Ripa の定理

浅水の 2 次元平行シアー流の安定性に関する積分定理〜 Ripa の定理を導く.

Perturbation energy equation

β 面浅水波方程式から出発する. x 方向に 一様な定常な流れの場 $u = U(y), h = H(y)$ に対する線型擾乱のしたがう方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{dU}{dy} - fv = -g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} + fu = -g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial h}{\partial x} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + v\frac{dH}{dy} = 0. \tag{3}$$

(1) $\times\, uH +$ (2) $\times\, vH$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}H\left(u^2+v^2\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}HU\left(u^2+v^2\right)\right\} + uvH\frac{dU}{dy} &= -guH\frac{\partial h}{\partial x} - gvH\frac{\partial h}{\partial y} \\ &= -\mathrm{div}(ghH\boldsymbol{v}) + gh\mathrm{div}\boldsymbol{v}\cdot H \\ &= -\mathrm{div}(ghH\boldsymbol{v}) - ghH\left(\frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial h}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2\right\} + \frac{\partial}{\partial x}U\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2\right\} + \mathrm{div}(ghH\boldsymbol{v}) + uvH\frac{dU}{dy} = 0. \tag{4}$$

全領域で積分し, 境界条件 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ を用いると

$$\int\!\!\int \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2\right\} dxdy = -\int\!\!\int uvH\frac{dU}{dy}dxdy. \tag{5}$$

ここで $E_p \equiv \int\!\!\int \left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2\right\} dxdy$ を perturbation energy という. (4) は E_p の時間変化を表す. æ

[0] /不安定/積分定理/Ripa1.tex, RipaM.tex

Perturbation Potential Vorticity equation

$-\dfrac{\partial}{\partial y}\times(1)+\dfrac{\partial}{\partial x}\times(2)$ より

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+U\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\left(f-\frac{dU}{dy}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+v\frac{d}{dy}\left(f-\frac{dU}{dy}\right)=0.$$

$\Omega\equiv f-\dfrac{dU}{dy}$ とする．(3) を用いて

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+U\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\Omega}{H}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{v}{H}\frac{dH}{dy}\right)+v\frac{d\Omega}{dy}=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{\Omega}{H}h\right)+U\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta-\frac{\Omega}{H}\right)-v\frac{\Omega}{H^2}\frac{dH}{dy}+v\frac{d\Omega}{dy}=0,$$

よって

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)q+\frac{dQ}{dy}v=0. \tag{6}$$

q は擾乱のポテンシャル渦度 $q\equiv\dfrac{\zeta-Qh}{H}=\dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}-Qh\right)$ である．Q は基本場のポテンシャル渦度 $Q\equiv\dfrac{\Omega}{H}=\dfrac{1}{H}\left(f-\dfrac{dU}{dy}\right)$ である．(6) は擾乱のポテンシャル渦度保存則である [2]．

(6) に $\dfrac{H^2Uq}{Q_y}$ をかけると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{H^2U}{Q_y}\frac{1}{2}q^2\right)+H^2Uqv=0.$$

全領域で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\frac{H^2U}{Q_y}\frac{1}{2}q^2dxdy=-\int\int H^2Uqvdxdy. \tag{7}$$

æ

---

[0] /不安定/積分定理/Ripa2.tex,Ripam.tex

[2] (6) は全ポテンシャル渦度保存則

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{h}\right)=0,$$

を線型化することによって得ることもできる．

Perturbation Momentum equation

(1) $\times\, h +$ (3) $\times\, u$ より

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(hu)}{\partial t} + U\frac{\partial(hu)}{\partial x} + hv\frac{dU}{dy} - fhv + u\mathrm{div}(H\boldsymbol{v}) = -gh\frac{\partial h}{\partial x},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)(hu) - Qhv + \mathrm{div}(uH\boldsymbol{v}) - H\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}gh^2\right) = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)(hu) - Qhv + \mathrm{div}(uH\boldsymbol{v}) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2\right\} + Hv\frac{\partial v}{\partial x} - Hv\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)(hv) + \mathrm{div}(uH\boldsymbol{v}) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2\right\} + H^2v\frac{1}{H}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{Q}{H}h) = 0,
\end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)(hu) + \mathrm{div}(uH\boldsymbol{v}) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2\right\} + H^2qv = 0. \tag{8}$$

x 方向に平行な boundary を持つ領域で積分することにより

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int hudxdy = -\int\int H^2qvdxdy. \tag{9}$$

hu を擾乱の運動量 (perturbation momentum) という.

また, (7) に $U(y)$ をかけると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)(huU) + \mathrm{div}(uHU\boldsymbol{v}) - \frac{\partial}{\partial x}U\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2\right\} + H^2Uqv - uvH\frac{dU}{dy} = 0.$$

全領域で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int huUdxdy = -\int\int UH^2qvdxdy + \int\int uvH\frac{dU}{dy}dxdy \tag{10}$$

æ

[0] /不安定/積分定理/Ripa3.tex,Ripam.tex

Ripa の定理

(2),(5),(8) を辺々加えることにより保存量が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2)+\frac{1}{2}gh^2-\frac{H^2U}{Q_y}\frac{1}{2}q^2+huU\right\}dxdy=0.$$

非積分項の 1,3,5 項を変型すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\left\{\frac{1}{2}g(h+\frac{U}{g}u)^2+\frac{1}{2g}(gH-U^2)u^2+\frac{1}{2}Hv^2-\frac{H^2U}{Q_y}\frac{1}{2}q^2\right\}dxdy=0.$$

もし $\forall y$ について $(*)$ $gH-U^2\geq 0$ かつ $(**)$ $\dfrac{U}{Q_y}\leq 0$ が成り立てば, 被積分関数は正定値となる. この積分量を一定に保ったまま, u,v,h が無制限に大きくなることはあり得ないので, $(*)$, $(**)$ が成り立てば安定である.

さらに, x 方向に一定速度 c で動く座標系から見たとき同じ議論を行なう. 変数変換 $x'=x-ct$ を行うと,

$$\frac{\partial}{\partial x}\to\frac{\partial}{\partial x'},\quad \frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}$$

と置き変わるので, 方程式 (1) の U が $U-c$ に変わるだけである. したがって (9) で $U\to U-c$ に置き変えた式が導びかれる. この座標系で見たときの安定のための十分条件は

$$gH-(U-c)^2\geq 0\quad \text{かつ}\quad \frac{U-c}{Q_y}\leq 0.$$

他の座標系から見たとき物理的性質は変わらないので, ある一つの座標系から見たとき (9) の被積分関数が正定値となることで安定となるに十分な条件となる.

したがって, 基本場 $U(y)$, $H(y)$ が安定であるための十分条件は,

領域内のすべての y について

$$(U-c)^2\leq gH\quad \text{かつ}\frac{U-c}{Q_y}\leq 0 \tag{11}$$

を満たすある c が存在することである

これを Ripa の定理という (Ripa,1983).

[0] /不安定/積分定理/Ripa4.tex, Ripam.tex

逆に不安定となるための必要条件は

すべての実数 c について

$$(U-c)^2 > gH \text{ あるいは } \frac{U-c}{Q_y} \quad > \quad 0 \tag{12}$$

となる y が領域内に存在することが必要である.

Ripa の定理は $g \to \infty$ の極限において 2 次元非発散シアー流における積分定理〜Fjørtoft, Rayleigh の定理に対応する.

$g \to \infty$ では $(U-c)^2 > gH$ が常に成り立たない. 安定となるには, 全ての実数 c について $\dfrac{U-c}{Q_y} > 0$ となることが必要である. c を U の範囲外の値にとるとき, $U-c$ は定符号である. したがって $\dfrac{U-c}{Q_y} > 0$ が成り立つには Q_y が領域内のどこかで符号をかえないといけない. すなわち, 変曲点が存在することが必要である. これが Rayleigh の変曲点定理である.

変曲点がただ一つしか存在しないとき, c を変曲点での速度 $U(y_s)$ にとると $\dfrac{U-U(y_s)}{Q_y}$ は定符号となる. 不安定であるにはこの符号が常に正である必要がある. これが Fjørtoft の定理である. æ

参考文献

Ripa,P.,1983 : General stability conditions for zonal flows in a one layer model on the β-plane or the sphere. *J.Fluid Mech.*,**126**,463-489

Satomura,T.,1981 : An investigation of shear instability in a shallow water. *J.Met.Soc.Japan*, **59**, 148-167

æ

[0] /不安定/積分定理/Ripar.tex, Ripam.tex