

# ハドレー循環の基礎

石渡正樹

2021 年 06 月 20 日

# 目次

<b>第1章 Held and Hou モデル</b>	<b>2</b>
1.1 系の設定及び仮定	2
1.2 基礎方程式	3
1.3 上層における東西風分布	4
1.4 温度風平衡	6
1.5 熱バランスの条件	8
1.6 ハドレー循環の緯度幅の近似解	10
1.7 東西風	12
1.8 解の性質	13
1.9 循環強度	15
1.10 熱フラックス	16
1.10.1 熱フラックス	16
1.10.2 質量フラックス	17
1.10.3 運動量フラックス	17
1.10.4 地表面での風	18

# 第1章 Held and Hou モデル

## 1.1 系の設定及び仮定

ハドレーセルの簡単モデルを考える。主に考察する問題は、ハドレー循環領域の広がりほどの程度であるか、ということである。ここでは、ハドレー循環のモデルとして Held and Hou (1980) の軸対称モデルを考える。Held and Hou モデルは、ハドレー循環の議論において頻繁に参照され、ハドレー循環に対するイメージの基本になっている。

図 1.1 に示す状況を考える。考える領域は

- $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
- $0 < z < H$

である。ここで  $\theta$  は緯度,  $z$  は高度である。

空気塊が赤道で上昇し、高度  $H$  で極向きに移動し、とある緯度  $\theta_H$  で下降して地表付近で赤道に戻る、という流れを考える。この流れに対して、以下の仮定を置く。

1. 定常
2. 軸対称 ( $\phi$  方向の依存性無し)
3. 極向きに移動する空気塊は角運動量を保存する。一方、地表付近の赤道向きの流れに伴う東西風は摩擦により減速され弱くなる。
4.  $u(H) \gg u(0)$
5. 赤道対称 (加熱は赤道で最大)
6. 温度風平衡 (旋衡風平衡: 遠心力・コリオリカ・圧力傾度力がバランスする)
7. ニュートン冷却

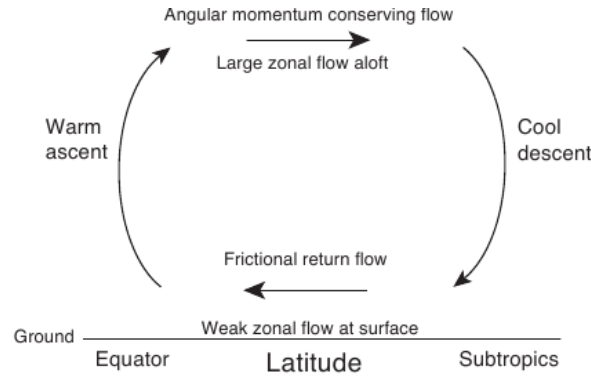


図 1.1: ハドレーセルの簡単モデル. 赤道付近で上昇した気塊はおよそ圏界面レベルで極向きに移動し, 亜熱帯域で下降する. そして地表付近の対流圏下層レベルで赤道域に戻って来る. 原図は Vallis (2005).

## 1.2 基礎方程式

ブシネスク, プリミティブ方程式系を考える. ブシネスク近似とは, 浮力に関する項のみ密度変化を考慮し, それ以外の項では密度を一定とする近似である. 鉛直座標には  $z$  をとる. 軸対称を仮定した基礎方程式は以下の通りである.

連続の式:

$$0 = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta v) + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.1)$$

運動方程式の  $\phi$  成分 (経度成分):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta uv) - \frac{\partial (uw)}{\partial z} + \frac{\sin \theta}{a \cos \theta} uv + 2\Omega \sin \theta v + F_\phi. \quad (1.2)$$

運動方程式の  $\theta$  成分 (緯度成分):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta v^2) - \frac{\partial (vw)}{\partial z} - \frac{\sin \theta}{a \cos \theta} u^2 - 2\Omega \sin \theta u - \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta. \quad (1.3)$$

静力学平衡 (ブシネスク近似):

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g. \quad (1.4)$$

温度の式:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta Tv) - \frac{\partial (Tw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0 c_p} Q. \quad (1.5)$$

状態方程式 (ブシネスク近似):

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]. \quad (1.6)$$

ここで,  $F_\phi, F_\theta$  は摩擦等の外力項である.  $\rho_0$  は基準となる密度の値であり, 定数とする.

熱力学量については, ブシネスク近似をおこなっているので「温度」だけで決まるようになっている. 密度も温度のみの関数としている. 圧縮性を考慮した方程式では, 方程式系の各所にスケールハイト等を含む圧縮性の効果による項が多くあらわれるため, あまり見やすいものにはならない. ブシネスク流体の場合, 圧縮性の効果が排除されるため大幅に見やすくなる.

境界条件として以下のものを考える.

$$z = H, \quad w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (1.7)$$

$$z = 0, \quad w = 0, \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = Cv, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad (1.8)$$

$z = 0$  は地面,  $H$  は流体層の上端であり,  $C$  は適当な抵抗系数である.

定常の仮定より, 以下では時間変化項は落して考える.

### 1.3 上層における東西風分布

上層における東西風の分布を考えるため, 角運動量を考える. 角運動量  $l$  は

$$l \equiv (u + a\Omega \cos \theta)a \cos \theta = au \cos \theta + a^2\Omega \cos^2 \theta \quad (1.9)$$

と定義される.

角運動量の式は運動方程式の  $\phi$  成分から導くことができる. 以下にその導出の方針を示す. 運動方程式の  $\phi$  成分 (1.2) に  $a \cos \theta$  をかけると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(ua \cos \theta) &= -\frac{a \cos \theta}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos \theta uv) - \frac{\partial}{\partial z}(wua \cos \theta) + uv \sin \theta \\ &\quad + 2\Omega av \sin \theta \cos \theta + F_\phi a \cos \theta \end{aligned} \quad (1.10)$$

が得られる.

ここで, 連続の式 (1.1) に  $\Omega a^2 \cos^2 \theta$  をかけた式を作ると,

$$0 = \frac{\Omega a^2 \cos^2 \theta}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos \theta v) + \frac{\partial w}{\partial z} \Omega a^2 \cos^2 \theta, \quad (1.11)$$

$$0 = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos \theta v \Omega a^2 \cos^2 \theta) - \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Omega a^2 \cos^2 \theta) + \frac{\partial}{\partial z}(w \Omega a^2 \cos^2 \theta) \quad (1.12)$$

$$0 = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos \theta v \Omega a^2 \cos^2 \theta) + \frac{\partial}{\partial z}(w \Omega a^2 \cos^2 \theta) + \frac{\Omega a^2 v}{a} 2 \cos \theta \sin \theta \quad (1.13)$$

となり,

$$0 = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta v \Omega a^2 \cos^2 \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (w \Omega a^2 \cos^2 \theta) + 2 \Omega a v \cos \theta \sin \theta \quad (1.14)$$

が得られる. 更に, この式に  $\Omega a^2 \cos^2 \theta$  の時間微分項 (0 となるもの) を足すと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Omega a^2 \cos^2 \theta) &= -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta v \Omega a^2 \cos^2 \theta) - \frac{\partial}{\partial z} (w \Omega a^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad - 2 \Omega a v \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (1.15)$$

が得られる. これは地球回転成分の角運動量の保存式である.

(1.10) と (1.15) を足すと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (ua \cos \theta + \Omega a^2 \cos^2 \theta) &= -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta v \Omega a^2 \cos^2 \theta) - \frac{\partial}{\partial z} \{w(ua \cos \theta + \Omega a^2 \cos^2 \theta)\} \\ &\quad - \frac{a \cos \theta}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta uv) + uv \sin \theta \\ &\quad + F_\phi a \cos \theta \end{aligned} \quad (1.16)$$

が得られる. この式の 2 行目を変形する.

$$\begin{aligned} -\frac{a \cos \theta}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta uv) + uv \sin \theta &= -\frac{a \cos \theta}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta uv) - uv \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \\ &= -\frac{a \cos \theta}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta uv) - \frac{uv \cos \theta}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a \cos \theta) \\ &= -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta \times ua \cos \theta). \end{aligned} \quad (1.17)$$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (ua \cos \theta + \Omega a^2 \cos^2 \theta) &= -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta v \Omega a^2 \cos^2 \theta) - \frac{\partial}{\partial z} \{w(ua \cos \theta + \Omega a^2 \cos^2 \theta)\} \\ &\quad - \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta \times ua \cos \theta) + F_\phi a \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (ua \cos \theta + \Omega a^2 \cos^2 \theta) &= -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \{v \cos \theta (ua \cos \theta + \Omega a^2 \cos^2 \theta)\} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \{w(ua \cos \theta + \Omega a^2 \cos^2 \theta)\} + F_\phi a \cos \theta \end{aligned} \quad (1.19)$$

と変形され, 最終的に

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (lv \cos \theta) - \frac{\partial}{\partial z} (lw) + F_\phi a \cos \theta \quad (1.20)$$

が得られる. これが角運動量の保存則である.

ハドレー循環の上層では角運動量保存的に運動すると仮定したので (上の式を見れば, 角運動量に対して粘性は働かないと仮定したことと等価であることがわかる),  $l = au \cos \theta + \Omega a^2 \cos^2 \theta$  は一定となる.

ここで、赤道では気塊は地表から上昇してくると考えて、赤道に置ける  $u$  の値は小さいとする。これより、赤道において  $\bar{u} = 0$  を仮定する。

上層  $z = H$  での東西風  $u(H)$  の緯度分布は、角運動量  $l$  が赤道での値  $l(\theta = 0) = \Omega a^2$  に等しいという条件から求められる。

$$au \cos \theta + a^2 \Omega \cos^2 \theta = \Omega a^2 \quad (1.21)$$

これから、

$$u(H) = \Omega a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (\text{at } z = H) \quad (1.22)$$

角運動量保存的に東西風が決まる場合は、赤道から離れるに従い風速が大きくなることわかる (図 1.2 参照)。

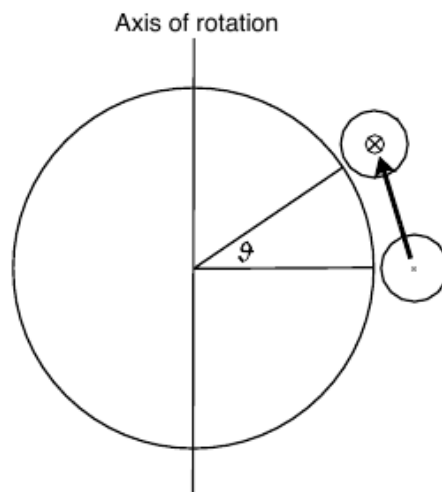


図 1.2: 赤道上の空気塊が極向きに移動すると回転軸に近づくことになる。空気塊の角運動量が保存される場合には、風速が増加する。原図は、Vallis (2005) の Figure 11.5 .

## 1.4 温度風平衡

東西風と圧力場の間には旋衝風平衡が成立すると仮定して、(1.3) において移流項と外力項を無視すると

$$0 = -\frac{\sin \theta}{a \cos \theta} u^2 - 2\Omega \sin \theta u - \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (1.23)$$

となる. この式を  $z = 0$  と  $H$  で評価し, 差をとると,

$$0 = -\frac{\sin \theta}{a \cos \theta} \{u^2(H) - u^2(0)\} - 2\Omega \sin \theta \{u(H) - u(0)\} - \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \{p(H) - p(0)\} \quad (1.24)$$

ここで,  $u(H) \gg u(0)$  を用いると

$$0 = -\frac{\sin \theta}{a \cos \theta} u^2(H) - 2\Omega \sin \theta u(H) - \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{a} \frac{\partial p(H)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{a} \frac{\partial p(0)}{\partial \theta} \quad (1.25)$$

ここで, 静力学平衡の式の鉛直積分を行う.

$$\frac{1}{\rho_0} [p(H) - p(0)] = -\frac{H\bar{\rho}}{\rho_0} g \quad (1.26)$$

となる. ここで,  $\bar{(\ )}$  は鉛直平均を表す. これに状態方程式を代入すると

$$\frac{1}{\rho_0} [p(H) - p(0)] = -H[1 - \beta(\bar{T} - T_0)]g = -H[1 - \beta(\bar{T} - T_0)]g \quad (1.27)$$

となる. これより,

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{p(H) - p(0)}{H} = \beta\bar{T}g + C \quad (1.28)$$

$C$  は定数部分である.

さきほどの旋衝風平衡の式 (1.23) に, 静水圧平衡の鉛直積分の式 (1.28) を代入すると

$$0 = -\frac{\sin \theta}{a \cos \theta} u^2(H) - 2\Omega \sin \theta u(H) - \beta g H \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} \quad (1.29)$$

が得られる.

(1.22) を代入すると

$$0 = -\frac{\sin \theta}{a \cos \theta} \left[ \Omega a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right]^2 - 2\Omega \sin \theta \left[ \Omega a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right] - \frac{\beta g H}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta}, \quad (1.30)$$

$$0 = -\Omega^2 a \frac{\sin^5 \theta}{\cos^3 \theta} - 2\Omega^2 a \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} - \frac{\beta g H}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta}, \quad (1.31)$$

$$0 = -\Omega^2 a \frac{\sin^3 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^3 \theta} - 2\Omega^2 a \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} - \frac{\beta g H}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta}, \quad (1.32)$$

$$0 = -\Omega^2 a \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} + \Omega^2 a \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} - 2\Omega^2 a \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} - \frac{\beta g H}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta}, \quad (1.33)$$

$$-\frac{\beta g H}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} = \Omega^2 a \left( \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \right) \quad (1.34)$$



となる。

$\theta$  について、0 から  $\theta$  まで積分すると

$$-\int_0^\theta \frac{\beta g H}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} d\theta = \int_0^\theta \Omega^2 a \left( \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \right) d\theta, \quad (1.35)$$

$$-\left[ \frac{\beta g H}{a} \bar{T} \right]_0^\theta = \int_0^\theta \Omega^2 a \left( \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \right) d\theta, \quad (1.36)$$

$$\beta [\bar{T}(\theta) - \bar{T}(0)] = -\frac{\Omega^2 a^2}{g H} \frac{\sin^4 \theta}{2 \cos^2 \theta} \quad (1.37)$$

となる<sup>1</sup>。上式は温度場の緯度分布を記述する式である。しかし、赤道における温度の値  $\bar{T}(0)$  は、現段階では未決定である。赤道から離れたところでは、(1.22) で与えられる東西風は極に向かうに従い、急激に大きくなり、そして、それに応じて温度は低下する。この解が、どのくらいの緯度まで成り立つか、および  $\bar{T}(0)$  の値は、次の熱バランスの条件によって決定されることになる。

## 1.5 熱バランスの条件

温度の式を加熱項をニュートン冷却によって与える。

$$\frac{1}{\rho_0 c_p} Q = -\frac{T - T_e(\theta)}{\tau} \quad (1.42)$$

ただし、 $T_e$  はニュートン冷却の基準温度であり、以下の分布を与える。

$$\beta T_e(\theta) = 1 - \frac{2}{3} \Delta_H P_2(\sin \theta) + \Delta_v \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.43)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \Delta_H (3 \sin^2 \theta - 1) + \Delta_v \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.44)$$

<sup>1</sup>(1.37) の積分は以下のように行う。  $x = \cos \theta$  と変数変換をおこなうと

$$\int_0^\theta \left( \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \right) d\theta = \int_0^\theta \left( \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^3 \theta} + \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \right) d\theta \quad (1.38)$$

$$= \int_1^{\cos \theta} \left( -\frac{1-x^2}{x^3} - \frac{1-x^2}{x} \right) dx = \int_1^{\cos \theta} \left( -\frac{1}{x^3} + x \right) dx \quad (1.39)$$

$$= \left[ \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^{\cos \theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta - 1 \quad (1.40)$$

$$= \frac{1 + \cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} = \frac{(1 - \cos^2 \theta)^2}{2 \cos^2 \theta} = \frac{\sin^4 \theta}{2 \cos^2 \theta} \quad (1.41)$$

$\Delta_H$  と  $\Delta_V$  は無次元の定数である。鉛直平均した基準温度は次のようになる。

$$\beta\overline{T}_e(\theta) = \frac{1}{H} \int_0^H \left[ 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3\sin^2\theta - 1) + \Delta_v \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right) \right] dz \quad (1.45)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3\sin^2\theta - 1) + \frac{1}{H} \left[ \Delta_v \left( \frac{z^2}{2H} - \frac{1}{2}z \right) \right]_0^H \quad (1.46)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3\sin^2\theta - 1) \quad (1.47)$$

赤道における  $\beta\overline{T}_e$  は

$$\beta\overline{T}_e(0) = 1 + \frac{1}{3}\Delta_H \quad (1.48)$$

となる。

ハドレーセル  $0 < \theta < \theta_H$  内で熱バランスが成立することを仮定すると、

$$\int_0^{\theta_H} \overline{Q} d\theta = 0 \quad (1.49)$$

が成立しなければならない。よって、

$$\int_0^{\theta_H} \overline{T}(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_H} \overline{T}_e(\theta) d\theta. \quad (1.50)$$

$\theta = \theta_H$  で  $\overline{T} = \overline{T}_e$  が成立することを仮定すると、図 1.3 のような「等面積法」で  $\theta_H$  が定まる。

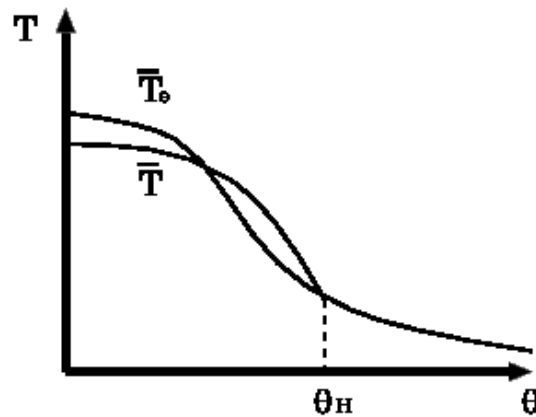


図 1.3: 等面積法による  $\theta_H$  の決定.

## 1.6 ハドレー循環の緯度幅の近似解

$\theta_H \ll 1$  のときには、 $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  と近似できるので、(1.37), (1.47) は、

$$\beta \bar{T}(\theta) = \bar{T}(0) - \frac{\Omega^2 a^2 \sin^4 \theta}{gH 2 \cos^2 \theta} \quad (1.51)$$

$$\approx \beta \bar{T}(0) - \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta^4, \quad (1.52)$$

$$\beta \bar{T}_e(\theta) = 1 - \frac{1}{3} \Delta_H (3 \sin^2 \theta - 1) \quad (1.53)$$

$$\approx \beta \bar{T}_e(0) - \Delta_H \theta^2. \quad (1.54)$$

これらの近似式を用いて、熱バランスの条件 (1.50) をあらわすと

$$\int_0^{\theta_H} \bar{T}(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_H} \bar{T}_e(\theta) d\theta. \quad (1.55)$$

$$\int_0^{\theta_H} \frac{1}{\beta} \left[ \beta \bar{T}(0) - \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta^4 \right] d\theta = \int_0^{\theta_H} \frac{1}{\beta} [\beta \bar{T}_e(0) - \Delta_H \theta^2] d\theta. \quad (1.56)$$

$$\left[ \beta \bar{T}(0) \theta - \frac{1}{10} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta^5 \right]_0^{\theta_H} = \left[ \beta \bar{T}_e(0) \theta - \frac{1}{3} \Delta_H \theta^3 \right]_0^{\theta_H} \quad (1.57)$$

$$\beta \bar{T}(0) - \frac{1}{10} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta_H^4 = \beta \bar{T}_e(0) - \frac{1}{3} \Delta_H \theta_H^2 \quad (1.58)$$

ここで、 $\theta = \theta_H$  で  $\bar{T} = \bar{T}_e$  となる条件

$$\beta \bar{T}(0) - \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta_H^4 = \beta \bar{T}_e(0) - \Delta_H \theta_H^2 \quad (1.59)$$

を用いると、

$$\frac{4}{10} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta_H^4 = \frac{2}{3} \Delta_H \theta_H^2 \quad (1.60)$$

となる。これを、 $\theta_H$  について解けば、

$$\frac{3}{5} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta_H^2 = \Delta_H, \quad (1.61)$$

$$\theta_H = \left( \frac{5}{3} \frac{gH}{\Omega^2 a^2} \Delta_H \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{5}{3} R \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.62)$$

となり、ハドレー循環の境界緯度が緯度が決められる。ここで、

$$R \equiv \frac{gH}{\Omega^2 a^2} \Delta_H. \quad (1.63)$$

という無次元パラメータを導入した.  $R$  は浅水波における重力波速度と回転速度の比の2乗に赤道から極までの温度変化率をかけたものになっている.

(1.62) を用いると, (1.52), (1.54) は,

$$\beta\bar{T}(\theta) \approx \beta\bar{T}(0) - \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta_H^4 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^4 \quad (1.64)$$

$$= \beta\bar{T}(0) - \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 a^2}{gH} \left( \frac{5}{3} \frac{gH}{\Omega^2 a^2} \Delta_H \right)^2 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^4 \quad (1.65)$$

$$= \beta\bar{T}(0) - \frac{25}{18} \frac{gH}{\Omega^2 a^2} \Delta_H^2 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^4 \quad (1.66)$$

$$= \beta\bar{T}(0) - \frac{25}{18} R \Delta_H \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^4, \quad (1.67)$$

$$\beta\bar{T}_e(\theta) \approx \beta\bar{T}_e(0) - \Delta_H \theta_H^2 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^2 \quad (1.68)$$

$$= \beta\bar{T}_e(0) - \Delta_H \left( \frac{5}{3} \frac{gH}{\Omega^2 a^2} \Delta_H \right) \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^2 \quad (1.69)$$

$$= \beta\bar{T}_e(0) - \frac{5}{3} R \Delta_H \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^2. \quad (1.70)$$

これらの式において  $\theta = \theta_H$  の点を考えると,  $\bar{T} = \bar{T}_e$  より

$$\beta\bar{T}(0) - \frac{25}{18} R \Delta_H = \beta\bar{T}_e(0) - \frac{5}{3} R \Delta_H, \quad (1.71)$$

$$\beta\bar{T}(0) \approx \beta\bar{T}_e(0) - \frac{5}{18} R \Delta_H \quad (1.72)$$

となり,  $\theta = 0$  における基準温度の差が求められる. これより,  $\theta$  における基準温度との差は

$$\beta\bar{T}(\theta) - \beta\bar{T}_e(\theta) \approx \beta\bar{T}(0) - \frac{25}{18} R \Delta_H \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^4 - \left\{ \beta\bar{T}_e(0) - \frac{5}{3} R \Delta_H \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^2 \right\} \quad (1.73)$$

となる. これより,

$$\beta\bar{T}(\theta) \approx \beta\bar{T}_e(\theta) + \beta\bar{T}(0) - \beta\bar{T}_e(0) - \frac{25}{18} R \Delta_H \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^4 + \frac{5}{3} R \Delta_H \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^2 \quad (1.74)$$

$$\beta\bar{T}(\theta) \approx \beta\bar{T}_e(\theta) - \frac{5}{18} R \Delta_H + \frac{5}{18} R \Delta_H \left[ -5 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^4 + 6 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^2 \right], \quad (1.75)$$

$$\beta\bar{T}(\theta) \approx \beta\bar{T}_e(\theta) + \frac{5}{18} R \Delta_H \left[ -1 - 5 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^4 + 6 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right)^2 \right], \quad (1.76)$$

$$\equiv \beta\bar{T}_e(\theta) + \frac{5}{18} R \Delta_H f_1 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right) \quad (1.77)$$

となる。ここで,

$$f_1(x) = -1 - 5x^4 + 6x^2 \quad (1.78)$$

とおいた。解として得られた温度分布を図示したものが、図 1.4 である。このモデルの帰結として重要なことは、大気が軸対称だと仮定してもハドレーセルの幅は有限になることが予測されたことである。3 次元的な構造 (中緯度に発生する傾圧不安定や大気波動による角運動量の輸送など) は必ずしもハドレーセルの境界を決めるために必要というわけではない (現実大気では傾圧不安定がハドレーセルの境界を決定する上でなんらかの役割を果たしている可能性は大きい)。このモデルでは、用いる収支として熱収支のみを使い (角運動量収支は考慮されていない)、赤道域の熱の超過を丁度打ち消す緯度まで循環が広がるという結果が得られた。

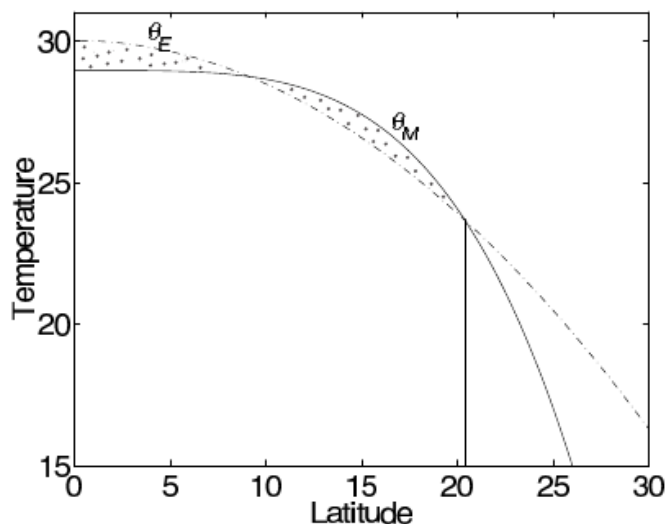


図 1.4: 放射平衡温度 ( $\bar{T}_e$  に対応するもの、点線)、モデルで得られた温度分布 ( $\bar{T}$  に対応するもの、実線)。横軸は緯度。ドットがついた 2ヶ所の領域は同じ面積を持つ。用いたパラメータの値は以下の通り。  $T_e(0) = 303$  K,  $T(0)\Delta_H = 50$  K,  $T(0) = 300$  K,  $\Omega = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ,  $H = 10$  km, これらの値から、 $R = 0.076$  が得られる。これに対応するハドレー循環の境界緯度は 20.4 度。原図は Vallis (2005) の Figure 11.6.

## 1.7 東西風

(1.22) で与えられる角運動量保存から得られる東西風において角度が小さいとする近似を行うと,

$$u(H) = \Omega a \theta^2 \quad (1.79)$$

となる。この式は、 $\theta < \theta_H$  の場合に成り立つ。

$\theta > \theta_H$  の領域では、放射平衡の温度場に対する温度風として速度分布が決まると考える。温度風平衡 (1.29) において、 $\bar{T}$  として  $\bar{T}_e$  を使って、 $\theta \ll 1$  の近似を用いると、

$$0 = -\frac{\theta}{a}u_e^2(H) - 2\Omega\theta u_e(H) - \beta gH \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \theta} \quad (1.80)$$

ここで、(1.54) を代入すると

$$0 = -\frac{\theta}{a}u_e^2(H) - 2\Omega\theta u_e(H) - gH \frac{1}{a}(-2\Delta_H\theta), \quad (1.81)$$

$$0 = -\frac{1}{a}u_e^2(H) - 2\Omega u_e(H) + 2gH \frac{1}{a}\Delta_H \quad (1.82)$$

この式を解けば、放射平衡状態の場合の東西風速度分布  $u_e$  が求められる。仮に、第一項が落せるとすると

$$u_e(H) = \frac{gH\Delta_H}{\Omega a} = \Omega a R \quad (1.83)$$

となり、放射平衡場における東西風は一定となる。この結果は、放射平衡温度分布が第二 Legendre 多項式で記述できるとしたことによる。よって、 $u_E$  が一定となるという結果は本質的ではない。風速分布を 図 1.5 に示す。ハドレーセルの境界  $\theta = \theta_H$  において、東西風は不連続になっている。なぜなら、 $u$  は不連続に変わる  $\bar{T}$  の南北勾配によって決まっているからである。ただし、 $\bar{T}$  自身は連続になっている。そのような不連続な場は傾圧的に不安定となると考えられ、渦運動が発生し、それによる角運動量輸送で平滑化が起こると予想される。

## 1.8 解の性質

軸対称モデルによって予測されたハドレーセルの緯度幅は

- 放射平衡温度の南北勾配の平方根に比例する。温度勾配が大きくなれば、図 ?? に示されるように熱バランスを満たすように循環の領域は拡がる。
- $H$  の平方根に比例する。吹き出しレベルが高くなれば、温度風平衡の関係を通じて温度勾配が小さくなるので、それに応じて循環は極側に伸びる。
- $\Omega$  に逆比例する。 $\Omega$  が大きくなれば、角運動量保存で得られる東西風も強くなり、温度勾配も増加するので、循環は小さくなる。

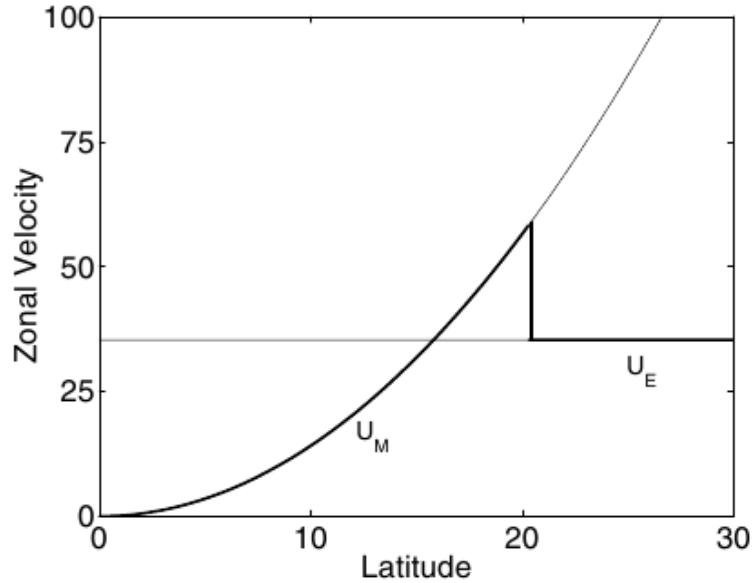


図 1.5: 放射平衡温度から得られる東西風  $u_e$  と, 角運動量保存から得られる東西風  $u$  の緯度分布. 用いたパラメータの値は 図 1.5 と同一のものである. 放射平衡場における東西風  $u_e$  は一定  $\Omega a R$  となっている. 角運動量保存で与えられる風速分布は太い実線となる.  $\theta < \theta_H$  に対しては, 角運動量保存から得られる解が成り立ち,  $\theta > \theta_H$  に対しては放射平衡場から得られる解が成り立つ.  $\theta_H$  において 2 つの解は不連続となる.

これらの依存性における指数 (例えば, (1.62) におけるべき乗の指数 1/2) は本質的なものではない.  $\bar{T}_e$  の関数形に依存しており, 異なる放射平衡温度分布を用いた場合には, それぞれの指数は異なってくる. 今の場合  $\bar{T}(\theta)$  の分布の方は, (1.52) のように角運動量保存則と温度風平衡によって確定しているからである. 試みに,

$$\beta[\bar{T}_e(\theta) - \bar{T}_e(0)] \approx \theta^n \quad (1.84)$$

とおくと, おおむね

$$\frac{\Omega^2 a^2}{gH} \theta_H^4 \approx \Delta_H \theta_H^n \quad (1.85)$$

によって  $\theta_H$  が定まり,

$$\theta_H \approx R^{\frac{1}{4-n}} \quad (1.86)$$

となる. しかし, 基本的にはパラメータに対する依存性は大きく変化するものではないと想像されるし, 過去の計算結果はいずれも上記を支持するものとなっている.

## 1.9 循環強度

赤道において熱力学方程式を考えるとハドレーセルの強度を見積もることができる.

$$w \frac{\partial T}{\partial z} \sim -\frac{T(0) - T_e(0)}{\tau} \quad (1.87)$$

大気の鉛直温度構造がおおむね放射強制によって決定されるなら.

$$\frac{\partial}{\partial z}(\beta T) \sim \frac{\Delta_V}{H} \quad (1.88)$$

となり, よって

$$w \frac{\Delta_V}{H} \sim \frac{\beta T_e(0) - \beta T(0)}{\tau}, \quad (1.89)$$

$$w \sim \frac{H}{\Delta_V} \frac{\beta T_e(0) - \beta T(0)}{\tau} \quad (1.90)$$

が得られる. よって, 循環の強度は, 放射平衡解からのずれに比例する. (1.90) の右辺は解自身から見積もることができ, (1.72) から

$$\beta \bar{T}_e(0) - \bar{T}(0) \approx \frac{5}{18} R \Delta_H \quad (1.91)$$

が得られる. よって, 鉛直速度は

$$w \approx \frac{H}{\Delta_V} \frac{5}{18} \frac{R \Delta_H}{\tau} \approx \frac{H}{\Delta_V} \frac{R \Delta_H}{\tau} \quad (1.92)$$

と与えられる.

質量の連続性を使うと, 上の式は南北速度を見積もる式に書き換えることができる. よって,

$$\frac{v}{a\theta_H} \sim \frac{w}{H} \quad (1.93)$$

とすると, これから,

$$v = a\theta_H \frac{w}{H} \approx a \left( \frac{5}{3} R \right)^{1/2} \frac{R \Delta_H H}{\tau \Delta_V} \frac{1}{H} \quad (1.94)$$

$$\approx \frac{R^{3/2} a \Delta_H}{\tau \Delta_V} \sim \frac{\Delta_H^{5/2}}{\Delta_V} \quad (1.95)$$

が得られる.

質量フラックス, あるいは流線関数  $\Psi$  は以下のように書かれる.

$$\Psi \approx vH \sim \frac{R^{3/2} a H \Delta_H}{\tau \Delta_V} \quad (1.96)$$



$\Psi$  は南北温度勾配が増加すると急激に増加する.

循環の overturning time  $\tau_d$  は以下のように見積もられる.

$$\tau_d = \frac{H}{w} \sim \frac{\tau \Delta_V}{R \Delta_H} \quad (1.97)$$

## 1.10 熱フラックス

ここでは, 温度の式を使って南北熱フラックスを見積もってみる. 更に, 熱フラックスを用いた各量の表現を書き下す.

### 1.10.1 熱フラックス

温度の式 (1.5) を鉛直平均すると

$$0 = -\frac{1}{H} \int_0^H \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta T v) dz - \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} (T w) dz - \frac{1}{H} \int_0^H \frac{T - T_e(\theta)}{\tau} dz, \quad (1.98)$$

$$0 = -\frac{1}{H} \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \int_0^H T v dz) - \frac{1}{H} [T w]_0^H - \frac{\bar{T} - \bar{T}_e(\theta)}{\tau} \quad (1.99)$$

右辺第二項は境界条件より 0 となる. よって,

$$\frac{1}{H} \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \int_0^H T v dz \right) = -\frac{\bar{T} - \bar{T}_e}{\tau}. \quad (1.100)$$

が得られる. この式は, 左辺の熱フラックスの収束を既に表現が得られている  $\bar{T}$  と  $\bar{T}_e$  で表したものとなっている.

$\theta_H$  が小さい場合 (あるいは  $R \ll 1$  となる場合) には  $\cos \theta \sim 1$  と近似できるので,

$$\frac{1}{H a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \int_0^H T v dz \right) \approx -\frac{\bar{T} - \bar{T}_e}{\tau}. \quad (1.101)$$

となる. この式に  $\beta$  をかけて  $\theta$  について積分すると, 熱フラックスの表現が以下のように得られる.

$$\beta \int_0^H T v dz \approx -\frac{H a}{\tau} \int_0^\theta \beta [\bar{T}(\theta) - \bar{T}_e(\theta)] d\theta \quad (1.102)$$

$$\approx -\frac{H a}{\tau} \frac{5}{18} R \Delta_H \int_0^\theta f_1 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right) d\theta \quad (1.103)$$

### 1.10.2 質量フラックス

$z = 0, H$  付近の幅  $\delta$  の境界層にのみ南北流  $v$  が存在するとする。境界層内の全質量フラックスを  $M$  とすると,

$$M = - \int_0^\delta v dz = \int_{H-\delta}^H v dz. \quad (1.104)$$

鉛直温度差は  $T_e$  における  $\Delta_v$  からずれないと仮定する。すると  $M$  は熱フラックスの表式から求まる。

$$\beta \int_0^H T v dz \approx \beta \left[ \int_0^\delta T v dz + \int_{H-\delta}^H T v dz \right] \quad (1.105)$$

$$\approx M \beta [T(H) - T(0)] \quad (1.106)$$

$$\approx M \beta [T_e(H) - T_e(0)] \quad (1.107)$$

$$\approx M \Delta_v. \quad (1.108)$$

よって,

$$M \approx \frac{1}{\Delta_v} \beta \int_0^H T v dz \quad (1.109)$$

$$\approx \frac{1}{\Delta_v} \left[ -\frac{Ha}{\tau} \frac{5}{18} R \Delta_H \int_0^\theta f_1 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right) d\theta \right] \quad (1.110)$$

$$\approx -\frac{5}{18} \frac{Ha}{\tau} \frac{\Delta_H}{\Delta_v} R \int_0^\theta f_1 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right) d\theta \quad (1.111)$$

### 1.10.3 運動量フラックス

$u(H) \approx \Omega a \theta^2$ ,  $u(0) \approx 0$  と  $M$  の表式を用いると,

$$\int_0^H u v dz \approx M [u(H) - u(0)] \quad (1.112)$$

$$\approx -\frac{5}{18} \frac{Ha}{\tau} \frac{\Delta_H}{\Delta_v} R \int_0^\theta f_1 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right) d\theta \cdot \Omega a \theta^2 \quad (1.113)$$

$$\approx -\frac{5}{18} \frac{\Omega a^2 H}{\tau} \frac{\Delta_H}{\Delta_v} R \theta^2 \int_0^\theta f_1 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right) d\theta. \quad (1.114)$$

## 1.10.4 地表面での風

運動量フラックスの収束が地表面における応力に等しいと仮定する. 境界条件 (1.8) より, 地表面における応力は  $Cu(0)$  となるので,

$$Cu(0) = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \int_0^H uvdz \right) \quad (1.115)$$

$$\approx -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -\frac{5}{18} \frac{\Delta_H}{\Delta_v} \frac{\Omega a^2 H}{\tau} R \theta^2 \int_0^\theta f_1 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right) d\theta \right] \quad (1.116)$$

$$\approx \frac{5}{18} \frac{\Omega a H}{\tau} \frac{\Delta_H}{\Delta_v} R \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \theta^2 \int_0^\theta f_1 \left( \frac{\theta}{\theta_H} \right) d\theta \right] \quad (1.117)$$

## 参考文献

- Held, I.M. and A.Y. Hou, 1980 : Nonlinear axially symmetric circulations in a nearly inviscid atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 515-533.
- Lindzen, R.S., 1990 : Dynamics in atmospheric physics. Cambridge University Press.
- Lindzen, R.S. and A. Y. Hou, 1988 : Hadley circulations for zonally averaged heating centered off the equator, *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2416-2427.
- Satoh, M., 1994 : Hadley circulations in radiative-convective equilibrium in an axially symmetric atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 1947-1968.
- Schneider, E.K., 1977 : Axially symmetric steady-state models of the basic state for instability and climate studies. II. Nonlinear calculations, *J. Atmos. Sci.*, **34**, 280-296.
- Vallis, G.K., 2005: Atmospheric and oceanic fluid dynamics: Fundamentals and large-scale circulation. Cambridge University Press
- 佐藤正樹, 1993: 軸対称モデルによる放射対流平衡: ハドレー循環の力学. 博士論文, 東京大学理学部.
- 林 祥介, 1992: 赤道大気上下結合, 第2章 ハドレー循環の力学, 気象研究ノート, 176, 15-49