}{2}(U_1 + U_3)\}^2 - \frac{1}{4}(U_1 - U_3)^2 \mp i\frac{\sigma}{k}(U_1 - U_3) + \frac{\sigma^2}{k^2}}{\{c_r - (U_1 - \beta/k^2)\}^2 + \frac{\sigma^2}{k^2}}. \quad (3.91)$$

中立波の場合, $\sigma = 0$ となるので

$$\frac{\psi'_1}{\psi'_3} = -\frac{c_r - (U_3 - \beta/k^2)}{c_r - (U_1 - \beta/k^2)}. \quad (3.92)$$

3.4.4 ω_2 と ψ_3 の位相関係

ω_2 は, (3.20) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_3 \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \psi'_3}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi'_3}{\partial x} &= -\frac{f_0}{\delta p} \omega'_2, \\ (-ick + U_3 \cdot ik)(-k^2)\psi'_3 + \beta(ik)\psi'_3 &= -\frac{f_0}{\delta p} \omega'_2, \\ (ick^3 - iU_3k^3 + i\beta k)\psi'_3 &= -\frac{f_0}{\delta p} \omega'_2, \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \omega'_2 &= -i\frac{\delta p}{f_0}k^3 \left[c_r \pm i\frac{\sigma}{k} - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right] \psi'_3 = \frac{\delta p}{f_0}k^3 \left[-ic_r \pm \frac{\sigma}{k} + i \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right] \psi'_3 \\ &= \frac{\delta p}{f_0}k^3 \left[\pm \frac{\sigma}{k} - i \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \right] \psi'_3. \end{aligned} \quad (3.93)$$

$\sigma = 0$ の場合は,

$$\omega'_2 = -i\frac{\delta p}{f_0}k^3 \left[c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right] \psi'_3. \quad (3.94)$$

3.4.5 ω_2 の構造

前節で導いた

$$\omega_2^{\pm} = \frac{\delta p}{f_0}k^3 \left[\pm \frac{\sigma}{k} - i \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \right] \psi_3^{\pm}$$

の式から

$$\begin{aligned}
\omega_2^{\pm} &= \frac{\delta p}{f_0} k^3 \left[\frac{\sigma^{\pm}}{k} - i \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \right] \left[\left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) - i \frac{c_i^{\pm}}{U_t} \right] \\
&\quad e^{\sigma t} [A_r \cos \theta - A_i \sin \theta + i A_i \cos \theta + i A_r \sin \theta] \\
&= \frac{\delta p}{f_0} k^3 \left[\frac{\sigma^{\pm}}{k} \left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) - i \frac{\sigma^{\pm} c_i^{\pm}}{k U_t} \right. \\
&\quad \left. - i \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) + \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \frac{c_i^{\pm}}{U_t} \right] \\
&\quad e^{\sigma t} [A_r \cos \theta - A_i \sin \theta + i A_i \cos \theta + i A_r \sin \theta] \\
&= \frac{\delta p}{f_0} k^3 \left[\frac{\sigma^{\pm}}{k} \left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) + \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \frac{c_i^{\pm}}{U_t} \right. \\
&\quad \left. - i \frac{\sigma^{\pm 2}}{k^2 U_t} - i \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) \right] \\
&\quad e^{\sigma t} [A_r \cos \theta - A_i \sin \theta + i A_i \cos \theta + i A_r \sin \theta] \\
&= \frac{\delta p}{f_0} k^3 e^{\sigma t} \left[\left[\frac{\sigma^{\pm}}{k} \left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) + \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \frac{c_i^{\pm}}{U_t} \right] (A_r \cos \theta - A_i \sin \theta) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\sigma^{\pm 2}}{k^2 U_t} + \left\{ c_r - \left(U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right\} \left(1 - \frac{c_r k^2 - U_m k^2 + \beta}{U_t k^2} \right) \right] (A_i \cos \theta + A_r \sin \theta) \right].
\end{aligned}$$

3.4.6 T_2' の構造

T_2' の構造は上の ψ_1' と ψ_3' から以下のように決定される.

$$T_2' = \frac{f_0}{R \ln(p_3/p_1)} (\psi_1 - \psi_3). \quad (3.95)$$

3.4.7 中立モードの構造

中立波は, c を (複素数ではなく) 実数として持ち, $c^+ > c^-$ を満たす. この場合, (3.91) 右辺の係数は実数であることから, ψ_1 と ψ_3 は同位相か, 位相差 180° であることがわかる. また (3.93) から, ω_2' は ψ_3 とは位相が 90° ずれていることがわかる.

波長の短い中立的な波の場合, (3.46) における β/μ^2 のオーダーの項は落すことが

できる. このようにした結果, (3.46) は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
 c^\pm &\sim \frac{U_1 + U_3}{2} \pm \frac{[-k^4(4\lambda^4 - k^4)(U_1 - U_3)^2]^{1/2}}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \\
 &= \frac{U_1 + U_3}{2} \pm \left[\frac{k^4(k^4 - 4\lambda^4)(U_1 - U_3)^2}{k^4(k^2 + 2\lambda^2)^2} \right]^{1/2} \\
 &= \frac{U_1 + U_3}{2} \pm \left[\frac{(k^2 - 2\lambda^2)(U_1 - U_3)^2}{k^2 + 2\lambda^2} \right]^{1/2}. \tag{3.96}
 \end{aligned}$$

3.4.8 不安定モードの構造

不安定な場合における, $\psi_1, \psi_3, \omega'_2, T'_2$ の構造を 図 3.3 に示す.

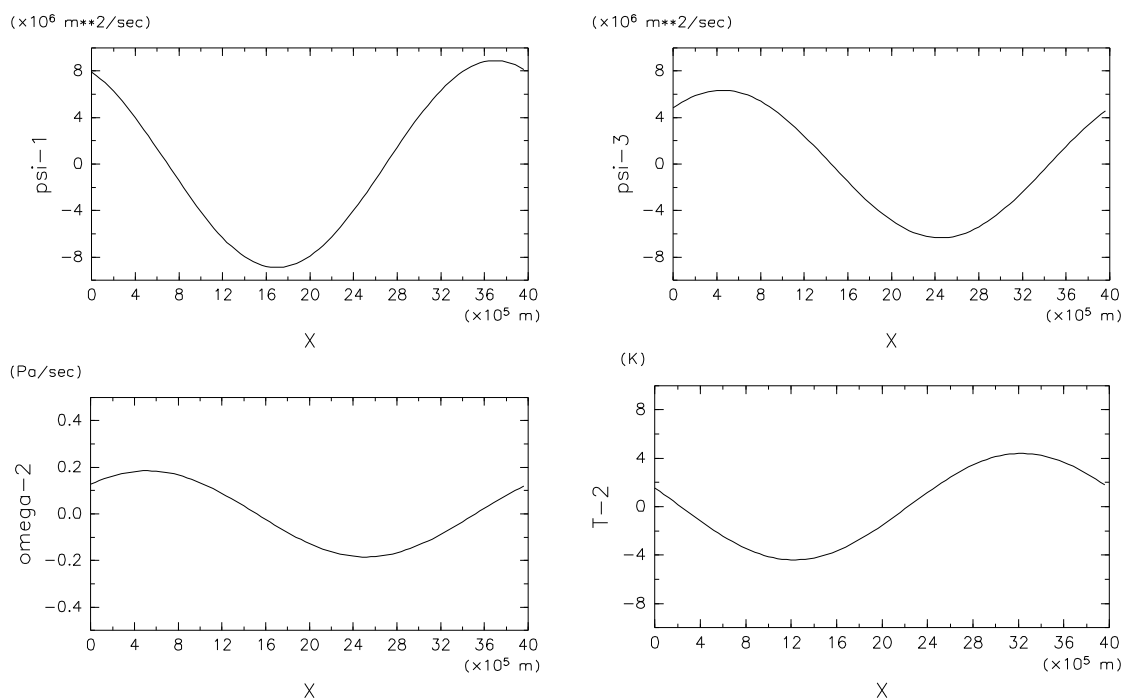


図 3.3: 不安定波の構造. 上から順に, $\psi_1, \psi_3, \omega_2, T_2$.

図から, 擾乱の構造は高度と共に西に傾いていることがわかる. また, 上の層の擾乱の振幅の方が大きいことが分かる. 気圧の谷の前面で上昇運動が起こっている.

第4章 Eady 問題

4.1 はじめに

ここでは Eady 問題 (イーディー問題) の解説をおこなう。Eady 問題とは風速が鉛直分布を持つ傾圧大気における、最も簡単な不安定問題である。その解は Eady(1949)¹ によって求められた。

4.2 系の設定と基礎方程式

4.2.1 系の設定

p 座標系で考える。系の設定は図の通り。Eady 問題として以下の仮定をおく。

- (i) f 面上での運動を仮定する: $\beta = 0$.
- (ii) 運動は剛体壁に挟まれた水路状領域内で起こる。下部境界は地表に対応し、上部境界は大気上端に対応する²。南北方向にも壁をおく。領域は東西方向には無限に伸びていると考える。系の設定を 図 4.1 に示す。
- (iii) 流体の成層は一様であるとする。これから、流体の安定度は一定。
- (iv) 基本場の鉛直シアーは一定として、 p に関する 2 階微分は 0 であるとする:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p^2} = 0$$

¹参考文献

Eady, E. T., 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, no. 3, 33-52.

² z 座標系で考えるときは、高度一定の対流圏界面に対応させる。

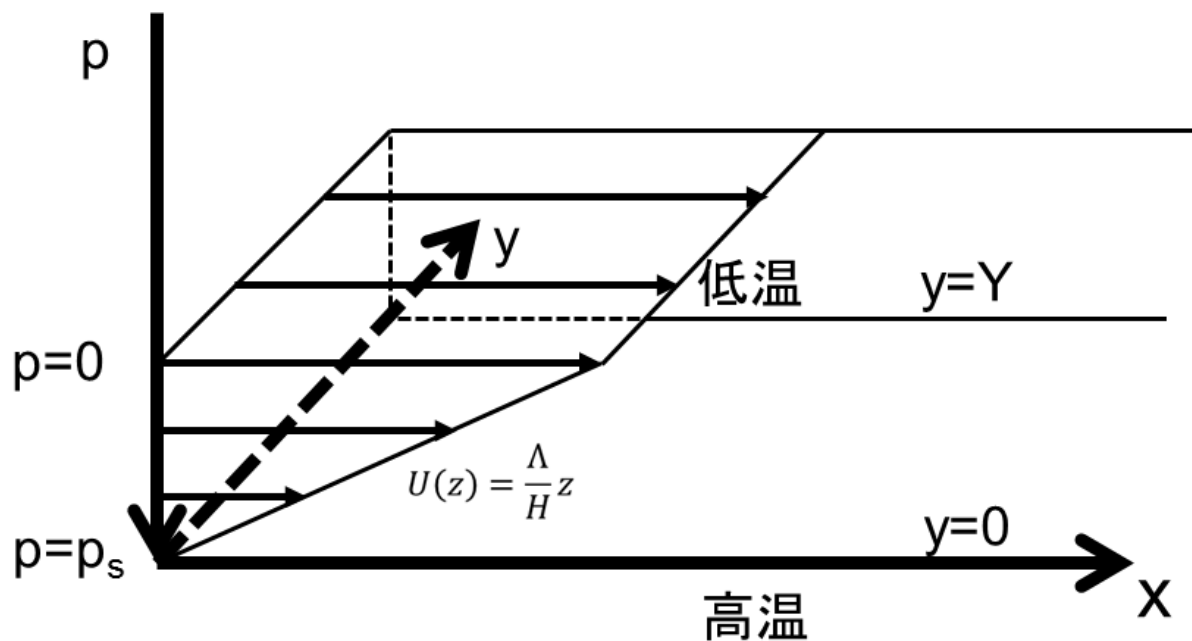


図 4.1: イーデー問題で考える系の設定.

4.2.2 基礎方程式

基礎方程式として, p 座標系の準地衡流渦度方程式を用いる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \zeta - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (4.1)$$

$$\zeta = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \alpha - S_t \omega = 0. \quad (4.3)$$

ただし,

$$\mathbf{v}_g = (u_g, v_g) = \frac{1}{f_0} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (4.4)$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial p}. \quad (4.5)$$

ここで, $\phi = f_0 \psi$ である. f_0 はコリオリパラメータの代表値である. また, S_t は大気
の安定度の指標であり

$$S_t \equiv -\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial p} \ln \bar{\theta} \quad (4.6)$$

で与えられる。 $\bar{\theta}$ は一般場の温位の値, α は比容. 仮定 (iii) により, S_t は気圧 p によらない.

境界条件は

$$v_g = 0 \quad (y = \pm Y), \quad (4.7)$$

$$\omega = 0 \quad (p = 0, p_s). \quad (4.8)$$

4.2.3 補足：ポテンシャル渦度方程式

渦度方程式および温度の式からポテンシャル渦度方程式を導いておく. (4.3) を ϕ で書き換えると

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + S_t \omega = 0$$

これを p で微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + S_t \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

となる. 左辺の第二項を取りだすと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} &= \frac{\partial u_g}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\partial v_g}{\partial p} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial p} \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, 消えるので, 温度の式を p 微分したものは

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + S_t \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

となる. これを渦度方程式 (4.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \zeta + \frac{f_0}{S_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} \right\} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \left(\nabla^2 \phi + \frac{f_0}{S_t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

となる. この式がこの系におけるポテンシャル渦度方程式である.

4.3 摂動解

4.3.1 基本場と摂動への分解

以下のように物理量を基本場の量と摂動量に分解する.

$$\begin{aligned} u &= \bar{U}(p) + u', \\ v &= v', \\ \omega &= \omega', \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \alpha'. \end{aligned}$$

基本場の速度は, 東西風のみが存在し, しかもそれは鉛直座標のみの関数とする.

基本場として, 温度風平衡した状態を考える.

$$f_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \quad (4.9)$$

4.3.2 摂動方程式

以下, 地衡流成分を表す添字の g はとってしまふことにする. 2 次の微小量を見捨てる. 摂動方程式は

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0, \quad (4.10)$$

$$\zeta' = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi', \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} - S_t \omega' = 0, \quad (4.12)$$

$$\alpha' = -\frac{\partial \phi'}{\partial p}, \quad (4.13)$$

境界条件は

$$v'_g = 0 \quad (y = \pm Y), \quad (4.14)$$

$$\omega' = 0 \quad (p = 0, p_s) \quad (4.15)$$

となる.

ω' を消去して, ϕ' の式を作る. まず, ζ', α' を全部 ϕ' で書き換える. 渦度方程式は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \phi' - f_0^2 \frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0. \quad (4.16)$$

温度の式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi'}{\partial x} f_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} - S_t \omega' &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} - S_t \omega' &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる. (4.17) を p で微分すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial^2 \phi'}{\partial p^2} \right) + \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p^2} - S_t \frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0.$$

$\frac{\partial \bar{U}}{\partial p}$ が p に対して一定であることを使うと, $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p^2} = 0$ となるので,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial^2 \phi'}{\partial p^2} \right) - S_t \frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0.$$

これを渦度方程式 (4.16) に代入すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \phi' + f_0^2 \left\{ \frac{1}{S_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial p^2} \right) \right\} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\nabla^2 \phi' + \frac{f_0^2}{S_t} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \phi' \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

が得られる. これはポテンシャル渦度の摂動方程式に対応するものである.

境界条件を, (4.5), 基本場の温度風平衡の式 (4.9), (4.12) を使って書き換えると,

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0 \quad (y = \pm Y), \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0 \quad (p = 0, p_s). \quad (4.20)$$

4.3.3 解構造の仮定

解の構造を仮定する.

$$\phi' = \sum_{k,l} \Re[\Phi(p) e^{ik(x-ct)}] \cos ly, \quad l = \frac{n\pi}{2Y} (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.21)$$

この形の解を仮定すれば, (4.19) の境界条件は自動的に満たされる.

波動解 (4.21) をポテンシャル渦度の式 (4.18) に代入すると

$$\begin{aligned} (-ikc + ik\bar{U}) \left\{ (-k^2 - l^2)\Phi + \frac{f_0^2}{S_t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} \right\} &= 0, \\ k(\bar{U} - c) \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} - \frac{S_t}{f_0^2} (k^2 + l^2)\Phi \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる. ここでは, $\bar{U} - c \neq 0$ の場合についてのみ考えることにすると

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} - \frac{S_t}{f_0^2} (k^2 + l^2)\Phi = 0$$

が得られる.

波動解 (4.21) を境界条件 (4.20) に代入すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \frac{\partial \phi'}{\partial x} &= 0 \quad (p = 0, p_s), \\ (-ikc + ik\bar{U}) \frac{\partial \Phi}{\partial p} + ik \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \Phi &= 0 \quad (p = 0, p_s), \\ (\bar{U} - c) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \Phi &= 0 \quad (p = 0, p_s) \end{aligned}$$

よって, まとめると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} - \frac{S_t}{f_0^2} (k^2 + l^2)\Phi &= 0, \\ (\bar{U} - c) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \Phi &= 0 \quad (p = 0, p_s) \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\kappa \equiv \frac{P_s}{|f_0|} \{S_t(k^2 + l^2)\}^{1/2} = L_d(k^2 + l^2)^{1/2} \quad (4.23)$$

とおくと (L_d は変形半径),

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} - \frac{\kappa^2}{P_s^2} \Phi = 0, \quad (4.24)$$

$$(\bar{U} - c) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \Phi = 0 \quad (p = 0, p_s). \quad (4.25)$$

4.3.4 モード解

(4.24) の解は

$$\Phi = A \sinh \kappa \frac{p}{p_s} + B \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \quad (4.26)$$

と表される³. 波動解 (4.26) を $p = 0$ の境界条件の式に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \left\{ \bar{U}(0) - c \right\} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ A \sinh \kappa \frac{p}{p_s} + B \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}_{p=0} \\ & - \left\{ \bar{U}(p_s) - \bar{U}(0) \right\} \left\{ A \sinh \kappa \frac{p}{p_s} + B \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}_{p=0} = 0, \\ & \left\{ \bar{U}(0) - c \right\} \left\{ A \kappa \cosh \kappa \frac{p}{p_s} + B \kappa \sinh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}_{p=0} \\ & - \left\{ \bar{U}(p_s) - \bar{U}(0) \right\} \left\{ A \kappa \sinh \kappa \frac{p}{p_s} + B \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}_{p=0} = 0 \\ & \left\{ \bar{U}(0) - c \right\} A \kappa - \left\{ \bar{U}(p_s) - \bar{U}(0) \right\} B = 0. \end{aligned}$$

ここで,

$$\tilde{U} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \bar{U}(0) + \bar{U}(p_s) \right\}, \quad (4.27)$$

$$\Delta U \equiv \frac{1}{2} \left\{ \bar{U}(0) - \bar{U}(p_s) \right\} \quad (4.28)$$

とおくと,

$$(\tilde{U} - c + \Delta U) \kappa A + 2 \Delta U B = 0$$

が得られる.

³双曲線関数の定義は以下の通りである.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

微分は次のようになる.

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x.$$

波動解 (4.26) を p_s の境界条件の式に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \left\{ \bar{U}(p_s) - c \right\} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ A \sinh \kappa \frac{p}{p_s} + B \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}_{p=p_s} \\ & - \left\{ \bar{U}(p_s) - \bar{U}(0) \right\} \left\{ A \sinh \kappa \frac{p}{p_s} + B \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}_{p=p_s} = 0, \\ & \left\{ \bar{U}(p_s) - c \right\} \left\{ A \kappa \cosh \kappa \frac{p}{p_s} + B \kappa \sinh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}_{p=p_s} \\ & - \left\{ \bar{U}(p_s) - \bar{U}(0) \right\} \left\{ A \sinh \kappa \frac{p}{p_s} + B \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}_{p=p_s} = 0, \\ & \left\{ \bar{U}(p_s) - c \right\} \kappa (A \cosh \kappa + B \sinh \kappa) - \left\{ \bar{U}(p_s) - \bar{U}(0) \right\} (A \sinh \kappa + B \cosh \kappa) = 0, \\ & (\tilde{U} - c - \Delta U) \kappa (A \cosh \kappa + B \sinh \kappa) + 2\Delta U (A \sinh \kappa + B \cosh \kappa) = 0 \end{aligned}$$

まとめると,

$$\begin{aligned} & (\tilde{U} - c + \Delta U) \kappa A + 2\Delta U B = 0, \\ & (\tilde{U} - c - \Delta U) \kappa (A \cosh \kappa + B \sinh \kappa) + 2\Delta U (A \sinh \kappa + B \cosh \kappa) = 0. \end{aligned}$$

これから, 行列形式で書けば,

$$\begin{pmatrix} (\tilde{U} - c + \Delta U) \kappa & 2\Delta U \\ (\tilde{U} - c - \Delta U) \kappa \cosh \kappa + 2\Delta U \sinh \kappa & (\tilde{U} - c - \Delta U) \kappa \sinh \kappa + 2\Delta U \cosh \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

自明でない解 (A も B も 0 にならない解) が存在するためには, 行列式が 0 にならなければならない. よって

$$\begin{aligned} & \{(\tilde{U} - c + \Delta U) \kappa\} \cdot \{(\tilde{U} - c - \Delta U) \kappa \sinh \kappa + 2\Delta U \cosh \kappa\} \\ & - 2\Delta U \{(\tilde{U} - c - \Delta U) \kappa \cosh \kappa + 2\Delta U \sinh \kappa\} = 0 \end{aligned}$$

となる. ここで

$$X \equiv c - \tilde{U}$$

とおくと

$$\begin{aligned} & \{(-X + \Delta U) \kappa\} \cdot \{(-X - \Delta U) \kappa \sinh \kappa + 2\Delta U \cosh \kappa\} \\ & - 2\Delta U \{(-X - \Delta U) \kappa \cosh \kappa + 2\Delta U \sinh \kappa\} = 0, \\ & \kappa^2 \{X^2 - (\Delta U)^2\} \sinh \kappa + 2\kappa(-X + \Delta U) \Delta U \cosh \kappa \\ & - 2\kappa \Delta U (-X - \Delta U) \cosh \kappa - 4(\Delta U)^2 \sinh \kappa = 0, \\ & \kappa^2 (\sinh \kappa) X^2 = \kappa^2 (\Delta U)^2 \sinh \kappa - 4\kappa (\Delta U)^2 \cosh \kappa + 4(\Delta U)^2 \sinh \kappa, \\ & X^2 = (\Delta U)^2 \left(1 - \frac{4}{\kappa} \coth \kappa + \frac{4}{\kappa^2} \right). \end{aligned}$$

これから、以下のように分散関係が得られる。

$$c = \tilde{U} \pm \Delta U \left(1 - 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} + \frac{4}{\kappa^2} \right)^{1/2} \quad (4.29)$$

4.3.5 分散関係の図

$\tilde{U}(p_s) = 0$ の場合に分散曲線の図を描く。図を描く際には、無次元量を用いる。

無次元化を以下のように行う。上付きの * が無次元量を表す。

$$\begin{aligned} t &= f_o^{-1} t^*, \\ (x, y) &= L_d (x^*, y^*), \\ (u, v) &= L_d f_o (u^*, v^*), \\ (k, l) &= L_d^{-1} (k^*, l^*), \\ \phi &= (f_o L_d)^2 \phi^*, \\ p &= p_s p^*, \\ \alpha &= \frac{(f_o L_d)^2}{p_s} \alpha^*, \\ \omega &= f_o p_s \omega^*. \end{aligned}$$

ただし、 $L_d = \frac{p_s S t^{1/2}}{|f_o|}$ 。係数 A は ϕ の次元をもつので、 ϕ と同様に無次元化する。

分散関係を無次元化すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \kappa &= \{k^{*2} + l^{*2}\}^{1/2}, \\ c^* &= \tilde{U}^* \pm \Delta U^* \left(1 - 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} + \frac{4}{\kappa^2} \right)^{1/2}, \\ k^* c_i^* &= \pm k^* \Delta U^* \left(-1 + 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} - \frac{4}{\kappa^2} \right)^{1/2} \quad \text{for } 1 - 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} + \frac{4}{\kappa^2} < 0 \end{aligned}$$

$\tilde{U}^*(p_s) = 0$, $\tilde{U}^*(0) = 1$ とおくと、 $\Delta U^* = 0.5 \tilde{U}^*(0)$, $\tilde{U}^* = 0.5 \tilde{U}^*(0)$ となる。

k と l を与えて、位相速度、成長率を図にしたものが図 4.2 である。

4.3.6 分散関係から得られる結果

- 不安定が起こる条件 (cutoff)

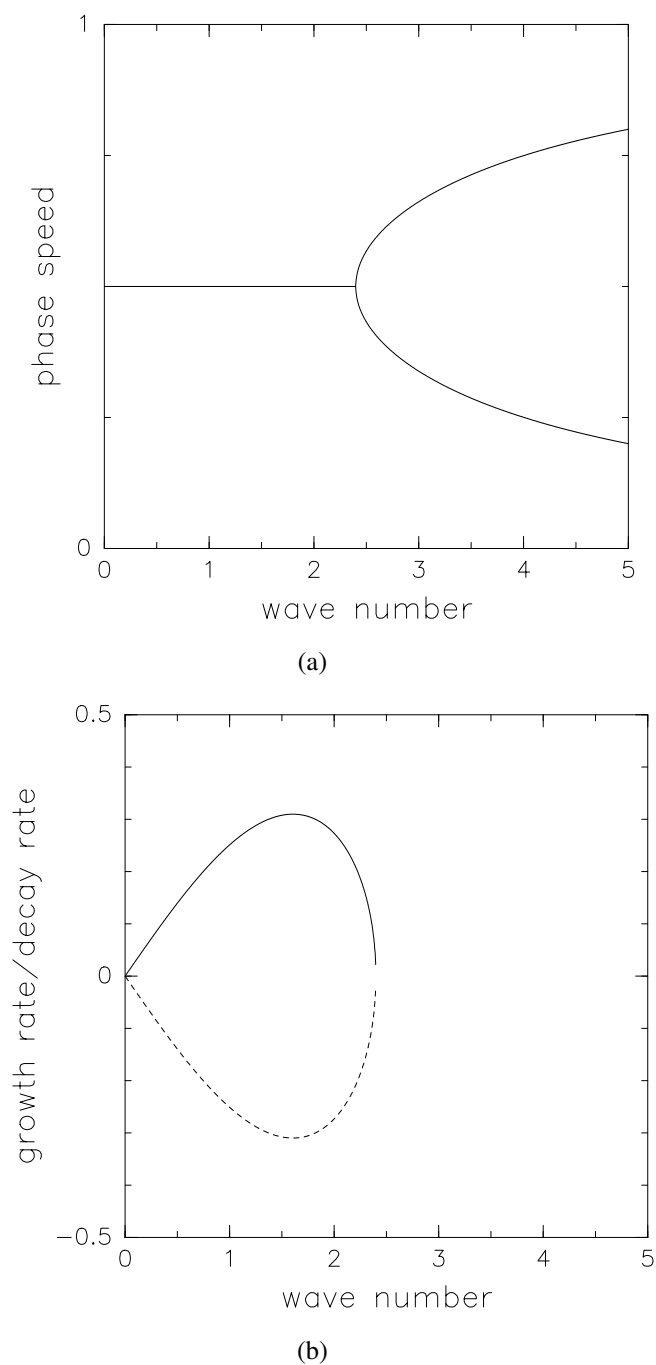


図 4.2: イーディー問題で得られた分散関係の図. (a) 位相速度, (b) 成長率と減衰率. 実線は成長モードの成長率, 点線は減衰モードの成長率. $l = 0$ の場合. 横軸は κ , (a) の縦軸は, $\bar{U}(0)$ で規格化した位相速度 $c^*/\bar{U}^*(0)$, (b) の縦軸は $k^*c_i^*/(L_d^{-1}\bar{U}(0))$ である.

不安定解が存在する条件は, 根号の中が負になることであり,

$$1 - 4\frac{\coth \kappa}{\kappa} + \frac{4}{\kappa^2} < 0 \quad (4.30)$$

である.

上の条件を満たす κ の範囲を求める.

$$\coth \kappa = \frac{1}{2} \left(\coth \frac{\kappa}{2} + \tanh \frac{\kappa}{2} \right)$$

の関係式を用いると, (4.30) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\kappa^2 - \frac{1}{2}\kappa \left(\coth \frac{\kappa}{2} + \tanh \frac{\kappa}{2} \right) + 1 &< 0, \\ \left(\frac{\kappa}{2} - \tanh \frac{\kappa}{2} \right) \left(\frac{\kappa}{2} - \coth \frac{\kappa}{2} \right) &< 0 \end{aligned}$$

と書ける. (4.23) より, κ は正の数である. その範囲では, $\frac{\kappa}{2} - \tanh \frac{\kappa}{2} > 0$ であるので不安定となるためには

$$\frac{\kappa}{2} - \coth \frac{\kappa}{2} < 0$$

すなわち,

$$0 < \kappa < 2.3999 \quad (4.31)$$

となる.

$l = 0$ の場合, cut off が起こる波数が

$$L_d^{-1}k = 2.3999 \quad (4.32)$$

と決定できる.

- 不安定モード

分散関係 (4.29) において,

$$1 - 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} + \frac{4}{\kappa^2} < 0$$

とした場合, すなわち $0 < \kappa < 2.3999$ の場合は, 全てのモードが不安定モードになる.

分散関係は

$$c = \tilde{U} \pm i\Delta U \left(-1 + 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} - \frac{4}{\kappa^2} \right)^{1/2} \quad (4.33)$$

となり, 成長モードと減衰モードの成長率は

$$kc_i = \pm k\Delta U \left(-1 + 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} - \frac{4}{\kappa^2} \right)^{1/2} \quad (4.34)$$

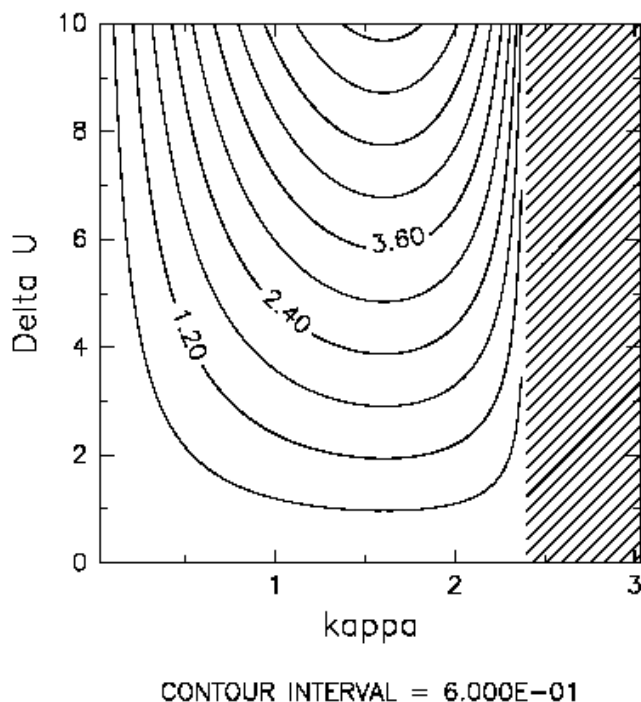


図 4.3: イーデー問題で得られる不安定モードの成長率 $k^*c_i^*$. 横軸は κ , 縦軸は $L_d f_0$ で規格化した風速シアー ΔU . 斜線部は不安定モードが存在しない領域を示す.

成長率の $\kappa, \Delta U$ 依存性を図 4.3 に示す.

位相速度は, 成長モードでも減衰モードでも同じく

$$c_r = \tilde{U} \quad (4.35)$$

である.

上の成長率の式からわかるように, k を固定した場合, $l = \frac{\pi Y}{2Y}$ が小さいほど成長率が大きくなる. $l = 0$ の場合 ($Y \rightarrow \infty$ に対応) に成長率がもっとも大きくなる.

- 成長率のパラメータ依存性

- S_l 依存性: 成層が安定になり, S_l が増大すると, 最も成長率が大きい不安定モードの東西波数が小さくなり, 成長率が減少する.
- f_0 依存性: 低緯度に対応してコリオリパラメータが減少すると, 最も成長率が大きい不安定モードの東西波数が小さくなり, 成長率が減少する.
- ΔU 依存性: 成長率は風のシアー ΔU に比例して増加する. もっとも不安定な波数は ΔU に依存しない.

- most unstable mode

$l = 0$ の場合を考えると, 成長率は

$$(kc_i)_{l=0} = \kappa L_d^{-1} \Delta U \left(-1 + 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} - \frac{4}{\kappa^2} \right)^{1/2} \quad (4.36)$$

となる. この場合, 成長率は $\kappa = 1.606$ で極大値をもつ.

最大成長率を与える東西波数は, (4.23) より

$$k = 1.606 L_d^{-1} \quad (4.37)$$

となる. 波長が変形半径程度になっている.

最大成長率は, 成長率の式に $\kappa = 1,606$ を代入して,

$$(kc_i)_{\max} = 2.895 \Delta U L_d^{-1} \quad (4.38)$$

となる.

4.3.7 大気に適用した場合

得られた結果を地球の大気に適用する.

中緯度の代表的な値として $|f_0| = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, $p_s = 10^5 \text{ Pa}$, $S_t = 10^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ mb}^2 \text{ sec}^{-1}$ を用いる.

上記の値を用いると変形半径は

$$L_d = \frac{p_s \sqrt{S_t}}{|f_0|} = \frac{10^5 \cdot \sqrt{10^{-6}}}{10^{-4}} = 10^6 [\text{m}]$$

これより,

$$k = 1.606 \times 10^{-6} [\text{m}^{-1}]$$

これより, most unstable mode の波長は

$$\frac{2\pi}{k} = 3.91 \times 10^6 [\text{m}]$$

よって波長は約 4000 km になる.

成長率は

$$kc_i = 2.895 \Delta U L_d^{-1} = 2.895 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 2.895 \times 10^{-5} \quad (4.39)$$

e 倍に成長するのにかかる時間は

$$(kc_i)^{-1} = 2.895^{-1} \times 10^5 [\text{sec}] = \frac{10^5}{2.895 \times 86400} [\text{day}] = 0.399 [\text{day}] \quad (4.40)$$

4.4 モードの構造

まず, Φ の鉛直構造を表す式を求める. 係数の関係は

$$\begin{aligned}(\tilde{U} - c + \Delta U)\kappa A + 2\Delta U B &= 0, \\ 2\Delta U B &= -(\tilde{U} - c + \Delta U)\kappa A, \\ B &= -\frac{(\tilde{U} - c + \Delta U)}{2\Delta U}\kappa A\end{aligned}$$

なので, 鉛直構造は

$$\begin{aligned}\Phi(p) &= A \sinh \kappa \frac{p}{p_s} + B \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \\ &= A \left\{ \sinh \kappa \frac{p}{p_s} - \frac{\tilde{U} - c + \Delta U}{2\Delta U} \kappa \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \right\} \\ &= A \left\{ \sinh \kappa \frac{p}{p_s} - \frac{\tilde{U} - c_r + \Delta U}{2\Delta U} \kappa \cosh \kappa \frac{p}{p_s} + i \frac{c_i}{2\Delta U} \kappa \cosh \kappa \frac{p}{p_s} \right\}\end{aligned}$$

となる. c は, 分散関係より

$$\begin{aligned}c &= \tilde{U} \pm \Delta U \left(1 - 4 \frac{\coth \kappa}{\kappa} + \frac{4}{\kappa^2} \right)^{1/2}, \\ \kappa &= L_d (k^2 + l^2)^{1/2}, \quad L_d = \frac{p_s S_t^{1/2}}{|f_0|}\end{aligned}$$

と決定される.

ここで,

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{p}{p_s}, \\ \gamma &= \frac{\tilde{U} - c_r + \Delta U}{2\Delta U} \kappa, \\ \delta &= \frac{c_i}{2\Delta U} \kappa\end{aligned}$$

とおくと,

$$\Phi(p) = A (\sinh \kappa \sigma - \gamma \kappa \cosh \kappa \sigma + i \delta \kappa \cosh \kappa \sigma)$$

となる.

位相は

$$\theta(p) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im \Phi(p)}{\Re \Phi(p)} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\delta \kappa \cosh \kappa \sigma}{\sinh \kappa \sigma - \gamma \kappa \cosh \kappa \sigma} \right)$$

で計算される.

これより, ϕ' は以下のように決定される

$$\begin{aligned}
\phi' &= \Re[\Phi(p)e^{ik(x-ct)}] \cos ly, \\
&= \Re \left[A (\sinh \kappa\sigma - \gamma\kappa \cosh \kappa\sigma + i\delta\kappa \cosh \kappa\sigma) e^{ik(x-ct)} \right] \cos ly, \\
&= \Re \left[(A_r + iA_i) (\sinh \kappa\sigma - \gamma\kappa \cosh \kappa\sigma + i\delta\kappa \cosh \kappa\sigma) e^{ik\{x-(c_r+ic_i)t\}} \right] \cos ly \\
&= e^{kc_it} \Re \left[(A_r + iA_i) (\sinh \kappa\sigma - \gamma\kappa \cosh \kappa\sigma + i\delta\kappa \cosh \kappa\sigma) \right. \\
&\quad \left. \{ \cos(kx - kc_rt) + i \sin(kx - kc_rt) \} \right] \cos ly \\
&= e^{kc_it} \Re \left\{ [A_r (\sinh \kappa\sigma - \gamma\kappa \cosh \kappa\sigma) - A_i \delta\kappa \cosh \kappa\sigma \right. \\
&\quad \left. + i \{A_r \delta\kappa \cosh \kappa\sigma + A_i (\sinh \kappa\sigma - \gamma\kappa \cosh \kappa\sigma)\}] \right. \\
&\quad \left. \{ \cos(kx - kc_rt) + i \sin(kx - kc_rt) \} \right\} \cos ly \\
&= e^{kc_it} \left\{ [A_r (\sinh \kappa\sigma - \gamma\kappa \cosh \kappa\sigma) - A_i \delta\kappa \cosh \kappa\sigma] \cos(kx - kc_rt) \right. \\
&\quad \left. - \{A_r \delta\kappa \cosh \kappa\sigma + A_i (\sinh \kappa\sigma - \gamma\kappa \cosh \kappa\sigma)\} \sin(kx - kc_rt) \right\} \cos ly.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\theta = kx - kc_rt$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\phi' &= e^{kc_it} \left[(A_r \{ \sinh \kappa\sigma - \gamma \cosh \kappa\sigma \} - A_i \delta \cosh \kappa\sigma) \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - (A_r \delta \cosh \kappa\sigma + A_i \{ \sinh \kappa\sigma - \gamma \cosh \kappa\sigma \}) \sin \theta \right] \cos ly.
\end{aligned}$$

他の物理量は, ϕ' を使って以下のように表される.

$$\begin{aligned}
u' &= -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi'}{\partial y}, \\
v' &= \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi'}{\partial x}, \\
\alpha' &= -\frac{\partial \phi'}{\partial p}, \\
\omega' &= \frac{1}{S_t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \right] = \frac{1}{S_t} \left\{ \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + f_0 v' \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \right\}
\end{aligned}$$

u', v', α' について計算すると,

$$\begin{aligned}
 u' &= -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi'}{\partial y} \\
 &= l \frac{1}{f_0} e^{kc_i t} [\{A_r (\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma) - A_i \delta \cosh \kappa \sigma\} \cos \theta \\
 &\quad - (A_r \delta \cosh \kappa \sigma + A_i \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\}) \sin \theta] \sin ly, \\
 v' &= \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \\
 &= k \frac{1}{f_0} e^{kc_i t} [-(A_r \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\} - A_i \delta \cosh \kappa \sigma) \sin \theta \\
 &\quad - (A_r \delta \cosh \kappa \sigma + A_i \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\}) \cos \theta] \cos ly, \\
 \alpha' &= -\frac{\partial \phi'}{\partial p} \\
 &= -\frac{\kappa}{p_s} e^{kc_i t} [(A_r \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\} - A_i \delta \sinh \kappa \sigma) \cos \theta \\
 &\quad - (A_r \delta \sinh \kappa \sigma + A_i \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\}) \sin \theta] \cos ly.
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial p} \sinh \kappa \sigma &= \frac{\kappa}{p_s} \cosh \kappa \sigma, \\
 \frac{\partial}{\partial p} \cosh \kappa \sigma &= \frac{\kappa}{p_s} \sinh \kappa \sigma,
 \end{aligned}$$

を用いた.

ω' の表現を求めるために, $\frac{\partial \alpha'}{\partial t}$, $\bar{U} \frac{\partial \alpha'}{\partial x}$ を計算する.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\kappa}{p_s} e^{kc_i t} [\{A_r (\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma) - A_i \delta \sinh \kappa \sigma\} \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \{A_r \delta \sinh \kappa \sigma + A_i (\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma)\} \sin \theta] \cos ly \right] \\
&= -\frac{\kappa}{p_s} (kc_i) e^{kc_i t} [\{A_r (\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma) - A_i \delta \sinh \kappa \sigma\} \cos \theta \\
&\quad - \{A_r \delta \sinh \kappa \sigma + A_i (\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma)\} \sin \theta] \cos ly. \\
&\quad - \frac{\kappa}{p_s} e^{kc_i t} [\{A_r (\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma) - A_i \delta \sinh \kappa \sigma\} (kc_r) \sin \theta \\
&\quad - (A_r \delta \sinh \kappa \sigma + A_i \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\}) (-kc_r) \cos \theta] \cos ly \\
&= -(kc_i) \alpha' \\
&\quad - (kc_r) \frac{\kappa}{p_s} e^{kc_i t} [(A_r \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\} - A_i \delta \sinh \kappa \sigma) \sin \theta \\
&\quad + (A_r \delta \sinh \kappa \sigma + A_i \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\}) \cos \theta] \cos ly, \\
\bar{U} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} &= \bar{U} k \frac{\kappa}{p_s} e^{kc_i t} [(A_r \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\} - A_i \delta \sinh \kappa \sigma) \sin \theta \\
&\quad + (A_r \delta \sinh \kappa \sigma + A_i \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\}) \cos \theta] \cos ly.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\omega' &= \frac{1}{S_t} \left\{ \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \right\} \\
&= \frac{1}{S_t} \left\{ -(kc_i) \alpha' + k(\bar{U} - c_r) \frac{\kappa}{p_s} e^{kc_i t} [(A_r \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\} - A_i \delta \sinh \kappa \sigma) \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + (A_r \delta \sinh \kappa \sigma + A_i \{\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma\}) \cos \theta] \cos ly + f_0 v' \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \right\}
\end{aligned}$$

構造の図は無次元量で描く. さきほど使った無次元化を使って各種物理量の無次元表現を求める. u' は以下のようなになる.

$$\begin{aligned}
u' &= l \frac{1}{f_0} e^{kc_i t} [(A_r \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\} - A_i \delta \cosh \kappa \sigma) \cos \theta \\
&\quad - (A_r \delta \cosh \kappa \sigma + A_i \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\}) \sin \theta] \sin ly, \\
(L_d f_0) u^* &= L_d^{-1} l^* \frac{1}{f_0} e^{k^* c_i^* t^*} [(f_0 L_d)^2 (A_r^* \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\} - A_i^* \delta \cosh \kappa \sigma) \cos \theta \\
&\quad - (A_r^* \delta \cosh \kappa \sigma + A_i^* \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\}) \sin \theta^*] \sin l^* y^*, \\
u^* &= l^* e^{k^* c_i^* t^*} [(A_r^* \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\} - A_i^* \delta \cosh \kappa \sigma) \cos \theta^* \\
&\quad - (A_r^* \delta \cosh \kappa \sigma + A_i^* \{\sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma\}) \sin \theta^*] \sin l^* y^*,
\end{aligned}$$

v' についても同様に,

$$v'^* = k^* e^{k^* c_i^* t^*} \left[- (A_r^* \{ \sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma \} - A_i^* \delta \cosh \kappa \sigma) \sin \theta^* \right. \\ \left. - (A_r^* \delta \cosh \kappa \sigma + A_i^* \{ \sinh \kappa \sigma - \gamma \cosh \kappa \sigma \}) \cos \theta^* \right] \cos l^* y^*.$$

α' は

$$\frac{(f_0 L_d)^2}{p_s} \alpha'^* = - \frac{\kappa}{p_s} e^{k^* c_i^* t^*} (f_0 L_d)^2 \left[(A_r^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \} - A_i^* \delta \sinh \kappa \sigma) \cos \theta^* \right. \\ \left. - (A_r^* \delta \sinh \kappa \sigma + A_i^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \}) \sin \theta^* \right] \cos l^* y^*, \\ \alpha'^* = - \kappa e^{k^* c_i^* t^*} \left[(A_r^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \} - A_i^* \delta \sinh \kappa \sigma) \cos \theta^* \right. \\ \left. - (A_r^* \delta \sinh \kappa \sigma + A_i^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \}) \sin \theta^* \right] \cos l^* y^*.$$

ω' は

$$(f_0 p_s) \omega'^* = \frac{1}{S_t} \left\{ - (L_d^{-1}) k^* (f_0 L_d) c_i^* \frac{(f_0 L_d)^2}{p_s} \alpha'^* \right. \\ \left. + (L_d^{-1}) k^* (f_0 L_d) (\bar{U}^* - c_r^*) \frac{\kappa}{p_s} e^{k^* c_i^* t^*} (f_0 L_d)^2 \right. \\ \left. \times \left[(A_r^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \} - A_i^* \delta \sinh \kappa \sigma) \sin \theta^* \right. \right. \\ \left. \left. + (A_r^* \delta \sinh \kappa \sigma + A_i^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \}) \cos \theta^* \right] \cos l^* y^* \right. \\ \left. + f_0 (f_0 L_d) v'^* \left(\frac{f_0 L_d}{p_s} \right) \frac{\partial \bar{U}^*}{\partial p^*} \right\} \\ \omega'^* = \frac{1}{S_t (f_0 p_s)} \frac{f_0^3 L_d^2}{p_s} \left\{ - k^* c_i^* \alpha'^* \right. \\ \left. + k^* \kappa (\bar{U}^* - c_r^*) e^{k^* c_i^* t^*} \right. \\ \left. \times \left[\{ A_r^* (\cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma) - A_i^* \delta \sinh \kappa \sigma \} \sin \theta^* \right. \right. \\ \left. \left. + (A_r^* \delta \sinh \kappa \sigma + A_i^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \}) \cos \theta^* \right] \cos l^* y^* \right. \\ \left. + v'^* \frac{\partial \bar{U}^*}{\partial p^*} \right\}$$

と変形され、係数を更に整理すると

$$\frac{1}{S_t (f_0 p_s)} \frac{f_0^3 L_d^2}{p_s} = \frac{1}{S_t} \frac{f_0^2 L_d^2}{p_s^2} = \frac{1}{S_t} \frac{f_0^2 p_s^2 S_t}{p_s^2 f_0^2} = 1$$

となるので

$$\begin{aligned}
 \omega'^* &= -k^* c_i^* \alpha'^* \\
 &+ k^* \kappa (\bar{U}^* - c_r^*) e^{k^* c_i^* t^*} \\
 &\quad \times \left[(A_r^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \} - A_i^* \delta \sinh \kappa \sigma) \sin \theta^* \right. \\
 &\quad \left. + (A_r^* \delta \sinh \kappa \sigma + A_i^* \{ \cosh \kappa \sigma - \gamma \sinh \kappa \sigma \}) \cos \theta^* \right] \cos l^* y^* \\
 &+ v'^* \frac{\partial \bar{U}^*}{\partial p^*}
 \end{aligned}$$

不安定モードの構造を 図 4.4 に示す.

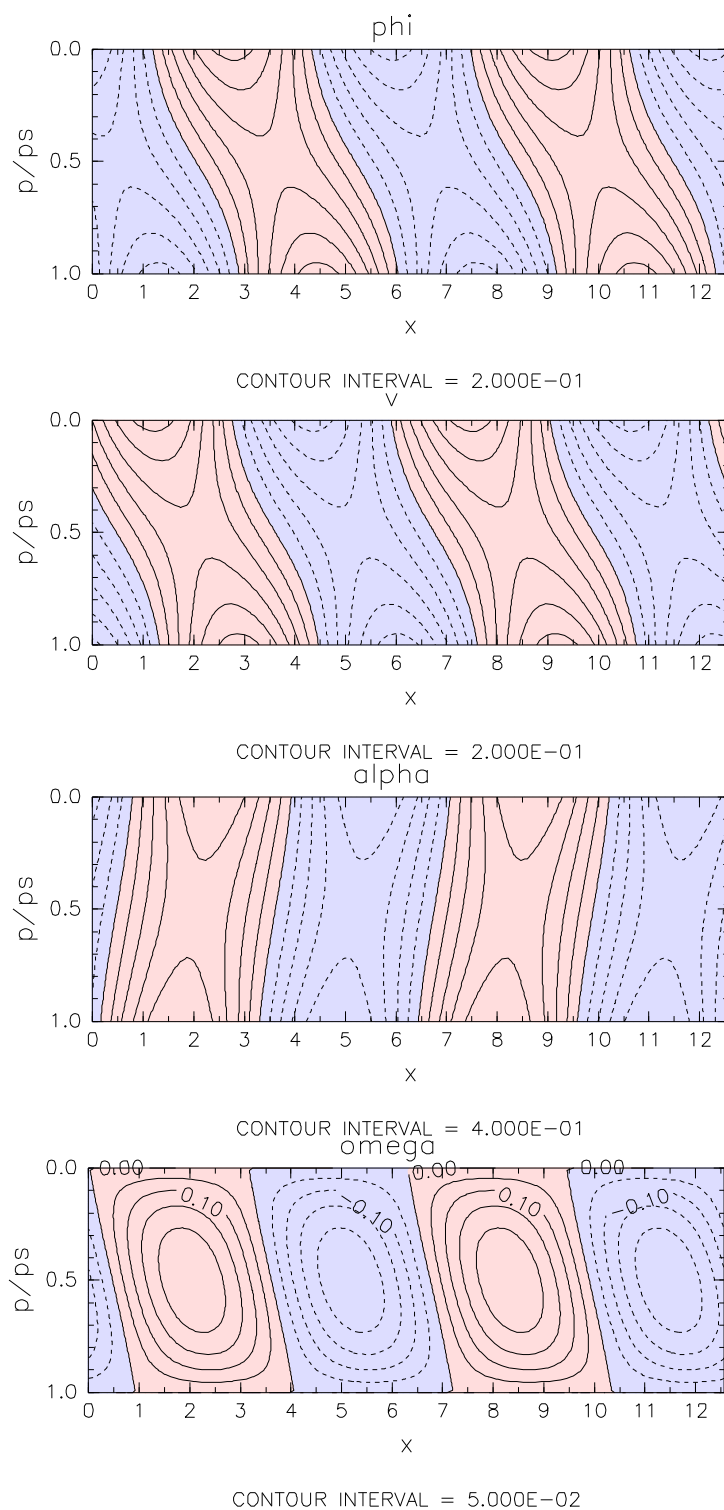


図 4.4: イーデー問題における不安定モードの水平鉛直構造. 上から順に, ϕ' , v' , α' , ω' を示す. $l=0$ の結果. 2 波長分を描いている.