Alfvén 波の伝播に関する考察

神戸大学 理学部 惑星学科　流体地球物理学教育研究分野 1543408s 香川 大輔

1. 研究対象

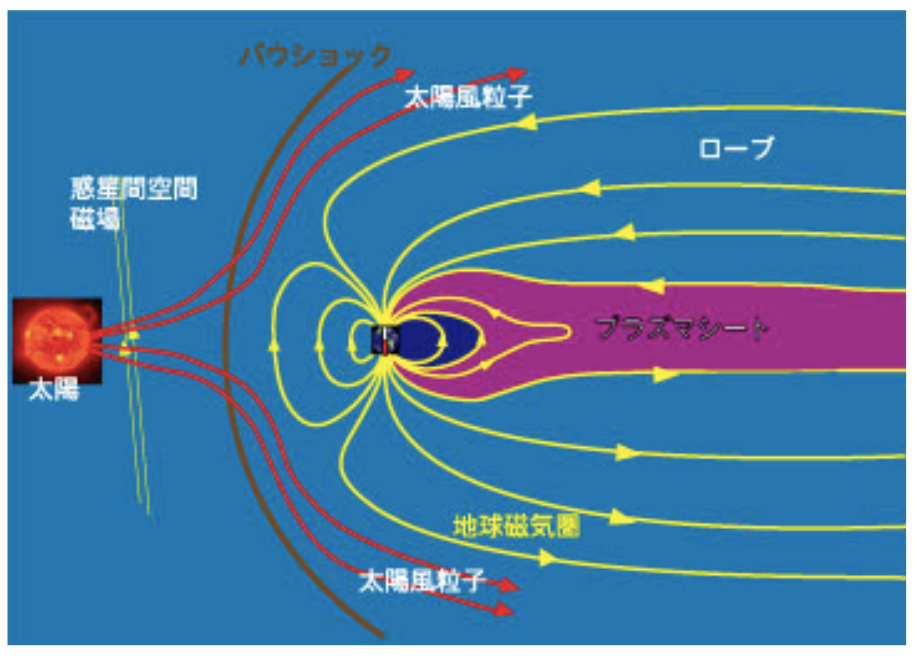

図1: 地球磁気圏の模式図 (引用: http://www.museum.kyushu-u.ac.jp/publications/special_exhibitions/PLANET/06/06-2.html)

- 地球は固有磁場を持つ
- 太陽 – 地球間の宇宙空間はプラズマで満たされている
  - * プラズマは気体分子が電離した状態
- プラズマと地球磁場が相互作用することにより, 様々な現象が生じる
  - * 地球磁場の変動, etc.

- 地球磁場は常に変動している
  - * 周波数の低いもの (1Hz ～ 1mHz 程度) がAlfvén 波として解釈される
- Alfvén 波
  - * Hannes Alfvén (1942) により発見された, プラズマ中を伝播する波の一つ
  - * 波長が大きく, 周波数が低い

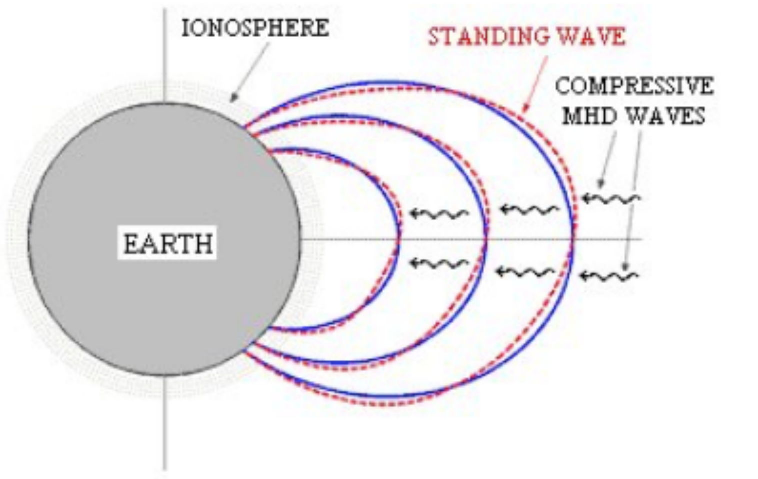

図 2: 地球磁場が変動する様子を示した模式図. 青: 磁場の基本状態, 赤: 磁場が変動したもの. (引用: http://roma2.rm.ingv.it/en/themes/22/magnetic_pulsations)

2. 研究目的

- Alfvén 波を物理的に理解するため, 線形化した基礎方程式から波の解を仮定して分散関係を求め, 基本的性質を考察する

3. 一流体近似の下で線形化した基礎方程式

- 磁気流体近似
  - * プラズマ集団を電磁気力が働く磁気流体とみなす
  - * 適用条件: 対象の時間・空間スケールがイオンサイクロトロン運動の周期・半径より大きい
- Alfvén 波の時間・空間スケールは, 磁気流体近似が適用できるほど大きい
  → 磁気流体近似を用いる
- 基礎方程式
  - * Maxwell 方程式: $\nabla\times\boldsymbol{E}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}$
    $\nabla\times\boldsymbol{B}_1 = \mu\boldsymbol{J}_1$
    $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0$
  - * 運動方程式: $\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\nabla p + \boldsymbol{J}_1\times\boldsymbol{B}_0$
  - * 連続の式: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0$
  - * Ohm の法則: $\boldsymbol{J}_1 = \sigma(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0)$

添字 0 ･･･ 時間と空間に一様で静止した状態
添字 1 ･･･ 時間と空間に依存した微小変動

$\boldsymbol{E}$: 電場
$\boldsymbol{B}$: 磁束密度
$\boldsymbol{v}$: 速度
ρ: 密度
$\boldsymbol{J}$: 電流密度
p: 圧力
μ: 透磁率
σ: 電気伝導率

4. 簡単化した Alfvén 波の波動方程式と伝播メカニズム

- 波の性質について考察する
  - * 仮定: 電気伝導率 $\sigma\to\infty$ (理想磁気流体)
    非圧縮な運動を伴う ($\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0$)
    磁場 $\boldsymbol{B}_0$ の方向は z 方向
  - * Ohm の法則で $\sigma\to\infty$ を適用すると, $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0 = 0$
  - * 単位体積あたりに働く Lorentz 力は, 磁場による圧力 (右辺第一項) と磁気張力 (右辺第二項) に分解することができる
    - $\boldsymbol{J}_1\times\boldsymbol{B}_0 = -\frac{1}{\mu}\nabla(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1) + \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_1$
  - * 運動方程式に ∇ をスカラー的にかけ, $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0$, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0$ を用いると, $\nabla^2(p + (\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1)/\mu) = 0$ を得る.
    - 任意関数をゼロとすると, $p + \frac{(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1)}{\mu} = 0$
  - * 運動方程式 → $\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_1$ ･･･ (a)
  - * Maxwell 方程式と Ohm の法則から誘導方程式が得られる
    - $\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} = (\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1$ ･･･ (b)

  → (a) と (b) から波動方程式が得られる ($v_A = B_0/\sqrt{\mu\rho_0}$ は Alfvén 速度)
    - $\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial t^2} = v_A^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}_1}{\partial t^2} = v_A^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}_1}{\partial z^2}$
    - $\boldsymbol{v}_1$ および $\boldsymbol{B}_1$ が z 方向 ($\boldsymbol{B}_0$ の方向) に速度 v_A で伝播する波を表す
      → **Alfvén 波**

- Alfvén 波の伝播のメカニズム (図 3)
  1. y 方向に速度の変動 $\boldsymbol{v}_1$ が生じたとする
  2. $-\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0$ の方向 ($-x$ 方向) に電場 $\boldsymbol{E}_1$ を形成し, その方向に電流 $\boldsymbol{J}_1$ が生じる
  3. $\boldsymbol{J}_1\times\boldsymbol{B}_0$ の方向 ($-y$ 方向, $\boldsymbol{v}_1$ の逆方向) に磁気張力 $\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_1$ が生じる
  4. $\boldsymbol{v}_1$ は磁気張力により $-y$ 方向に引き戻される

➢ **Alfvén 波は磁気張力を復元力とする波である**

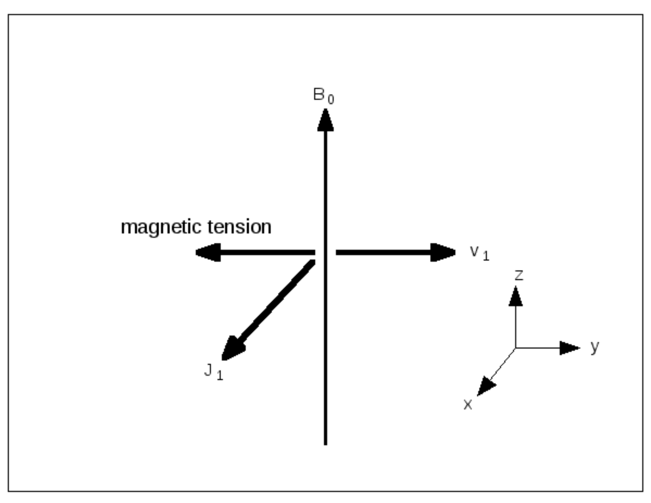

図 3: Alfvén 波の伝播のメカニズムを示した略図

4-1. 一流体近似の下での Alfvén 波の分散関係

- 微小変動 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{B}_1, \rho_1$ は
  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{B}_1, \rho_1 \propto \exp(i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t))$
  を満たす平面波であるとする
- 波の解を仮定して得られる式

$$\left\{\frac{(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})^2}{\mu\rho_0} - \omega^2\right\}\boldsymbol{v}_1 + \left\{\left(\frac{B_0^2}{\mu\rho_0} + a^2\right)\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})}{\mu\rho_0}\right\}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_1) - \frac{(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{v}_1)}{\mu\rho_0}\boldsymbol{k} = 0 \quad \cdots (\mathrm{i})$$

  から, 速度の擾乱 $\boldsymbol{v}_1$ の方向によって分類

$\boldsymbol{\omega}$: 周波数
$\boldsymbol{k}$: 波数ベクトル
k_z: 磁場に沿った波数
$k_\perp$: 磁場に垂直な波数
θ : 磁場と波数ベクトルのなす角
$a = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2}$:音速

① $\boldsymbol{v}_1$ が $\boldsymbol{B}_0$ と $\boldsymbol{k}$ に垂直である場合
- (i) において $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0$ かつ $\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0$
- 分散関係: $\omega^2 = v_A^2 k^2\cos^2\theta$
  → **シアー Alfvén 波**

② $\boldsymbol{v}_1$ が $\boldsymbol{B}_0$ と $\boldsymbol{k}$ の作る平面上にある場合
- (i) において $\boldsymbol{v}_1 = v_{1z}\mathbf{e}_z + v_{1k}\mathbf{e}_k$ とする (図 4)
- 分散関係: $\omega^4 - k^2(v_A^2 + a^2)\omega^2 + k^4a^2v_A^2\cos^2\theta = 0$
  → **圧縮モード Alfvén 波**
- 分散関係は二つの正の実数解を持つ
  1. 位相速度が大きい方: $\omega^2 = \frac{1}{2}k^2\left[v_A^2 + a^2 + \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2a^2\cos^2\theta\}^{1/2}\right]$
     → **速進波**
  2. 位相速度が小さい方: $\omega^2 = \frac{1}{2}k^2\left[v_A^2 + a^2 - \{(v_A^2 + a^2)^2 - 4v_A^2a^2\cos^2\theta\}^{1/2}\right]$
     → **遅進波**

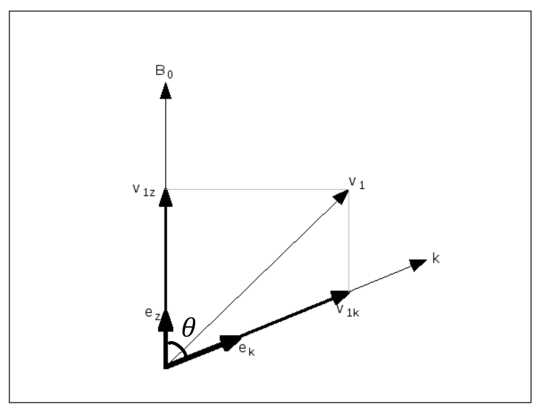

図 4: $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_k$ はそれぞれ $z, \boldsymbol{k}$ 方向の単位ベクトル. $\boldsymbol{v}_1$ を両成分に分解する

- 一流体近似の下では, 分散関係は $k_\perp$ に依存しない
  - * 磁場に沿った電子の力学は無視できる → ***磁場に平行な電場を無視できる***

- シアー Alfvén 波, 速進波, 遅進波の位相速度と群速度はともに θ の関数
- 位相速度と群速度を図示し, それらが θ によってどう変化するのかを確かめる

■ **位相速度図**

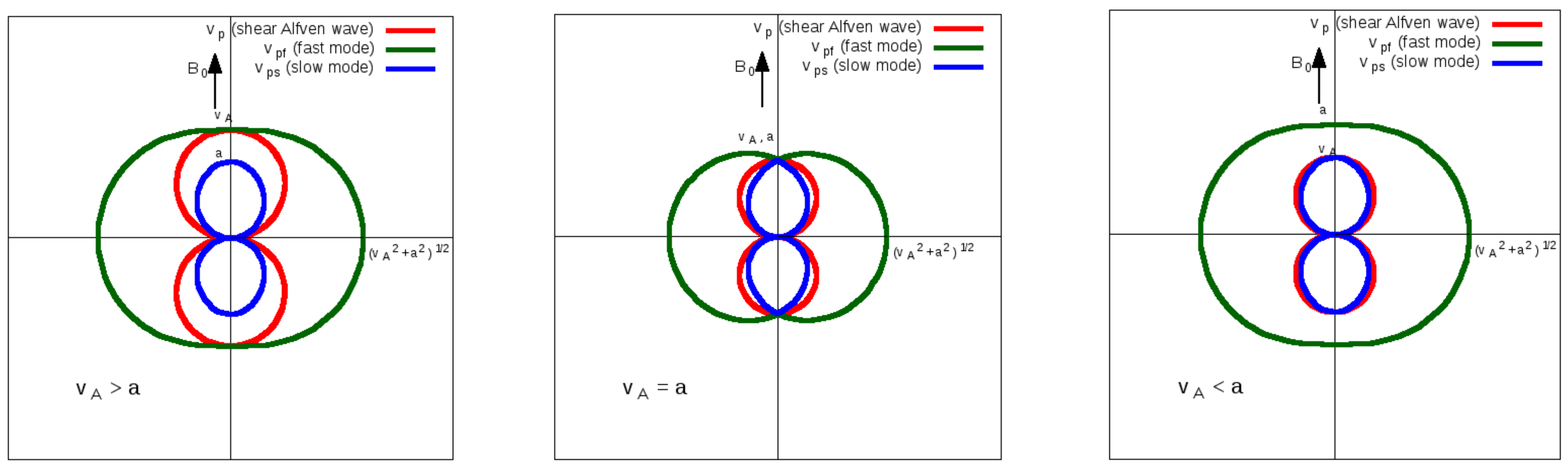

図 5: シアー Alfvén 波 (赤), 速進波 (緑), 遅進波 (青) の位相速度図. (左: $v_A > a$, 中: $v_A = a$, 右: $v_A < a$) 縦軸は磁場の方向, 横軸は磁場に垂直な方向である.

- シアー Alfvén 波と遅進波は, 磁場と垂直な方向には伝播しない
- 速進波は磁場と垂直な方向に位相速度 $(v_A^2 + a^2)^{1/2}$ で伝播し, これを特に磁気音波という
- 磁場に沿った方向に位相速度 v_A で伝播する波を変形 Alfvén 波, a で伝播する波を変形音波という

■ **群速度図**

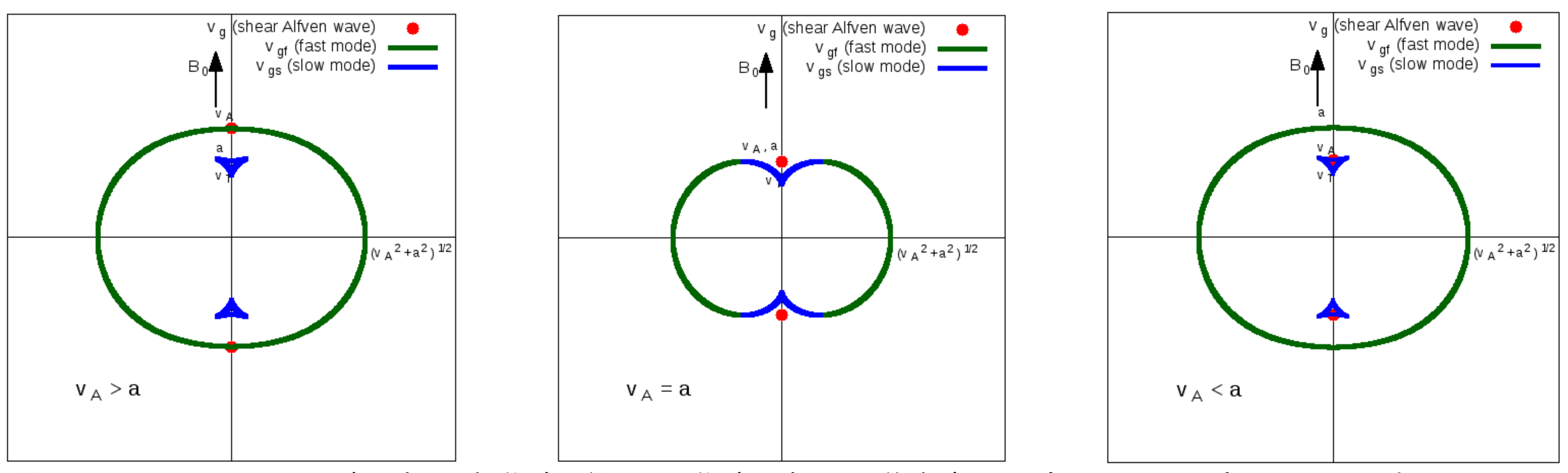

図 6: シアー Alfvén 波 (赤), 速進波 (緑), 遅進波 (青) の群速度図. (左: $v_A > a$, 中: $v_A = a$, 右: $v_A < a$) 縦軸は磁場の方向, 横軸は磁場に垂直な方向である.

- シアー Alfvén 波は磁場に沿った方向にのみエネルギーを輸送する
- 速進波は磁場に垂直な方向に最大の速度 $(v_A^2 + a^2)^{1/2}$ でエネルギーを輸送する
- 遅進波は円錐形の方向にエネルギーを輸送する

4-2. 二流体近似の下での Alfvén 波

◆ 本研究では, 二流体近似の下での Alfvén 波の分類と伝播の考察も行なったが, ここでは省略する

5. まとめ

- Alfvén 波は磁気張力を復元力とする波であり, 磁場や速度の変動を伴う
- 波の解を仮定し, 分散関係を求めた
- 各モードにおいて位相速度および群速度を求めることにより, それぞれの伝播の性質を確認した