

慣性不安定 ～ 軸対称流の安定性問題

竹広真一

2016 年 1 月 4 日

この文章では、軸対称流 (渦) の安定性に関する数値実験の定式化とその結果の一例を紹介する。理論的な解説は地球流体電脳倶楽部理論マニュアルの「回転成層流体の基本特性」を参照のこと。

1 問題設定と支配方程式

回転する球内の非圧縮流体の回転軸に関して対称な流れ場を考える。非圧縮流体の支配方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi + \mathbf{F}^\nu, \quad (2)$$

ここで $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi)$ は速度ベクトル, $\boldsymbol{\Omega}$ は球の回転角速度, ρ, p は密度 (一定) と圧力, Φ は外力ポテンシャル, $\mathbf{F}^\nu = (F_r^\nu, F_\theta^\nu, F_\phi^\nu)$ は粘性力である。運動方程式の非線形項を書き換えると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi + \mathbf{F}^\nu. \quad (3)$$

ここで $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度ベクトルである。

以下、流れが軸対称である ($\partial_\phi = 0$) ことを仮定する。

連続の式を満たすべく、トロイダルポロイダルポテンシャル ψ, ϕ を導入する。軸対称な非圧縮速度場は

$$\mathbf{u} = \nabla \times [\psi(r, \theta) \mathbf{e}_r] + \nabla \times \nabla \times [\phi(r, \theta) \mathbf{e}_r] \quad (4)$$

と表される。ここで \mathbf{e}_r は動径方向の単位ベクトルである。運動方程式に $\mathbf{e}_r \cdot \nabla \times$, $\mathbf{e}_r \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用させると、

$$\frac{\partial}{\partial t} L_2 \psi = \mathbf{e}_r \cdot \nabla \times [\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] + \nu L_2 \nabla^2 \psi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_2 \nabla^2 \phi = \mathbf{e}_r \cdot \nabla \times \nabla \times [\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] + \nu L_2 \nabla^2 \nabla^2 \phi. \quad (6)$$

2 実験設定

初期条件は

$$u_\phi = \Omega_0 s^2 \cdot e^{-s^2/\sigma^2}, \quad s = r \sin \theta \quad (7)$$

に対して u_r のランダムな微小擾乱を与えたものを与える。

3 実験結果

$\sigma = 0.5, \Omega_0 = 500, \Omega = 0, \nu = 10^{-4}$ の場合の計算結果を以下にしめす。渦の回転角速度が外側ほど遅くなっている外側領域で流れが不安定になっている。

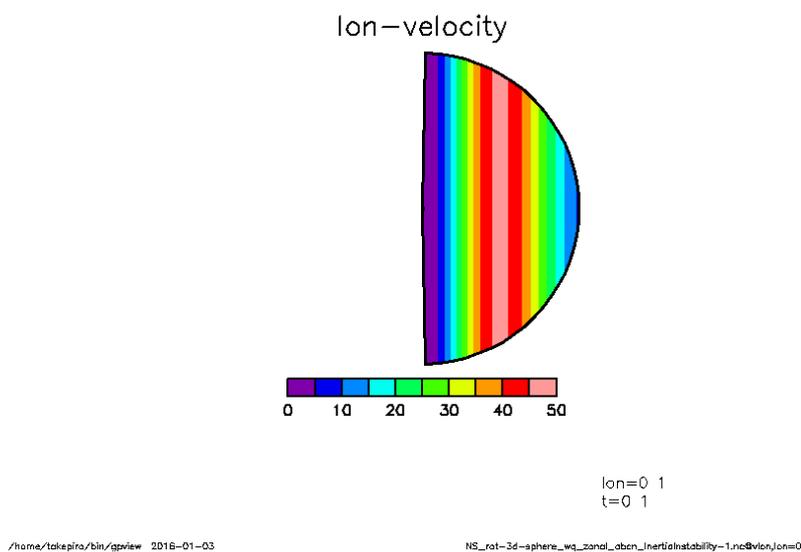
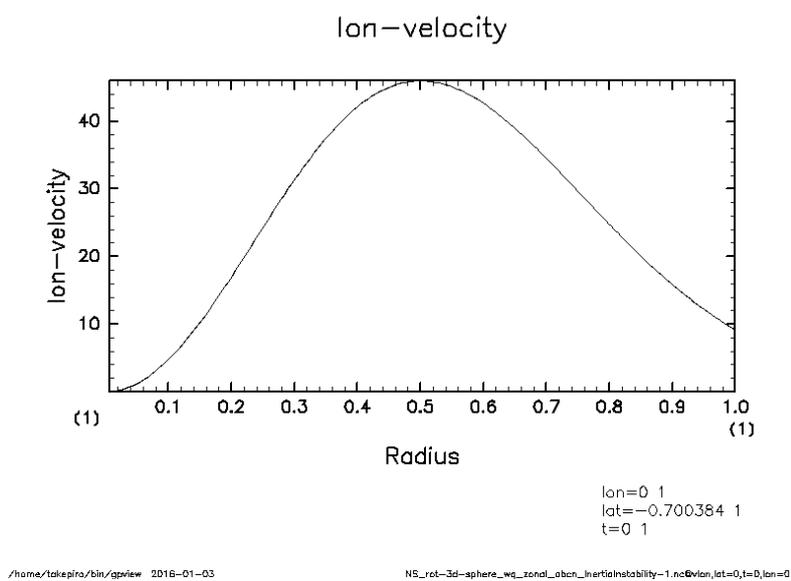


図 1: 初期渦の分布 (速度方位角成分)

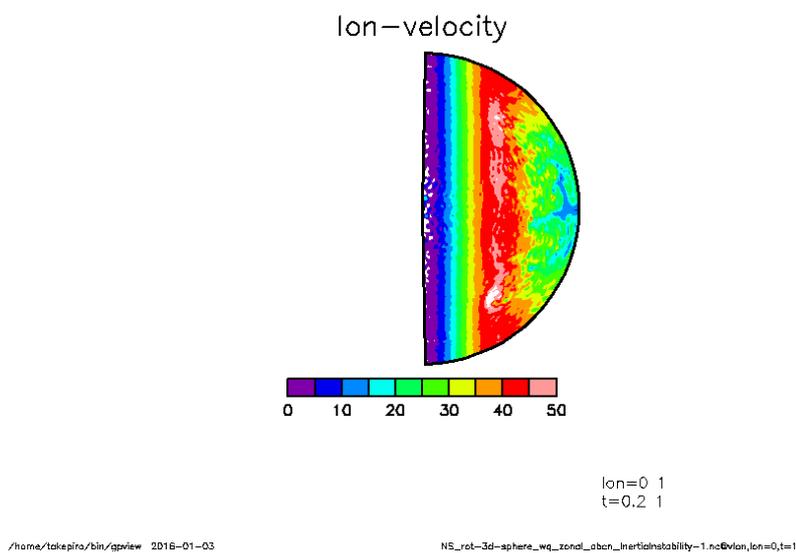


図 2: $t = 0.2$ での速度方位角成分の分布

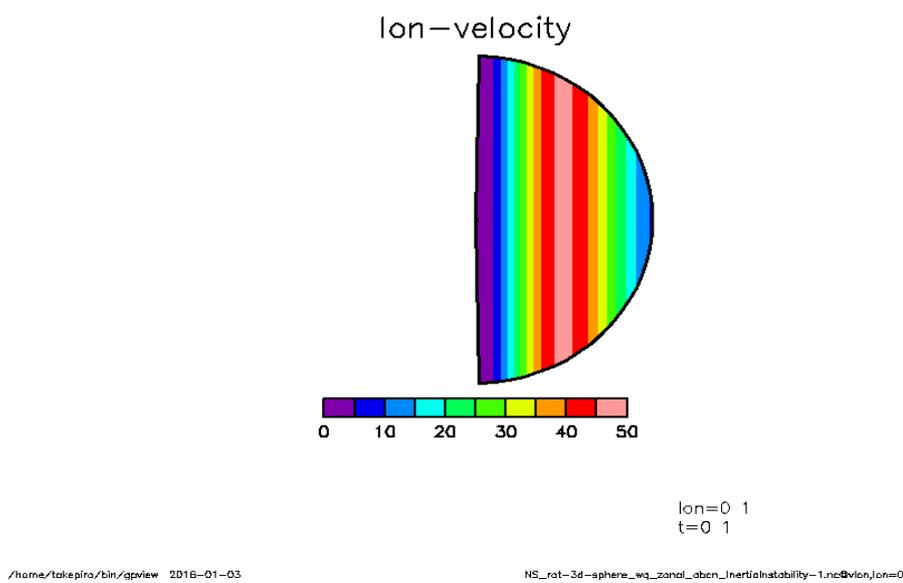


図 3: アニメーション