

傾圧不安定における固有値問題の考察

櫻本 直己

神戸大学理学部地球惑星科学科

流体地球物理学教育研究分野

要旨

傾圧大気中の波動がどのような場合に不安定となるのか、2つの場合で準地衝渦位方程式の固有値を求めることによって調べた。1つ目の $\beta = 0$ の場合では、解析的に固有値を求めることで、ある波長よりも短くなると不安定波は存在しないこと、また、成長率が最大となる場合の波長が 5000km 程度であることが分かった。2つ目の $\beta \neq 0$ の場合では、数値計算を行うことで、ほとんどの波長、基本流の鉛直傾度で不安定が起こっていることが分かった。また、成長率が最大となる波長は $\beta = 0$ の場合と同じく 5000km 程度であることが分かった。

目次

第 1 章	序論	3
第 2 章	準地衡渦位方程式	5
2.1	気圧座標への変換	5
2.2	準地衡渦度方程式の導出	8
2.3	熱力学的エネルギー方程式の近似	10
2.4	準地衡渦位方程式の導出	13
第 3 章	不安定問題: Eady 問題	14
3.1	不安定問題の定式化	14
3.2	固有値解析	16
第 4 章	不安定問題: Green 問題	25
4.1	不安定問題の定式化	25
4.2	離散化	27

4.3	数値計算	30
第 5 章	結論	33
付録		34
付録 A	$\tilde{\sigma}$ の最大値	34
謝辞		36
参考文献		37

第1章

序論

高層天気図を見ると、偏西風帯が南北に波打っている様子がわかる。この波の中には様々な波動が含まれているが、その中に波長が約数千 km に及ぶ傾圧不安定波と呼ばれる波動がある。この波動は移動性高気圧や温帯低気圧と結びついて日々の天気に影響を与えている。

本研究では、傾圧大気中^{*1}の波動がどのような場合に不安定となるのか、2つの場合で準地衝渦位方程式の固有値を求めることによって調べる。

本論文の構成を説明する。1章である本章は序論であり、最後に次章で用いる記号を示す。2章では、準地衝渦位方程式の導出を示す。3章では $\beta = 0$ の場合、Eady モードの場合の固有値解析を行う。4章では $\beta \neq 0$ の場合、Green モードの場合の固有値を、数値計算によって求める。5章では、まとめと今後の課題を示している。

^{*1} 傾圧大気とは、圧力が同じ面、等圧面と、密度が一定の面、等密度面が交わっている大気のことである。密度と温度は気体の状態方程式で関係づけることができるので、等圧面と等温面が交わっている大気とすることもできる。

表 1.1: 2章で用いる記号

x	東西方向. 東向きを正とする.
y	南北方向. 極向きを正とする.
Z	鉛直高度. 上向きを正とする.
$\frac{D}{Dt}$	Z 座標でのラグランジュ微分.
g	重力加速度. 定数.
u	東西方向の速度.
v	南北方向の速度.
p	圧力.
f	コリオリパラメータ.

第 2 章

準地衡渦位方程式

この章では, 基礎方程式の圧力座標への変換, 準地衡渦度方程式の導出を行い, 準地衡渦位方程式を導出する.

2.1 気圧座標への変換

β 平面上の Z 座標で非粘性の水平方向の運動方程式は

$$\frac{Du}{Dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2)$$

である. 鉛直方向には静水圧平衡

$$\frac{\partial p}{\partial Z} = -\rho g \quad (2.3)$$

が成り立っているとする*1. 微分の連鎖律と静水圧の関係より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_p &= \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_Z + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_p \frac{\partial p}{\partial Z} \\ \Leftrightarrow 0 &= \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_Z - \rho g \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_p \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_Z &= \rho g \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_p \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる. 同様に

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_Z = \rho g \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_p \quad (2.5)$$

となる. ここでジオポテンシャル $\Phi = gZ$ を導入すると (2.1), (2.2) は

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= fv - g \frac{\partial Z}{\partial x} \\ &= fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.7)$$

である. 気圧座標での鉛直速度 ω を

$$\begin{aligned} \omega \equiv \frac{Dp}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z} \\ &= \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p - g\rho w \end{aligned} \quad (2.8)$$

*1 鉛直方向の運動方程式は

$$\frac{Dw}{Dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Z}$$

である. ここで, 総観規模での水平速度 U , 鉛直速度 W , 水平スケール L , 鉛直スケール H を

$$U \sim 10\text{m/s}$$

$$W \sim 1\text{cm/s}$$

$$L \sim 10^6\text{m}$$

$$H \sim 10^4\text{m}$$

として大きさを見積もると

$$\begin{aligned} U \frac{W}{L} &\sim g + \frac{P_0}{\rho H} \\ 10^{-5} & \quad 10 \quad 10 \end{aligned}$$

となるため, 鉛直方向には静水圧平衡が成り立っていると近似することができる.

と定義する。総観規模の運動として大きさを見積もると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &\sim 10 \text{ hPa/d} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla p &\sim (1 \text{ m/s})(1 \text{ Pa/km}) \sim 1 \text{ hPa/d} \\ g\rho w &\sim 100 \text{ hPa/d}\end{aligned}$$

なので

$$\omega = -\rho g w \quad (2.9)$$

がよい近似として成り立つ。この ω を用いて、(2.6) と (2.7) におけるラグランジュ微分は

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

と定義する。

Z 座標における連続の式は、 δM を微小体積要素の質量とすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta M} \frac{D}{Dt}(\delta M) &= \frac{1}{\rho \delta V} \frac{D}{Dt}(\rho \delta V) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt}(\delta V) = 0\end{aligned} \quad (2.10)$$

である。ここで微小体積要素の体積は $\delta V = \delta x \delta y \delta Z$ なので、

$$\begin{aligned}\lim_{\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt}(\delta V) \right] &= \lim_{\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta x} \frac{D\delta x}{Dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{D\delta y}{Dt} + \frac{1}{\delta Z} \frac{D\delta Z}{Dt} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial Z}\end{aligned} \quad (2.11)$$

より (2.10) は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) = 0 \quad (2.12)$$

と書ける。圧力座標では $\delta p = -\rho g \delta Z$ なので、(2.10) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho \delta V} \frac{D}{Dt}(\rho \delta V) &= \frac{g}{\delta x \delta y \delta p} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\delta x \delta y \delta p}{g} \right) \\ &= \frac{1}{\delta x} \frac{D\delta x}{Dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{D\delta y}{Dt} + \frac{1}{\delta p} \frac{D\delta p}{Dt} \\ &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta \omega}{\delta p} = 0\end{aligned} \quad (2.13)$$

であり, (2.11) と同様にして $\delta x, \delta y, \delta p \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.14)$$

となる.

静水圧の関係は, ジオポテンシャルの定義から

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} \quad (2.15)$$

となる.

2.2 準地衡渦度方程式の導出

前節において導出した, β 平面上の圧力座標系における支配方程式系を用いて準地衡渦度方程式を導出する:

- 運動方程式

$$\frac{Du}{Dt} = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.6)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (2.7)$$

- 連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (2.14)$$

- 静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}. \quad (2.15)$$

まず, 水平速度を地衡風成分 u_g と非地衡風成分 u_a に分解する:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_a. \quad (2.16)$$

地衡風平衡が成り立っている条件では, $|u_g| \gg |u_a|$ である. このとき,

$$\frac{Du}{Dt} \simeq \frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} \equiv \frac{D_g}{Dt} u_g, \quad (2.17)$$

$$\frac{Dv}{Dt} \simeq \frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} \equiv \frac{D_g}{Dt} v_g, \quad (2.18)$$

と書ける. また, $f = f_0 + \beta y$ (ただし, $f_0 \gg \beta y$) とすると,

$$fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \simeq (f_0 + \beta y)v_g + f_0 v_a - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.19)$$

$$-fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \simeq -(f_0 + \beta y)u_g - f_0 u_a - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (2.20)$$

となる. (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) より, (2.6), (2.7) は

$$\frac{D_g}{Dt} u_g = (f_0 + \beta y)v_g + f_0 v_a - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.21)$$

$$\frac{D_g}{Dt} v_g = -(f_0 + \beta y)u_g - f_0 u_a - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (2.22)$$

となる.

地衡風は非発散であることより

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \quad (2.23)$$

を用いると, 連続の式 (2.14) は

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.24)$$

となる.

(2.21) を y で偏微分し, (2.22) を x で偏微分したものの差をとると, (2.24) より,

$$\begin{aligned} \frac{D_g}{Dt} \zeta_g + v_g \beta &= -f_0 \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) \\ &= f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる. (2.25) は準地衡渦度方程式と呼ばれる. ここで, 地衡流渦度 ζ_g は

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}$$

である.

また, (2.9) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial p} &= \frac{\partial Z}{\partial p} \frac{\partial}{\partial Z} (-\rho g w) \\ &= -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial}{\partial Z} (-\rho g w) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z} (\rho w)\end{aligned}\tag{2.26}$$

なので (2.25) を Z 座標で表すと

$$\frac{D_g}{Dt} \zeta_g + v_g \beta = \frac{f_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z} (\rho w)\tag{2.27}$$

となる.

2.3 熱力学的エネルギー方程式の近似

(2.27) の左辺を変形するために, 熱力学的エネルギー方程式の近似を行う. まず圧力と密度, 速度を基本場と摂動の和で表現する. 基本場は添字 0 をつけて表し, 摂動はプライムをつけて表す:

$$\begin{aligned}p &= p_0(Z) + p'(x, y, Z, t), \\ \rho &= \rho_0(Z) + \rho', \\ u &= U(Z) + u'_g, \\ v &= v'_g, \\ w &= w'.$$

基本場は静水圧平衡を満たし, Z のみに依存する. また, 摂動も静水圧平衡より

$$\frac{\partial}{\partial Z} p' + g \rho' = 0\tag{2.28}$$

を満たす. (2.27) の左辺は

$$\begin{aligned}\frac{f_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z}(\rho w) &= \frac{f_0}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial}{\partial Z}(\rho_0 w + \rho' w) \\ &\simeq \frac{f_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial}{\partial Z}(\rho_0 w) \\ &\simeq \frac{f_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial Z}(\rho_0 w)\end{aligned}\quad (2.29)$$

となる. w は地衡流と比較すると小さく, ρ' も微小であることからこの2つの項の積は無視できる. また, p' を

$$p' = \rho_0(Z)gH\psi(x, y, Z, t)\quad (2.30)$$

と定義する. H はスケールハイト, ψ は水平方向には非発散の流線関数である.

エントロピー S と温位 $\theta = T(p_s/p)^{R/C_p}$ の関係, 理想気体の関係より,

$$\begin{aligned}S &= C_p \ln \theta \\ &= C_p \ln \left\{ T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}} \right\} \\ &= C_p \ln \left\{ \frac{p}{\rho R} \left(\frac{p_s}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}} \right\},\end{aligned}$$

と書ける. $\phi = S/C_p$ を定義すると

$$\begin{aligned}\phi &= S/C_p \\ &= \ln p - \ln \rho - \frac{R}{C_p} \ln p \\ &= \frac{C_v}{C_p} \ln p - \ln \rho \\ &\simeq \phi_0(Z) + \phi'\end{aligned}$$

と書ける. このとき, $|\phi'|/|\phi_0| \ll 1$ である. よって断熱の式は

$$\begin{aligned}\frac{DS}{Dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D\phi}{Dt} &= \frac{D_g}{Dt} \phi' + w \frac{\partial}{\partial z}(\phi_0 + \phi') \\ &\simeq \frac{D_g}{Dt} \phi' + w \frac{d\phi_0}{dZ} \\ &= \frac{D_g}{Dt} \phi' + wB = 0\end{aligned}\quad (2.31)$$

となる. ここで, $B = d\phi_0/dZ$ である.

次に, (2.28) に (2.30) を代入する.

$$gH \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \psi + gH \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial Z} + g\rho' = 0 \quad (2.32)$$

$\phi_0 = (C_v/C_p) \ln p_0 - \ln \rho_0$ を Z で偏微分すると

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial Z} = \frac{C_v}{C_p} \frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial Z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \quad (2.33)$$

(2.32) と (2.33) より,

$$\begin{aligned} H\psi \left(\frac{C_v}{C_p} \frac{\rho_0}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial Z} - \rho_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial Z} \right) + H\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \rho' &= 0 \\ -H\psi \frac{C_v}{C_p} \frac{1}{p_0} \rho_0 g - HB\psi + H \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{\rho'}{\rho_0} &= 0 \\ -\frac{C_v}{C_p} \frac{p'}{p_0} - HB\psi + H \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{\rho'}{\rho_0} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{C_v}{C_p} - \frac{\rho'}{\rho_0} &= H \frac{\partial \psi}{\partial Z} - HB\psi \end{aligned} \quad (2.34)$$

また,

$$\begin{aligned} \phi_0 + \delta\phi &= \frac{C_v}{C_p} \ln(p_0 + p') - \ln(\rho_0 + \rho') \\ &= \frac{C_v}{C_p} \left[\ln p_0 \left(1 + \frac{p'}{p_0} \right) \right] - \ln \left[\rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \right] \\ &\simeq \frac{C_v}{C_p} \left(\ln p_0 + \frac{p'}{p_0} \right) - \left(\ln \rho_0 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \end{aligned}$$

より, (2.34) は

$$\phi' = H \frac{\partial \psi}{\partial Z} - HB\psi \simeq H \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (2.35)$$

となる^{*2}. (2.31) より

$$w = -\frac{H D_g}{B Dt} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (2.36)$$

が得られる.

^{*2} Green(1960) で行われている近似だが, 正当性は不明である.

2.4 準地衝渦位方程式の導出

(2.30) より, 地衝流は ψ を用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_g &= \frac{1}{f_0 \rho_0} \mathbf{k} \times \Delta p \\ &= \frac{1}{f_0 \rho_0} \mathbf{k} \times \Delta p' \\ &= \frac{gH}{f_0} \mathbf{k} \times \Delta \psi \end{aligned} \quad (2.37)$$

と表現できる. (2.37) を用いて, (2.27) 左辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \frac{D_g}{Dt} \zeta_g &= \frac{D_g}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{gH}{f_0} \frac{D_g}{Dt} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

と書ける. また, (2.27) 左辺第 2 項は

$$\beta v_g = \frac{D_g}{Dt} \beta y, \quad (2.39)$$

(2.29) は, (3.18) より

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial Z} (\rho_0 w) &= \frac{f_0 w}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} + f_0 \frac{\partial w}{\partial Z} \\ &= -\frac{f_0 H}{\rho_0 B} \frac{D_g}{Dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} - \frac{f_0 H}{B} \frac{\partial}{\partial Z} \frac{D_g}{Dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \\ &= -\frac{D_g}{Dt} \left\{ \frac{f_0 H}{\rho_0 B} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{f_0 H}{B} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

(2.38), (2.39), (2.40) より (2.27) は

$$\begin{aligned} \frac{gH}{f_0} \frac{D_g}{Dt} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{D_g}{Dt} \beta y &= -\frac{D_g}{Dt} \left\{ \frac{f_0 H}{\rho_0 B} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{f_0 H}{B} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right\} \\ \iff \frac{D_g}{Dt} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\beta f_0}{gH} y + \frac{f_0^2}{gB} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

が得られる. (2.41) が準地衝渦位方程式である.

第3章

不安定問題: Eady 問題

この章では, 準地衝渦位方程式の定式化を行い, $\beta = 0$ の元で解析的に固有値を求める. 不安定問題の定式化, 方程式の解析の順に進めていく.

3.1 不安定問題の定式化

ψ を $\Psi + \psi$ として平均と摂動の和で置き換える. Ψ は平均流 $U(Z)$ を用いて

$$U(Z) = -\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (3.1)$$

と書ける. また, 平均流のある場合でのラグランジュ微分は

$$\frac{D_g}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.2)$$

となる. ψ を

$$\psi = \text{Re}[F(Z) \exp\{i\lambda(x - Ct)\} \cos \mu y] \quad (3.3)$$

とする. ここで, $F(Z)$ は ψ の位相と振幅を表現する複素関数で, C は, 位相速度 C_r と, 摂動の成長率 λC_i を表す C_i との和 $C = C_r + iC_i$ で書ける. また, 簡単のため各パラ

メータを以下のように無次元化する:

$$\begin{aligned}
 z &= Z/H \\
 u &= U(Z)/\Delta U \\
 c &= C/\Delta U \\
 k^2 &= \frac{gB}{f_0^2} H^2 (\lambda^2 + \mu^2) \\
 \kappa &= -\frac{H}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dZ} \\
 \gamma &= \frac{gB}{f_0^2} H^2 \frac{\beta}{\Delta U}
 \end{aligned}$$

ΔU : 典型的な速度差

ψ と Ψ に対応する q, Q を,

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{gB} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \\
 &= -(\lambda^2 + \mu^2) F \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y \\
 &\quad + \frac{f_0^2}{gB} \left(\frac{1}{H^2} F'' + \frac{1}{H\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} F' \right) \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y \\
 &= \frac{f_0^2}{gBH^2} (F'' - \kappa F' - k^2 F) \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{gB} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) \\
 &= \frac{f_0^2}{gBH^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{H}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

とする. u_g, v_g は

$$\begin{aligned}
 u_g &= -\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 &= \frac{gH}{f_0} \mu F \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \sin \mu y
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 v_g &= \frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
 &= \frac{gH}{f_0} i\lambda F \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

なので,

$$\begin{aligned}
\frac{D_g}{Dt}q &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) q \\
&= -i\lambda c \Delta U q + i\lambda u \Delta U q \\
&\quad + \frac{gH}{f_0} \mu i\lambda F \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \sin(\mu y) q \\
&\quad - \frac{gH}{f_0} i\lambda F \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos(\mu y) \frac{\partial q}{\partial y} \\
&= i\lambda \frac{f_0^2 \Delta U}{gBH^2} (u - c) (F'' - \kappa F' - p^2 F) \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D_g}{Dt}Q &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) Q \\
&= v_g \frac{f_0^2 \Delta U}{gBH^2} (u'' - \kappa u') \left(-\frac{f_0}{gH} \right) \\
&= i\lambda \frac{f_0^2 \Delta U}{gBH^2} (u'' - \kappa u') F \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y \quad (3.9)
\end{aligned}$$

以上より, (2.41) は

$$\begin{aligned}
\frac{f_0 \beta}{gH} v_g + \frac{D_g}{Dt}Q + \frac{D_g}{Dt}q &= \beta i\lambda F \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y \\
&\quad + i\lambda \frac{f_0^2 \Delta U}{gBH^2} (u'' - \kappa u') F \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y \\
&\quad + i\lambda \frac{f_0^2 \Delta U}{gBH^2} (u - c) (F'' - \kappa F' - k^2 F) \exp\{i\lambda(x - c\Delta Ut)\} \cos \mu y \\
&= 0 \\
\iff (u - c)(F'' - \kappa F' - k^2 F) + (\gamma + \kappa u' - u'')F &= 0 \quad (3.10)
\end{aligned}$$

となる. ここで, F' , u' は z の 1 回微分, F'' , u'' は z の 2 回微分を表す.

3.2 固有値解析

(3.10) に

$$\gamma = 0, \quad \kappa = 0, \quad u = z, \quad F' = 0 \quad (3.11)$$

を与る. また, 上端と下端に剛体壁を仮定し, 境界条件として

$$w|_{z=0,1} = 0 \quad (3.12)$$

を考える. このとき (3.10) は

$$(z - c)(F'' - k^2 F) = 0 \quad (3.13)$$

また, $z \neq c$ より

$$\begin{aligned} F'' &= k^2 F \\ \iff F &= a \exp(kz) + b \exp(-kz) \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる. ここで a, b は 0 以外の任意の定数である.

断熱の式 (2.31) を (2.35) で表すと

$$\frac{D_g}{Dt} \left(H \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) = \frac{D_g}{Dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -Bw \quad (3.15)$$

ψ を平均流と摂動の和として $\Psi + \psi$ と置き換える. 今,

$$\begin{aligned} U &= u\Delta U = z\Delta U = -\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \iff \Psi &= -\Delta U \frac{f_0}{gH} zy \end{aligned} \quad (3.16)$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{D_g}{Dt} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \psi) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{gH}{f_0} \frac{\partial}{\partial y} (\Psi + \psi) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \psi) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} + z\Delta U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \Delta U \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -Bw \\ \iff i\lambda\Delta U(c - z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + i\lambda\Delta U \psi &= Bw \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる. (3.17) に (3.14) を代入して境界条件を用いると

$$\begin{aligned} ck(a - b) + (a + b) &= 0 \quad (z = 0) \\ (c - 1)k(ae^k - be^{-k}) + (ae^k + be^{-k}) &= 0 \quad (z = 1) \\ \iff \begin{pmatrix} ck + 1 & 1 - ck \\ \{(c - 1)k + 1\}e^k & \{1 - (c - 1)k\}e^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

このとき、非自明な解を持つには行列式が 0 にならなければならない。従って、

$$\begin{aligned}
 & (ck + 1)\{1 - (c - 1)k\}e^{-k} - 1 - ck\{(c - 1)k + 1\}e^k = 0 \\
 \iff & \{1 + k - c(c - 1)k^2\}e^{-k} - \{1 - k - c(c - 1)k^2\}e^k = 0 \\
 \iff & -(e^k - e^{-k}) + k(e^k + e^{-k}) + c(c - 1)k^2(e^k - e^{-k}) = 0 \\
 \iff & c(c - 1)k^2 - 1 + k\frac{e^k + e^{-k}}{e^k - e^{-k}} = 0 \\
 \iff & c^2 - c - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\coth k = 0 \\
 \iff & c = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} - \frac{4}{k}\coth k} \right) \\
 \iff & c = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{k} \sqrt{\left(\frac{k}{2} - \coth \frac{k}{2}\right) \left(\frac{k}{2} - \tanh \frac{k}{2}\right)}. \tag{3.18.1}
 \end{aligned}$$

c が複素数になるための条件を考える。 $\coth(k/2)$ と $\tanh(k/2)$ の関数系をそれぞれ図 3.1 と図 3.2 に示す。図 3.2 より常に $k/2 - \tanh(k/2) > 0$ であることが分かる。

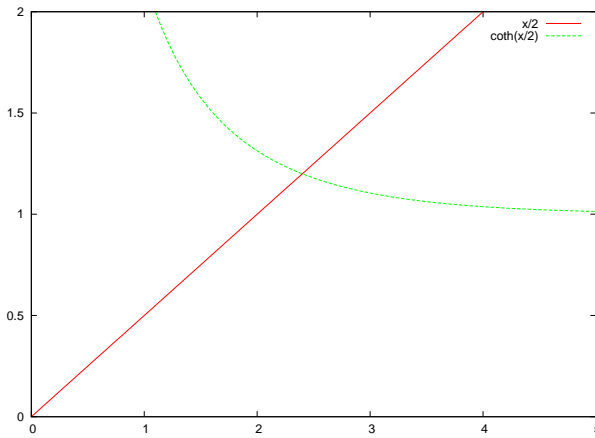


図 3.1: $k/2$, $\coth(k/2)$ の関数形

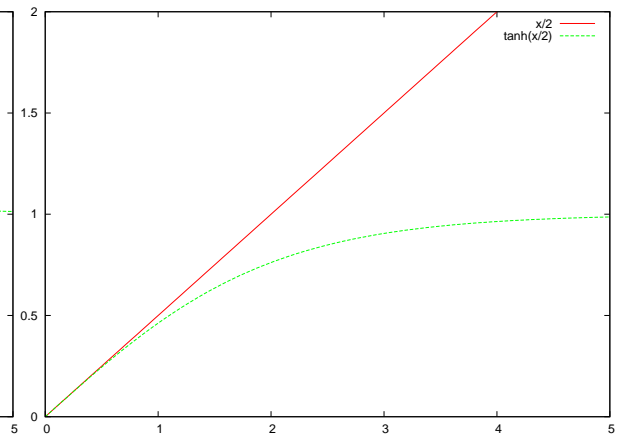


図 3.2: $k/2$, $\tanh(k/2)$ の関数形

従って $k/2 - \coth(k/2) < 0$ となる k の条件が必要で、ニュートン法で数値計算すると $k < k_c = 2.399$ が得られる。

今, $\lambda = \mu$ として東西方向と南北方向の波数が等しい波を考える. 成長率を

$$\sigma = \lambda c_i = \frac{\lambda}{k} \sqrt{\left(\coth \frac{k}{2} - \frac{k}{2}\right) \left(\frac{k}{2} - \tanh \frac{k}{2}\right)} \quad (3.19)$$

として, さらに, 変形半径 L_d

$$L_d = \frac{NH}{f_0} = \frac{\sqrt{gBH}}{f_0} \quad (3.20)$$

を用いて無次元化した $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \sigma L_d = \sqrt{\left(\coth \frac{k}{2} - \frac{k}{2}\right) \left(\frac{k}{2} - \tanh \frac{k}{2}\right)} \quad (3.21)$$

を考える.

最大となる成長率は, $\tilde{\sigma}$ を k で微分したものがゼロになる際の k の値を求めれば良い*1. ニュートン法を用いて数値計算すると $k_m = 1.61$, $\tilde{\sigma} = 0.31$ が得られる. このときの波長 L_m は

$$L_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{k_m} L_d \quad (3.22)$$

となり,

$$N \sim 10^{-2}/\text{s}, \quad H \sim 10\text{km}, \quad f_0 \sim 10^{-4}/\text{s}$$

とすると $L_d \sim 1000\text{km}$ となり $L_m \sim 5500\text{km}$ となる. また, $k < k_c = 2.399$ より, $L < L_c \sim 3700\text{km}$ となる波長の時, 成長率は 0 である.

(3.14) を

$$F(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz) \quad (3.23)$$

$$(A = a + b, \quad B = a - b)$$

とすると, $B = -A/ck$ より

$$F(z) = \cosh kz - \frac{1}{ck} \sinh kz = \cosh kz - \frac{c_r \sinh kz}{k|c|^2} + \frac{ic_i \sinh kz}{k|c|^2} \quad (3.24)$$

*1 詳細は付録を参照

となる. 振幅と位相はそれぞれ

$$\alpha(z) = \frac{1}{k|c|^2} \sqrt{(c_i \sinh kz)^2 + (k|c|^2 \cosh kz - c_r \sinh kz)^2} \quad (3.25)$$

$$\theta(z) = \tan^{-1} \left(\frac{c_i \sinh kz}{k|c|^2 \cosh kz - c_r \sinh kz} \right) \quad (3.26)$$

となる.

y 方向の議論は行わないので, $\cos \lambda y \rightarrow e^{i\lambda y}$ とすると流線関数 ψ は

$$\begin{aligned} \psi = e^{\lambda c_i t} \cos\{\lambda(x + y - c_r t)\} & \left\{ \cosh kz - \frac{c_r \sinh kz}{k|c|^2} \right\} \\ & - e^{\lambda c_i t} \sin\{\lambda(x + y - c_r t)\} \frac{c_i \sinh kz}{k|c|^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

となる. 子午面速度, 温度はそれぞれ

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \text{Re}[i\lambda\psi] \quad (3.28)$$

$$T = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \text{Re} \left[k \left(\sinh kz - \frac{1}{kc} \cosh kz \right) \exp\{i\lambda(x + y - ct)\} \right] \quad (3.29)$$

であり, 鉛直速度は (3.17) より,

$$\begin{aligned} \frac{w}{\Delta U} &= \text{Re} \left[\frac{i\lambda}{B} \left\{ (c - z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi \right\} \right] \\ &= \text{Re} \left[\frac{i\lambda}{B} \left\{ (c - z) k \left(\sinh kz - \frac{1}{kc} \cosh kz \right) - \left(\cosh kz - \frac{1}{kc} \sinh kz \right) \right\} \exp\{i\lambda(x + y - ct)\} \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

である. 図 3.7 から図 3.10 に $k_m = 1.61$ を用いた最も不安定な場合の流線関数, 温度, 子午面速度, 鉛直速度の鉛直構造を示す. いずれも横軸の x は $5/4$ 波長分, 縦軸の z は 0 から 1 までで示している. 実線は正の値, 破線は負の値である. 図 3.7 より, 負の値を持つ部分 (トラフ), 正の値を持つ部分 (リッジ) のそれぞれの軸が高度とともに西に傾いていることが分かる. 図 3.8 より, 暖気と寒気の軸は高度とともに東に傾いていることが分かる. 図 3.9 より上層のトラフの軸の東側では $v > 0$ となることが分かる. 図 3.10 より上層のトラフの軸の東側では $w > 0$ となることが分かる.

図 3.11 から図 3.14 に $k = 2.5$ を用いた安定な場合の鉛直構造を示す. この場合, いずれの図を見ても軸は傾かず直立していることが分かる.

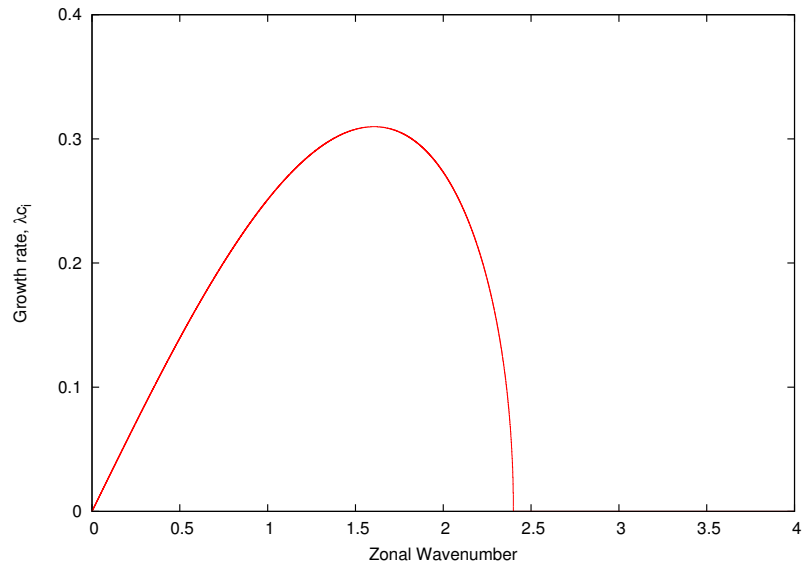


図 3.3: 成長率の波数依存性. 横軸はスケールした水平波数 k , 縦軸は無次元化した成長率である.

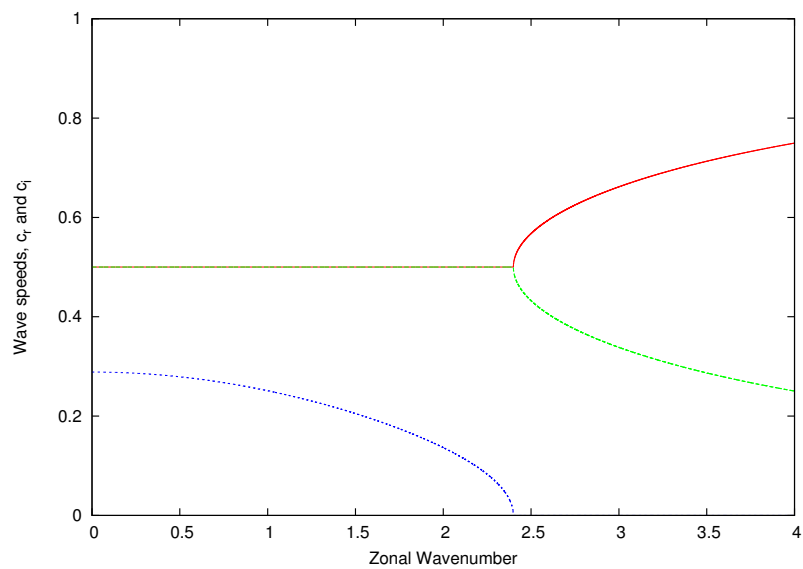


図 3.4: (3.18.1) の根の波数依存性. 横軸はスケールした水平波数 k , 縦軸は無次元化した波の速度, 赤と緑が c の実部 c_r , 青が c の虚部 c_i である.

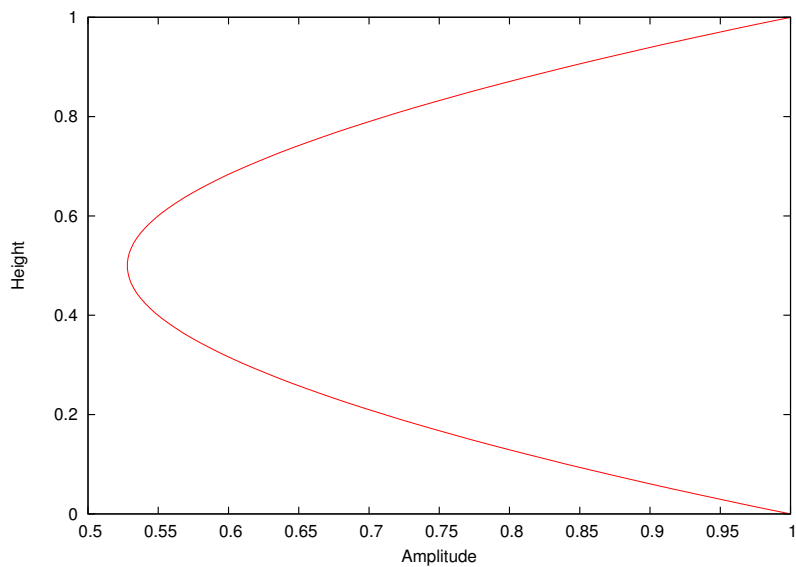


図 3.5: 渦位の振幅の高度依存性. 縦軸は無次元化した高さ, 横軸は振幅である.

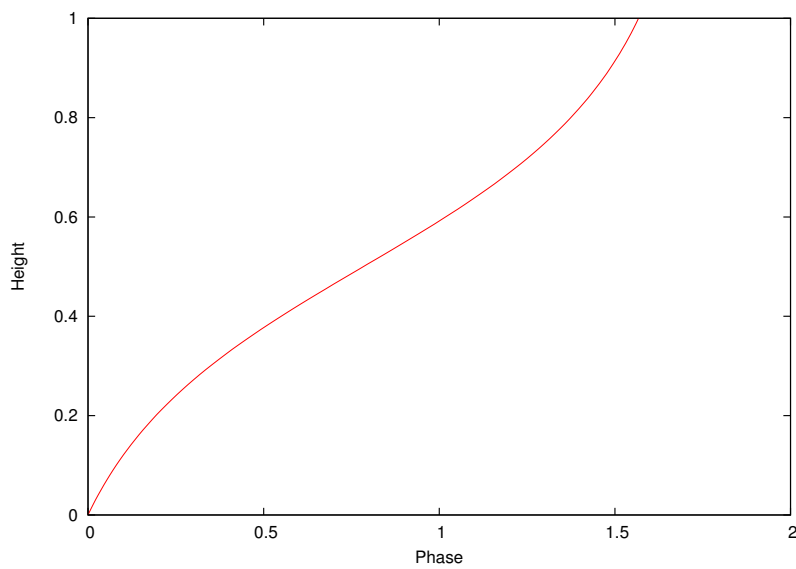


図 3.6: 渦位の位相の高度依存性. 縦軸は無次元化した高さ, 横軸は位相である.

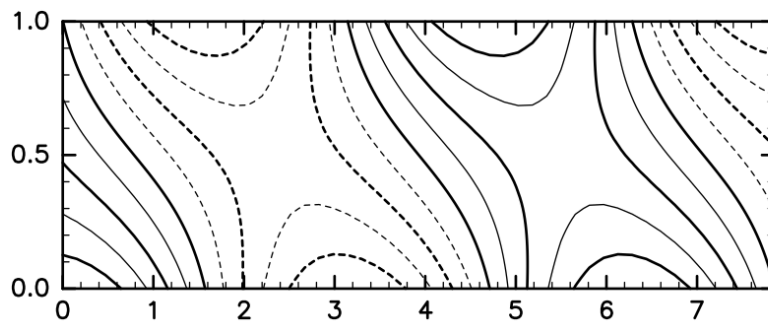


図 3.7: 流線関数の鉛直構造.

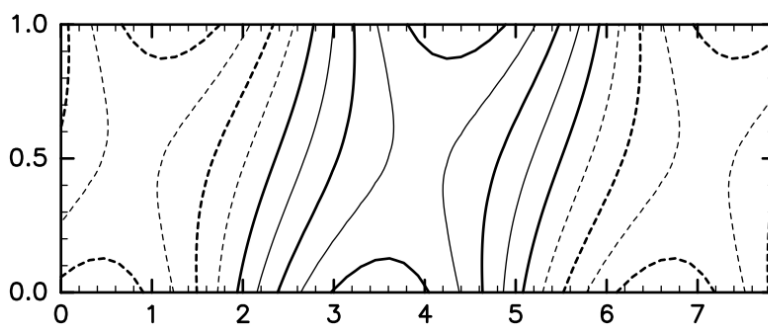


図 3.8: 温度の鉛直構造.

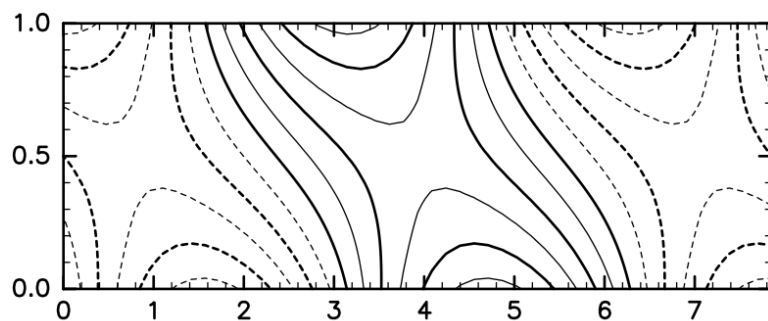


図 3.9: 子午面速度の鉛直構造.

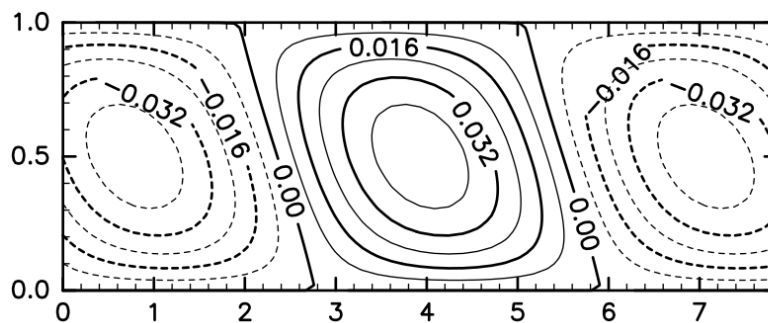


図 3.10: 鉛直速度の鉛直構造.

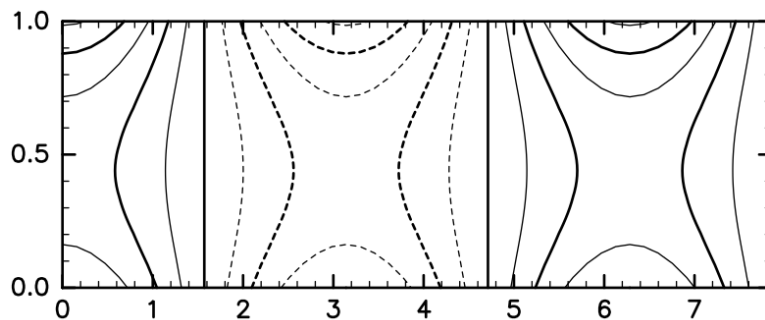


図 3.11: 流線関数の鉛直構造.

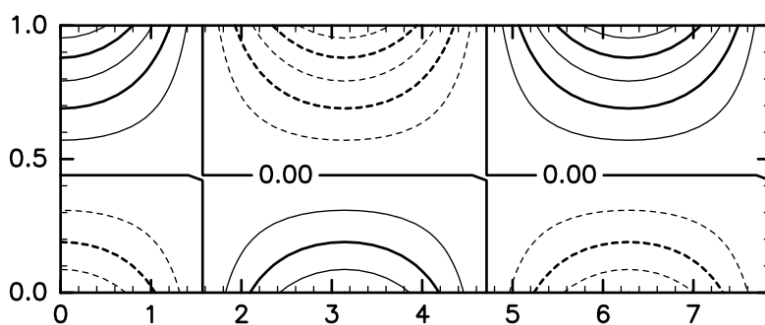


図 3.12: 温度の鉛直構造.

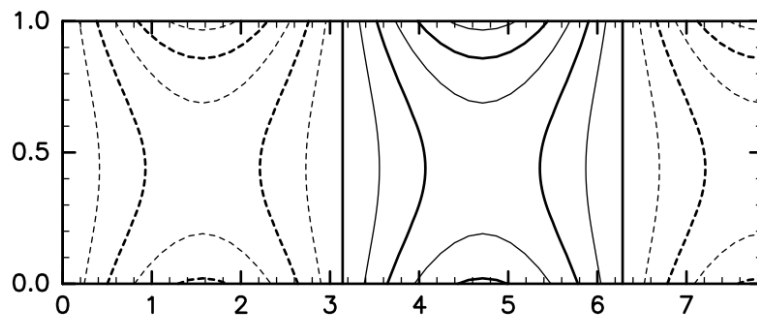


図 3.13: 子午面速度の鉛直構造.

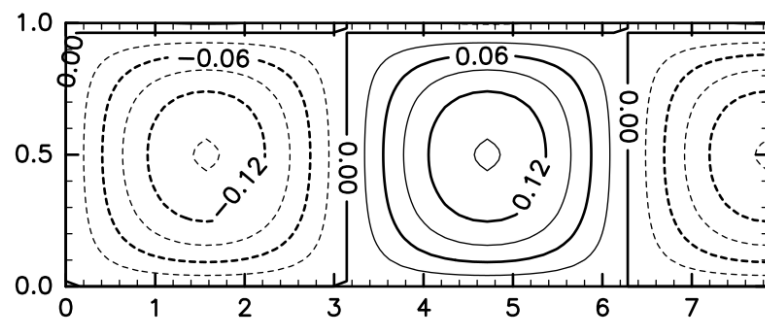


図 3.14: 鉛直速度の鉛直構造.

第 4 章

不安定問題: Green 問題

この章では, $\beta \neq 0$ の場合を考える. この場合, 解析的に解くことは不可能であるため数値計算により固有値を求める. 計算方法は, Green(1960) には書かれていなかったため, Hirota(1968) の方法を用いる.

不安定問題の定式化, 支配方程式の離散化, 数値計算の順に進めていく.

4.1 不安定問題の定式化

(2.25) をジオポテンシャル Φ の式として書き直す. Φ, ω を基本場と摂動の和として

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi', \quad (4.1)$$

$$\omega = \omega', \quad (4.2)$$

と表す. このとき,

$$u_g = U(p) + u'_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi'}{\partial y}, \quad (4.3)$$

$$v_g = v'_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \quad (4.4)$$

$$\zeta_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Phi_0 + \Phi') + \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\Phi_0 + \Phi') = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi', \quad (4.5)$$

となる. (2.25) は

$$\begin{aligned}
& \frac{D_g}{Dt} \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi' \right) + \beta \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = f_0 \frac{\partial}{\partial p} (\omega_0 + \omega'), \\
\iff & \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi' + \left\{ (U + u'_g) \frac{\partial}{\partial x} + v'_g \frac{\partial}{\partial y} \right\} \nabla^2 \Phi' + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \beta = f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} (\omega_0 + \omega'), \\
\iff & \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi' + U \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi' + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \beta = f_0^2 \frac{\partial \omega'}{\partial p}, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

となる. 温位は

$$\begin{aligned}
\theta &= T \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{c_p}} \\
&= \frac{p}{R} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{c_p}} \frac{1}{\rho} \\
&= \frac{p}{R} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{c_p}} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)
\end{aligned}$$

と書けることより, 断熱の式は

$$\begin{aligned}
& \frac{D_g \theta}{Dt} + \omega \frac{\partial \theta_0}{\partial p} = 0 \\
\iff & \frac{D_g}{Dt} \left\{ \frac{p}{R} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{c_p}} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right\} + \omega \frac{\partial \theta_0}{\partial p} = 0 \\
\iff & \frac{D_g}{Dt} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \omega \left\{ -\frac{R}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right\} = 0 \\
\iff & \frac{D_g}{Dt} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + S \omega = 0 \tag{4.7}
\end{aligned}$$

となる. ここで

$$S = \left\{ -\frac{R}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right\} \tag{4.8}$$

は圧力 p にのみ依存する静的安定度である.

(4.7) の Φ を (4.6) の導出と同様に基本場と摂動に分解すると

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p} (\Phi_0 + \Phi') + \left\{ (U + u'_g) \frac{\partial}{\partial x} + v'_g \frac{\partial}{\partial y} \right\} \frac{\partial}{\partial p} (\Phi_0 + \Phi') + S\omega' = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} + v'_g \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi_0}{\partial p} + S\omega' = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} + \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} (-f_0 U) + S\omega' = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} - \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial p} + S\omega' = 0 \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

となる. 以後, 簡単のためプライムは省略する.

4.2 離散化

線形化された方程式 (4.6) と (4.9) の有限差分近似に対応する多層モデルを図 4.1 に示す.

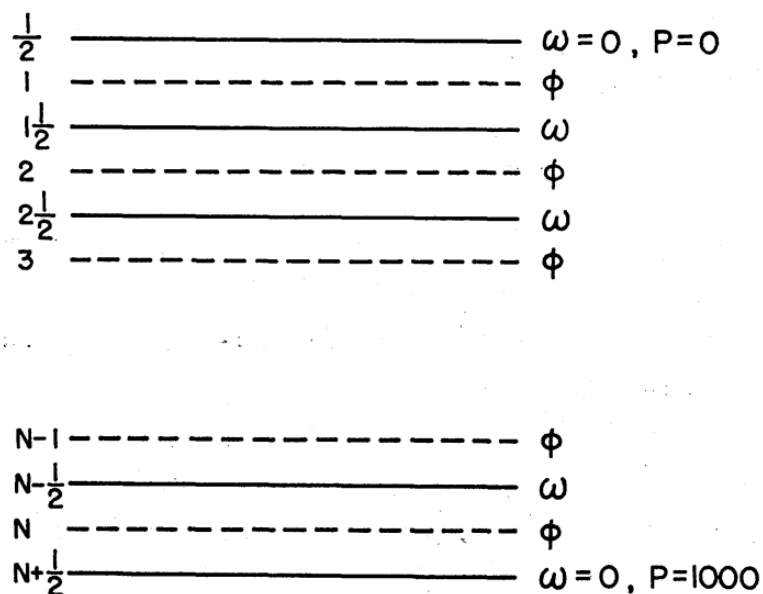


図 4.1: N 層モデルの略図 (Hirota, 1968). ω は鉛直速度で ϕ はジオポテンシャル.

高度 j に対応する渦度方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi_j + U_j \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi_j + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Phi_j = f^2 \frac{\omega_{j+1/2} - \omega_{j-1/2}}{\Delta p} \quad (4.10)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N)$$

であり, $j + 1/2$ に対応する断熱の式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{\Delta p} + U_{j+1/2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{\Delta p} + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi_{j+1} + \Phi_j}{2} + S \omega_{j+1/2} = 0 \\ \iff & \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{j+1} - \Phi_j) + U_{j+1/2} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{j+1} - \Phi_j) + \frac{\Lambda \Delta p}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{j+1} + \Phi_j) \\ & \qquad \qquad \qquad + S \Delta p \omega_{j+1/2} = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N - 1)$$

となる. ここで Δp は高度 j と $j + 1$ の間の気圧差で, Λ は鉛直シア $-\frac{\partial U}{\partial p}$ である. 境界条件として $\omega_{1/2} = 0$ と $\omega_{N+1/2} = 0$ を与えることで, N 個の Φ_j と $N - 1$ 個の $\omega_{j+1/2}$ に関する方程式が得られる. ω に関する式は

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Phi_l \right) = f^2 \frac{\omega_{j+1/2} - \omega_{1/2}}{\Delta p} \\ \iff & \omega_{j+1/2} = \frac{\Delta p}{f^2} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Phi_l \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

となるので, (4.11) から $\omega_{j+1/2}$ を消去すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{j+1} - \Phi_j) + U_{j+1/2} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{j+1} - \Phi_j) + \frac{\Lambda \Delta p}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{j+1} + \Phi_j) \\ & \qquad + S \frac{(\Delta p)^2}{f^2} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Phi_l \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

となる. また, (4.12) より

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi_j + U_j \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi_j + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Phi_j \right) = f^2 \frac{\omega_{N+1/2} - \omega_{1/2}}{\Delta p} = 0 \quad (4.14)$$

である. ジオポテンシャルの摂動は, 南北方向には関係がなく,

$$\Phi_j = \hat{\Phi}_j \exp[i\lambda(x - ct)] \quad (4.15)$$

で与えられると仮定する. ここで $\hat{\Phi}_j$ は振幅であり, λ は水平波数, c は位相速度と成長率を示す. U_j は地表の圧力 1000hPa と, $U_N = 0$ より

$$U_j = -\Lambda j \Delta p + 10^3 \Lambda \quad (4.16)$$

と表せる.

(4.16) と (4.15) を (4.13) に代入すると

$$\begin{aligned} & -i\lambda c(\hat{\Phi}_{j+1} - \hat{\Phi}_j) - \Lambda \left\{ \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta p - 10^3 \right\} i\lambda(\hat{\Phi}_{j+1} - \hat{\Phi}_j) + \frac{\Lambda \Delta p}{2} i\lambda(\hat{\Phi}_{j+1} + \hat{\Phi}_j) \\ & + S \frac{(\Delta p)^2}{f^2} \sum_{l=1}^j \{ -i\lambda c(-\lambda^2) \hat{\Phi}_l - \Lambda(l\Delta p - 10^3) i\lambda(-\lambda^2) \hat{\Phi}_l + \beta i\lambda \hat{\Phi}_l \} = 0 \\ \iff & -c(\hat{\Phi}_{j+1} - \hat{\Phi}_j) + \Lambda(10^3 - j\Delta p) \hat{\Phi}_{j+1} - \Lambda\{10^3 - (j+1)\Delta p\} \hat{\Phi}_j \\ & + S \frac{(\Delta p)^2}{f^2} \sum_{l=1}^j (c\lambda^2 - \Lambda(l\Delta p - 10^3)\lambda^2 + \beta) \hat{\Phi}_l = 0 \\ \iff & c \left(\hat{\Phi}_{j+1} - \hat{\Phi}_j - S \frac{(\Delta p)^2}{f^2} \sum_{l=1}^j k^2 \hat{\Phi}_l \right) \\ & = U_j \hat{\Phi}_{j+1} - U_{j+1} \hat{\Phi}_j + S \frac{(\Delta p)^2}{f^2} \sum_{l=1}^j (-\lambda^2 + \beta U_l) \hat{\Phi}_l \end{aligned} \quad (4.17)$$

が得られる. また, (4.14) も同様にして

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left(-i\lambda c(-\lambda^2) \hat{\Phi}_j + U_j i\lambda(-\lambda^2) \hat{\Phi}_j + \beta i\lambda \hat{\Phi}_j \right) = 0 \\ \iff & c \sum_{j=1}^N \lambda^2 \hat{\Phi}_j = \sum_{j=1}^N (\lambda^2 U_l - \beta) \hat{\Phi}_j \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる.

4.3 数値計算

(4.17) と (4.18) が $\hat{\Phi}_j$ に関する同次方程式なので

$$\begin{aligned}
 cD\hat{\Phi}_j &= B\hat{\Phi}_j \\
 \iff (B - cD)\hat{\Phi}_j &= 0 \\
 \iff (D^{-1}B - cE)\hat{\Phi}_j &= 0
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

と書ける. ここで B, D は

$$\begin{aligned}
 D_{jj} &= -1 - S\lambda^2 \frac{(\Delta p)^2}{f^2} \\
 D_{jj+1} &= 1 \\
 D_{jl} &= -S\lambda^2 \frac{(\Delta p)^2}{f^2} \quad (l < j) \\
 D_{Nk} &= \lambda^2 \\
 \\
 B_{jj} &= -U_{j+1} - S \frac{(\Delta p)^2}{f^2} (\lambda^2 U_j - \beta) \\
 B_{jj+1} &= U_j \\
 B_{jl} &= -S \frac{(\Delta p)^2}{f^2} (\lambda^2 U_l - \beta) \quad (l < j) \\
 B_{Nk} &= \lambda^2 U_k - \beta
 \end{aligned}$$

$$(j = 1, 2, \dots, N-1 \quad l = 1, 2, \dots, j-1 \quad k = 1, 2, \dots, N)$$

となる N 次の正方行列で, E は単位行列である.

今, $N = 20$ の鉛直 20 層を考え, c を $D^{-1}B$ の固有値として数値計算を行う. 各パラメータは次のように与える:

$$\begin{aligned}
 f &= 10^{-4} \text{ /sec,} \\
 S &= 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}^2 \cdot \text{Pa}^2.
 \end{aligned}$$

固有値を速度シア Λ と波長 L の関数として, 300×300 の格子点で計算した結果を次に示す. 図 4.2 は $\beta = 0$ /m · sec, 図 4.3 は $\beta = 1.6 \times 10^{-11}$ /m · sec の場合である. 縦軸は

基本流の鉛直傾度 $\Lambda(\text{m/sec} \cdot \text{Pa})$, 横軸は東西方向の波長 $L(\text{m})$, 図中の実線は成長率の等値線, 値は振幅が e 倍になる時間を日を単位として表している.

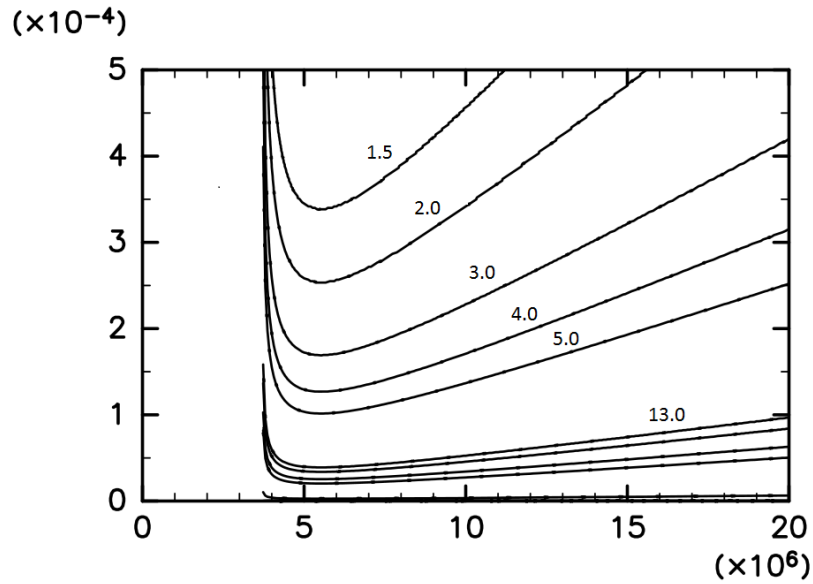


図 4.2: $\beta = 0$ の場合の傾圧不安定曲線

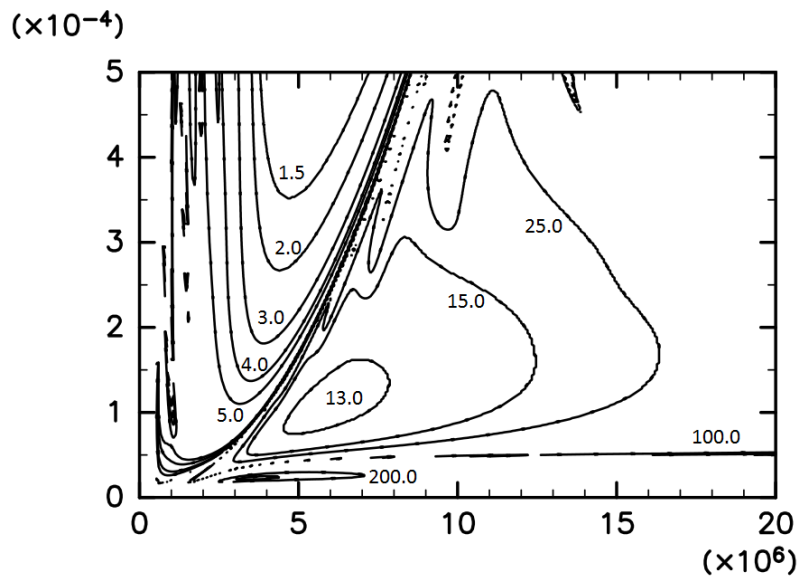


図 4.3: $\beta = 1.6 \times 10^{-11}$ の場合の傾圧不安定曲線

考察

解析的に求めた Eady の場合の図 3.3 と同様に, $\beta = 0$ の図 4.2 ではおよそ 3700km 以下で不安定が生じないことが確認できた. $\beta \neq 0$ の図 4.2 ではほとんどの波長, 基本流の鉛直シアで不安定が起こっていることが分かる. しかし, 成長率が最大となる波長は高々 5000km 程度のところで, Eady の場合とほぼ同じである.

第5章

結論

本研究では傾圧大気中の波動がどのような場合に不安定となるのか、準地衝渦位方程式に波型の解を代入し2つの場合で固有値を求めることによって調べた。

1つ目は $\beta = 0$ の場合で、解析的に固有値を求めた。結果、波長 3700km 程度よりも短くなると不安定波は存在しないこと、また、成長率が最大となる場合の波長が 5000km 程度であることが確認できた。

2つ目は $\beta \neq 0$ の場合で、有限差分近似を用いて鉛直方向に離散化し数値的に固有値を求めた。結果、ほとんどの波長、基本流の鉛直シアで不安定が起こっていることが確認できた。また、成長率が最大となる波長は $\beta = 0$ の場合と同じく高々 5000km 程度であることが分かった。

2つの場合で得られた、成長率が最大となる波長が 5000km 程度という結果は温帯低気圧の水平スケールとして妥当な値である。

付録

付録 A $\tilde{\sigma}$ の最大値

$\tilde{\sigma}$ の最大値を求めるには,

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial p} = 0$$

となる p を求めればよいが,

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^2}{\partial p} = 2\tilde{\sigma} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial p}$$

なので

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^2}{\partial p} = 0$$

となる p を求めても良い。このとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}^2}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 + 4 - \frac{4p}{\tanh p} \right) \\ &= 2p - 4 \frac{\cosh p}{\sinh p} - 4p \frac{1}{\sinh^2 p} \\ &= \frac{2p \sinh^2 p - 4 \cosh p \sinh p - 4p}{\sinh^2 p} = 0 \end{aligned}$$

であり, $\sinh^2 p \neq 0$ なので

$$p \sinh^2 p - 2 \cosh p \sinh p - 2p = 0$$

を満たす p が求めたい p_m である. 解析的には解くことができないのでニュートン法を用いて数値計算を行うと

$$p_m = 1.61$$

$$\tilde{\sigma}_m = 0.31$$

が得られる.

謝辞

本研究に関して、指導教官である林祥介教授、高橋芳幸准教授には研究内容の指針を示して頂き、岩山隆寛准教授には研究全体のご指導を頂きました。河合佑太氏には研究に詰まった際、幾度となく助言を頂きました。そして、多くのお力添えと励ましを頂きました、地球及び惑星大気科学研究室の皆様には深く感謝し、心よりお礼申し上げます。

なお、本論文を作成するにあたり、数値計算の結果を図に描写するために地球流体電腦ライブラリ、dcl-7.1.2 (<http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/>) を使用させて頂きました。dcl の維持開発に携わっている方々にも感謝し、心よりお礼申し上げます。

参考文献

- Green, J. S. A., 1960: A problem in baroclinic stability, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 86, 237-251pp.
- Hirota, I., 1968: On the dynamics of long and ultra-long waves in a baroclinic zonal current, J. Met. Soc. Japan, 46, 234-249pp.
- 小倉義光, 1999: 一般気象学 [第 2 版], 東京大学出版会, 308pp.
- James R. Holton., 2004: An Introduction to Dynamic Meteorology [Fourth Edition], Academic Press, 535pp
- Vallis, G. K., 2006: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 745 pp