鉛直座標変換 (静水圧系)

— p–座標, $\ln p$–座標, σ–座標, θ–座標 —

林 祥介

2002 年 11 月 18 日

目 次

Abstract

地球流体力学 (特に気象学) でよく用いられる, 静水圧近似が成り立つ際に良く用いられる鉛直座標変換について解説する. まず, 鉛直座標変換の一般的手順をまとめ, ついで, 気圧座標 (p–座標) 系とその仲間たち, すなわち, 対数気圧座標 ($\log p$–座標系), シグマ座標 (σ–座標系), および, 温位座標 (θ–座標系), についての具体的表現を与える.

1　はじめに

地球流体力学 (特に気象学) においては, 鉛直座標として, 幾何学的高さ z の他に様々な表現が用いられる. 静水圧近似 が成り立つ状況においては, 静水圧条件を陽に利用することによって,

- 方程式の形が一部簡単になる,
- 地表面の効果が扱いやすくなる,
- 観測データとの対応がつきやすくなる,

などの利便性の高い表現を得ることができるからである.

以下では, 静水圧近似が成り立っている回転系において, 任意の鉛直座標 ζ への座標変換の公式をまず作成し, ついでよく用いられる具体的座標表現を与えることにする.

2 復習: z 座標系における方程式

座標変換の出発点となる, 高度 z を鉛直座標として用いた系 (z 座標系) における方程式を書き下しておく.

2.1 系の設定

球面状に局所直線直行座標系をとった状況を想定する. x 軸は東向き, y 軸は北向き, z 軸は鉛直上向きにとる. z 軸方向に静水圧平衡が成り立っているものとする. したがって z 軸方向に系の回転の影響は及ばないものとし, コリオリパラメタは f $(= 2\Omega\sin\phi$, ϕ は球面上の着目している地点の緯度) とする. 重力加速度ベクトルは $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$ であるものとする.

2.2 z 座標系での基礎方程式

鉛直座標変換として z を用いた系 (z 座標系) での基礎方程式は次のように記述される.

- 水平運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - fv &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z + F_x, \quad (1)\\ \frac{dv}{dt} + fu &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z + F_y. \quad (2)\end{aligned}$$

- 静水圧平衡式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (3)$$

- 連続の式

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \quad (4)$$

- 熱輸送の式

$$T\frac{ds}{dt} = Q(x, y, z, t). \quad (5)$$

ただし, t は時間, u, v, w はそれぞれ速度の x, y, z 成分, ρ は密度, p は圧力, F_x, F_y はそれぞれ x, y 方向の摩擦力等の力, T は温度, s は単位質量当たりのエントロピー, Q は単位体積に流れ込む熱量である.

また,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},\\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

である.

2.3 z 座標系での境界条件

よく用いられる境界条件の z 座標系での表現例を示しておく. ただし, 後にこれらが直接に鉛直座標変換されるわけではない. 後出の ζ 座標系における境界条件との違いに注意されたい.

- 大気上端における境界条件

  上端における境界条件は, ある z 一定面 $z = z_T$ を通して質量輸送がないとすることが多い. この条件を式で書けば

$$\boxed{w = 0 \qquad \text{at} \;\; z = z_T \qquad (6)}$$

  となる.

- 大気下端における境界条件

  下端における境界条件は, 地表面を通して質量輸送がないとすることが多い. この条件を式で書くと, 地表面の高度を $z = H(x, y)$ として,

$$\boxed{w = \boldsymbol{v}_h \cdot \nabla_h H \qquad \text{at} \;\; z = H(x, y) \qquad (7)}$$

  となる. ここで,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_h &= (u, v, 0), \\ \nabla_h &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ 0 \right), \end{aligned}$$

  である.

2.4 z 座標系での渦度方程式と発散方程式

z 座標系での渦度方程式の鉛直成分及び水平発散方程式は次のように記述される. ただし, 後にこれらが直接に鉛直座標変換されるわけではない. 後出の ζ 座標系における渦度方程式・発散方程式との違いに注意されたい.

1. 渦度方程式

   $\dfrac{\partial}{\partial x}(2) - \dfrac{\partial}{\partial y}(1)$ より

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_z}{dt} &+ (f+\omega_z)D_z + \boldsymbol{k}\cdot\left(\nabla_h w \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{k}\cdot(\nabla_h \rho \times \nabla_h p) + \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

   となる. ただし

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$
$$D_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\boldsymbol{k} = (0,0,1)$$

   である.

2. 発散方程式

   $\dfrac{\partial}{\partial x}(1) + \dfrac{\partial}{\partial y}(2)$ より

$$\begin{aligned} \frac{dD_z}{dt} &+ \nabla_h u \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right)_z + \nabla_h v \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)_z + \nabla_h w \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} - f\omega_z \\ &= -\frac{1}{\rho}\nabla_h^2 p + \frac{1}{\rho^2}\nabla_h \rho \cdot \nabla_h p + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

   となる. ただし

$$\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

   である.

2.5 ポテンシャル渦度保存則

z 座標系での, 静水圧近似が成立するもとでのポテンシャル渦度保存則は次のように記述される. 後にこの方程式を ζ 座標系へ変換する.

静水圧近似のもとでは, 相対渦度を

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\frac{\partial v}{\partial z},\\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z},\\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

と定義することにより, ポテンシャル渦度保存則は

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\left\{\omega_x\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_z + \omega_y\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)_z + (\omega_z + f)\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right\}\right) = 0 \qquad (10)}$$

と表現される.

ただし λ は流れにそって保存する量

$$\frac{d\lambda}{dt} = \Lambda$$

である.

3 任意の鉛直座標系への変換

変数 $\zeta = \zeta(x,y,z,t)$ が z について一価関数であるならば, 鉛直方向の独立変数として z の代わりに ζ を用いることができる. すなわち独立変数を x,y,z,t から x,y,ζ,t に変えることができる. ここでは z 座標系での基礎方程式 (1) ∼ (5) を ζ 座標系へ鉛直座標変換する. その後に ζ 座標系での渦度方程式・発散方程式, 境界条件を書き下す. ζ として圧力 p , エントロピー s などを用いることがある.

3.1 微分演算子の変換則

方程式を鉛直座標変換するための準備として, z から ζ への変数変換により微分演算子がどのように変換されるか調べる.

1. 水平微分

   関数 $\psi(x,y,z,t)$ が

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z,t) &= \psi(x,y,z(x,y,\zeta,t),t) \\ &= \tilde{\psi}(x,y,\zeta,t) \qquad (11)\end{aligned}$$

   となるように, $\tilde{\psi}(x,y,\zeta,t)$ へ変数変換されたとする. ティルダー ˜ は $x,y,\zeta,$ t を独立変数とする関数であることを表す. 図のように点 A,B,C をとり, 図を参考にしながら恒等式

$$\frac{\psi(B)-\psi(A)}{\triangle x} = \frac{\psi(C)-\psi(A)}{\triangle x}v - \frac{\psi(C)-\psi(B)}{\triangle\zeta}\frac{\triangle\zeta}{\triangle z}\frac{\triangle z}{\triangle x}$$

   において $\triangle x \to 0$ とすると

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)_\zeta - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta \qquad (12)$$

   が得られる. y 微分についても同様にして

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\right)_\zeta - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta \qquad (13)$$

   が得られる.

2. 鉛直微分

明らかに

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} \tag{14}$$

である.

3. 時間微分

(12) を導く議論において x を t に置き換えても同様な議論が成り立つから

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}\right)_\zeta - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta \tag{15}$$

が得られる.

4. ラグランジュ微分

(12) ∼ (15) の結果を用いて, ラグランジュ微分

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_z + u\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_z + v\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_z + w\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{16}$$

を ζ 座標系へ変換する. (12) ∼ (15) を (16) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} \quad = \quad & \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u}\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v}\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}\right)_\zeta \\ & -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta - \tilde{w}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

となる. ただし,

$$u(x,y,z,t) = \tilde{u}(x,y,\zeta,t), \tag{18}$$
$$v(x,y,z,t) = \tilde{v}(x,y,\zeta,t), \tag{19}$$
$$w(x,y,z,t) = \tilde{w}(x,y,\zeta,t) \tag{20}$$

である.

(17) において $\psi = \zeta$ とすると

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + \tilde{u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \tilde{v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta - \tilde{w}\right\}. \tag{21}$$

(21) を (17) に代入すると

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t}\zeta + \tilde{u}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\zeta + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\zeta + \dot{\zeta}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\zeta} \tag{22}$$

となる. ただし

$$\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} \tag{23}$$

である. これより ζ 座標系における全微分は

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\zeta + \tilde{u}\frac{\partial}{\partial x}\zeta + \tilde{v}\frac{\partial}{\partial y}\zeta + \dot{\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

となることがわかった.

3.2　基礎方程式の変換

ここでは z 座標系の基礎方程式 (1) ∼ (5) を, 変換則 (12) ∼ (15) 及び (17) を用いて ζ 座標系へ変換する. なお ζ 座標系での変数であることを表すティルダー $\tilde{}$ は省略する.

- 運動方程式 (1), (2)

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\zeta - \frac{\partial p}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta\right) + F_x, \tag{24}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_\zeta - \frac{\partial p}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta\right) + F_y. \tag{25}$$

- 静水圧平衡式 (3)

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\rho g. \tag{26}$$

- 連続の式 (4) について

  まず $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ の書き換えを行う.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\zeta - \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_\zeta - \frac{\partial v}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta \\
&\quad + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\zeta + u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta + v\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta + \dot{\zeta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) \\
&= \nabla_\zeta\cdot\boldsymbol{u} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right).
\end{aligned}$$

  ただし,

$$\begin{aligned}
\nabla_\zeta &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\zeta,\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_\zeta,\ 0\right), \\
\boldsymbol{u} &= (\ u,\ v,\ 0\ )
\end{aligned}$$

である. こうして (4) は

$$
\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \nabla_\zeta \cdot \boldsymbol{u} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) = 0
$$

となる. これを変形すると

$$
\boxed{\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\rho\left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|\right)\right] + \nabla_\zeta \cdot \boldsymbol{u} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0 \qquad (27)}
$$

が得られる.

- 熱輸送の式 (5)

$$
\boxed{T\frac{ds}{dt} = Q(x, y, \zeta, t). \qquad (28)}
$$

このように基礎方程式 (1) ～ (5) は, 鉛直座標変換により (24) ～ (28) のように書き換えられた.

3.3 境界条件

境界条件は z 座標系における境界条件 (6), (7) を鉛直座標変換するよりも, それぞれの座標系において扱いが容易な条件を選ぶことが多い. ここではよく用いられる境界条件の例を挙げる.

- 大気上端における境界条件

  上端における境界条件は, ある ζ 一定面 $\zeta = \zeta_T$ を通して質量輸送がないとすることが多い. この条件は

$$\boxed{\dot{\zeta} = 0 \qquad \text{at} \;\; \zeta = \zeta_T} \tag{29}$$

  とあらわされる.

- 大気下端における境界条件

  下端における境界条件は地表面を通して質量輸送がないとすることが多い. 地表面の高度を $z = H(x,y)$ とすると地表面での ζ の値は $\zeta_H(x,y,t) = \zeta(x,y,H,t)$ と表される. (x,y,ζ) 空間において, 時間とともに動く曲面 $\zeta = \zeta_H$ の速度を $\boldsymbol{v}_H = (u_H, v_H, \dot{\zeta}_H)$, 法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_H$ とすると, 下端における境界条件は

$$\boldsymbol{v}_\zeta \cdot \boldsymbol{n}_H = \boldsymbol{v}_H \cdot \boldsymbol{n}_H \;\; \text{at} \;\; \zeta = \zeta_H \tag{30}$$

  と表される. ここで

$$\boldsymbol{n}_H = (\frac{\partial \zeta_H}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_H}{\partial y}, -1) \tag{31}$$

  であるから, (30) は

$$u\frac{\partial \zeta_H}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta_H}{\partial y} - \dot{\zeta} = u_H\frac{\partial \zeta_H}{\partial x} + v_H\frac{\partial \zeta_H}{\partial y} - \dot{\zeta}_H \tag{32}$$

  となる. 曲面 $\zeta = \zeta_H$ について

$$\dot{\zeta}_H = \frac{\partial \zeta_H}{\partial t} + u_H\frac{\partial \zeta_H}{\partial x} + v_H\frac{\partial \zeta_H}{\partial y}$$

が成り立つから, これを用いて (32) を書き換えると

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \zeta_H}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta_H}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta_H}{\partial y} \quad \text{at} \ \ \zeta = \zeta_H \tag{33}$$

となる.

3.4 渦度方程式と発散方程式

ここでは (24) , (25) から

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\partial(25)}{\partial x}\right)_\zeta - \left(\frac{\partial(24)}{\partial y}\right)_\zeta \\
\left(\frac{\partial(24)}{\partial x}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial(25)}{\partial y}\right)_\zeta
\end{gathered}
$$

の式を作る. これらはそれぞれ ζ 座標系の渦度方程式, ζ 座標系の発散方程式と呼ばれる. しかしながら, これらの式は z 座標系における渦度方程式・発散方程式を正しく変換して得られるものではなく, 厳密に流れ場の渦度と発散を表現しているわけではない.

- ζ 座標系における渦度方程式

  $\dfrac{\partial(25)}{\partial x} - \dfrac{\partial(24)}{\partial y}$ より $\omega_\zeta \equiv \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_\zeta - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_\zeta$ の式を作る.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\frac{d\omega_\zeta}{dt} &+ (f+\omega_\zeta)D_\zeta + \boldsymbol{k}\cdot\left(\nabla_\zeta\dot{\zeta}\times\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\zeta}\right) \\
&= \frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{k}\cdot(\nabla_\zeta\rho\times\nabla_\zeta p) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_\zeta - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_\zeta \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta\right\}\right)_\zeta - \left(\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta\right\}\right)_\zeta
\end{aligned}
}
\tag{34}
$$

  ただし

$$
D_\zeta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_\zeta, \ \boldsymbol{k} = (0,0,1)
$$

  である. (34) は z 座標系の渦度方程式の鉛直成分を ζ 座標系に変換したものとは明らかに異なる.

- ζ 座標系における発散方程式

  $\left(\dfrac{\partial(24)}{\partial x}\right)_\zeta + \left(\dfrac{\partial(25)}{\partial y}\right)_\zeta$ より水平発散 $D_\zeta \equiv \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_\zeta + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_\zeta$ の式を作る.

$$
\begin{aligned}
\frac{dD_\zeta}{dt} &+ \nabla_\zeta u \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right)_\zeta + \nabla_\zeta v \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)_\zeta + \nabla_\zeta \dot{\zeta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \zeta} - f\omega_\zeta \\
&= -\frac{1}{\rho}\nabla_\zeta^2 p + \frac{1}{\rho^2}\nabla_\zeta \rho \cdot \nabla_\zeta p + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_\zeta \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\zeta\right\}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\zeta\right\}\right)_\zeta
\end{aligned} \tag{35}
$$

ただし

$$
\nabla_\zeta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)_\zeta \tag{36}
$$

とおいた. (35) は z 座標系の水平発散方程式を ζ 座標系に変換したものとは異なる.

3.5 ポテンシャル渦度保存則

(10) を変換することにより, 静水圧近似のもとでのポテンシャル渦度保存則の ζ 座標系での表現を得る.

(10) を ζ 座標系に変換すると,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\left\{\omega_{x\zeta}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_\zeta + \omega_{y\zeta}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_\zeta + (\omega_\zeta + f)\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right\}\right)_\zeta = 0, \qquad (37)$$

が得られる. ただし

$$\begin{aligned}\omega_{x\zeta} &= -\frac{\partial v}{\partial\zeta}, \\ \omega_{y\zeta} &= \frac{\partial u}{\partial\zeta}\end{aligned}$$

である.

4 気圧座標 (p–座標) 系

静水圧平衡が成り立つ場合, 圧力 p は z の一価関数となるから p を鉛直座標として用いることができる. ここでは圧力 p を鉛直座標として用いた場合の方程式系を先に得られた ζ 座標系の方程式の表式において $\zeta = p$ と置き換えることにより求める.

p 座標は実際に最もよく用いられる鉛直座標のうちの一つである. p 座標を用いることによる主な利点としては, 方程式の一部が簡単になること, 観測において高度は気圧で測られることが多いため対応がつきやすいこと, などが挙げられる. 一方, 欠点としては境界条件が複雑になることが挙げられる.

4.1 p 座標系における基礎方程式

- 運動方程式

$$\frac{du}{dt} - fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p + F_x, \tag{38}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p + F_y. \tag{39}$$

- 静水圧平衡式

$$\frac{\partial}{\partial p} z = -\rho g. \tag{40}$$

- 連続の式

$$\left(\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\rho\left|\frac{\partial z}{\partial p}\right|\right)\right]\right) + \nabla_p \cdot \boldsymbol{u} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0. \tag{41}$$

- 熱輸送の式

$$T\frac{ds}{dt} = Q(x, y, p, t)). \tag{42}$$

ただし

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \dot{p}\frac{\partial}{\partial p},$$

$$\nabla_p = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, 0\right)$$

である.

静水圧平衡式 (40) を (38), (39), (41) に代入することにより, 以下のように p 座標系での基礎方程式が得られる.

p 座標系での基礎方程式

- 運動方程式

$$\frac{du}{dt} - fv = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p + F_x. \tag{43}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_p + F_y. \tag{44}$$

- 静水圧平衡式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}. \tag{45}$$

- 連続の式

$$\nabla_p \cdot \boldsymbol{u} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0. \tag{46}$$

- 熱輸送の式

$$T\frac{ds}{dt} = Q(x, y, p, t). \tag{47}$$

ただし

$$\Phi = gz \tag{48}$$

とおいた. Φ はジオポテンシャルである. 静水圧平衡式はジオポテンシャル Φ (すなわち, z) の値を計算する際に用いる.

このように p 座標系においては連続の式が扱いやすい形になる.

熱の式は次のようにも表現する.

$$\frac{dh}{dt} - \rho^{-1}\dot{p} = Q.$$

ただし, h は質量あたりのエンタルピーである. 特に理想気体の場合は

$$c_p \frac{dT}{dt} - \rho^{-1}\dot{p} = Q. \tag{49}$$

c_p は定圧非熱である.

4.2 境界条件

ここでは p 座標系においてよく用いられる境界条件の例を示す.

- 大気上端における境界条件

  p 座標系での大気上端における境界条件はある p 一定面 $p = p_T$ を通して質量輸送が無いとすることが多い. ここで p_T は最上層の圧力である. この条件は, 一般の場合で得られた上端における境界条件の表式で $\zeta = p$, $\zeta_T = p_T$ とすることにより

$$\dot{p} = 0 \qquad \text{at} \;\; p = p_T \tag{50}$$

  とあらわされる.

- 大気下端における境界条件

  p 座標系での大気下端における境界条件は地表面を通して質量輸送が無いとすることが多い. この条件は一般の場合において得られた上端における境界条件の表式で $\zeta = p$, $\zeta_H = p_s$ とすることにより

$$\dot{p} = \left(\frac{\partial p_s}{\partial t}\right)_p + u\left(\frac{\partial p_s}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial p_s}{\partial y}\right)_p \quad \text{at} \;\; p = p_s \tag{51}$$

  とあらわされる. ここで $p_s(x, y, t)$ は地表面の圧力である.

(51) は式の上では簡単に見えるが, 実際には曲面 $p = p_s$ は時間とともに変化するため扱いは容易でない. 例えば, 図 1 .a のように等圧面が山を横切る場合, 上から見ると図 1 .b のように等圧面の一部に山によって穴が生じることになる. この穴は時間とともにその形が変化するため非常に扱いがむずかしい.

図 1 .a　横から見た図

図 1 .b　上から見た図

図 1　山を横切る等圧面

4.3 渦度方程式と発散方程式

- p 座標系における渦度方程式

  p 座標系における渦度方程式は, ζ 座標系の渦度方程式において $\zeta = p$ とし, 静水圧平衡式 (45) を用いることにより

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega_p}{dt} &+ (f+\omega_p)D_p + \boldsymbol{k}\cdot\left(\nabla_p \dot{p} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p}\right) \\
&= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_p - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_p
\end{aligned}
\tag{52}
$$

となる. ただし

$$
\omega_p = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p, \quad D_p = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p \tag{53}
$$

である. (52) は z 座標系の渦度方程式の鉛直成分を p 座標系に変換したものとは異なる.

- p 座標系における発散方程式

  p 座標系における発散方程式は, ζ 座標系の発散方程式において $\zeta = p$ とし, 静水圧平衡式 (45) を用いることにより

$$
\begin{aligned}
\frac{dD_p}{dt} &+ \nabla_p u \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right)_p + \nabla_p v \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)_p + \nabla_p \dot{p} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p} - f\omega_p \\
&= -g\nabla_p^2 z + \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)_p
\end{aligned}
\tag{54}
$$

となる. ただし

$$
\nabla_p^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)_p + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)_p
$$

である. (54) は z 座標系の水平発散方程式を p 座標系に変換したものとは異なる.

4.4 ポテンシャル渦度保存則

ポテンシャル渦度保存則の p 座標系における表現は, ζ 座標系のポテンシャル渦度保存則において $\zeta = p$ とし, 静水圧平衡式 (45) を用いることにより

$$\frac{d}{dt}\left(\omega_{xp}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_p + \omega_{yp}\frac{\partial}{\partial\lambda}y + (\omega_p + f)\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right) = 0, \tag{55}$$

と得られる. ただし

$$\begin{aligned} \omega_{xp} &= -\frac{\partial v}{\partial p}, \\ \omega_{yp} &= \frac{\partial u}{\partial p} \end{aligned}$$

である.

5 対数圧力座標 (ln-p 座標) 系

気圧の対数をとることにより, 気圧座標を高度の次元を持った座標に変換したもの:

$$z_* = -H \ln \frac{p}{p_0} \tag{56}$$

ここで H は適当に選んだ高度スケール (定数) であり, p_0 は適当な定数である. 通常, H にはスケールハイトにあたる量を, p_0 には平均地表面気圧を選ぶ.

5.1 ln-p 座標系における基礎方程式

ln-p 座標系での基礎方程式は, $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dz_*}{H}$ を用いれば p 座標系の方程式から直ちに得られる.

- 運動方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} - fv &= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{z_*} + F_x. && (57)\\
\frac{dv}{dt} + fu &= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{z_*} + F_y. && (58)
\end{aligned}
$$

- 静水圧平衡式

$$
\frac{H}{p}\frac{\partial \Phi}{\partial z_*} = \frac{1}{\rho}. \qquad (59)
$$

- 連続の式

$$
\nabla_{z_*} \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{(-p)}\frac{\partial(-pw_*)}{\partial z_*} = 0. \qquad (60)
$$

- 熱輸送の式

$$
T\frac{ds}{dt} = Q(x, y, z_*, t)). \qquad (61)
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{z_*} + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{z_*} + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z_*} + w_*\frac{\partial}{\partial z_*},\\
\nabla_{z_*} &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{z_*}, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z_*}, 0\right),
\end{aligned}
$$

また,

$$
w_* = \dot{z}_*
$$

である.

まとめると

- 運動方程式

$$\frac{du}{dt} - fv = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{z_*} + F_x. \tag{62}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{z_*} + F_y. \tag{63}$$

- 静水圧平衡式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_*} = \frac{1}{H}\frac{p}{\rho}. \tag{64}$$

- 連続の式

$$\nabla_{z_*} \cdot \boldsymbol{u} + e^{z_*/H}\frac{\partial}{\partial z_*}\left(w_* e^{-z_*/H}\right) = 0. \tag{65}$$

- 熱輸送の式

$$T\frac{ds}{dt} = Q(x, y, z_*, t). \tag{66}$$

熱の式は次のようにも表現する.

$$\frac{dh}{dt} + \frac{p}{H\rho}w_* = Q.$$

ただし, h は質量あたりのエンタルピーである. 特に理想気体の場合は

$$c_p\frac{dT}{dt} + \frac{RT}{H}w_* = Q. \tag{67}$$

c_p は定圧非熱である.

また, 理想気体の場合の静水圧の式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_*} = \frac{RT}{H}. \tag{68}$$

となる. ジオポテンシャルの z_* ではかった勾配が温度に比例していることに注意.

6　シグマ座標 (σ–座標) 系

気圧座標を地表面気圧で規格化したもの:

$$\sigma(x, y, z, t) = \frac{p(x, y, z, t)}{p_s(x, y, t)} \tag{69}$$

により与えられる変数 σ は z の一価関数であるから, σ を鉛直座標として用いることができる. ただし, p_s は地表面気圧である.

σ 座標の特徴は, σ の定義 (69) より, $\sigma = 1$ の一定面と地表面が一致し, 境界条件及び地形の扱いが非常にやさしくなることである. σ は高度とともに減少し, $p = 0$ となるところで $\sigma = 0$ になる（図 1 ）.

p_s が高度 z の関数ではないことから

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = p_s \tag{70}$$

が成り立つことに注意しておく.

ここではこの σ を鉛直座標として用いた場合の方程式系を導く. ζ 座標系での表式において $\zeta = \sigma$ とすることにより σ 座標系に変換する.

図 1 地形と等 σ 面

6.1 σ 座標系における基礎方程式

ζ 座標系での運動方程式, 静水圧平衡式, 連続の式, 熱輸送の式において $\zeta = \sigma$ とし, (70) の関係を用いることにより次の各式が得られる.

- 運動方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} - fv &= -\frac{1}{\rho}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\sigma - p_s\frac{\partial \sigma}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma\right) + F_x, && (71)\\
\frac{dv}{dt} + fu &= -\frac{1}{\rho}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_\sigma - p_s\frac{\partial \sigma}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\sigma\right) + F_y. && (72)
\end{aligned}
$$

- 静水圧平衡式

$$
p_s\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\rho g. \tag{73}
$$

- 連続の式

$$
\left(\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\rho\left|\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right|\right)\right]\right) + \nabla_\sigma \cdot \boldsymbol{u} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0. \tag{74}
$$

- 熱輸送の式

$$
T\frac{ds}{dt} = Q(x, y, \sigma, t). \tag{75}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\sigma + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\sigma + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_\sigma + \dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\ ,\\
\nabla_\sigma &= \left(\frac{\partial}{\partial}x\sigma, \frac{\partial}{\partial}y\sigma, 0\right)
\end{aligned}
$$

である.

静水圧平衡式 (73) を (71), (72), (74) に代入することにより, 以下のように σ 座標系での基礎方程式が得られる.

σ 座標系での基礎方程式

- 運動方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} - fv &= -\frac{1}{\rho}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\sigma + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma\right) + F_x, &\quad (76)\\
\frac{dv}{dt} + fu &= -\frac{1}{\rho}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_\sigma + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\sigma\right) + F_y. &\quad (77)\\
& &\quad (78)
\end{aligned}
$$

- 静水圧平衡式

$$
\frac{\partial z}{\partial \sigma} = -\frac{p_s}{\rho g}. \qquad (79)
$$

- 連続の式

$$
\frac{1}{p_s}\frac{dp_s}{dt} + \nabla_\sigma \cdot \boldsymbol{u} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0, \qquad (80)
$$

または

$$
\left(\frac{\partial p_s}{\partial t}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial p_s u}{\partial x}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial p_s v}{\partial y}\right)_\sigma + \frac{\partial p_s \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0. \qquad (81)
$$

- 熱輸送の式

$$
T\frac{ds}{dt} = Q(x, y, \sigma, t). \qquad (82)
$$

6.2 境界条件

ここでは σ 座標系においてよく用いられる境界条件の例を示す.

- 上端における境界条件

  σ 座標系での上端における境界条件は $\sigma = 0$ 面を通して質量流束が無いとすることが多い. この条件の表式は, 一般の場合において得られた上端における境界条件の表式で $\zeta = \sigma$, $\zeta_T = 0$ とすることにより

$$\dot{\sigma} = 0 \qquad \text{at} \quad \sigma = 0 \tag{83}$$

  と得られる.

- 下端における境界条件

  σ 座標系での下端における境界条件は地表面を通して質量輸送が無いとすることが多い. この条件の表式は, 一般の場合において得られた下端における境界条件の表式で $\zeta = \sigma$, $\zeta_H = 1$ とすることにより

$$\dot{\sigma} = 0 \qquad \text{at} \quad \sigma = 1 \tag{84}$$

  と得られる.

6.3 渦度方程式と発散方程式

- σ 座標系における渦度方程式

  σ 座標系における渦度方程式は, 一般の場合において得られた ζ 座標系での渦度方程式において $\zeta = \sigma$ とし, (70) の関係と静水圧平衡式 (79) を用いることにより

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega_\sigma}{dt} &+ (f+\omega_\sigma)D_\sigma + \boldsymbol{k}\cdot\left(\nabla_\sigma\dot{\sigma}\times\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{k}\cdot(\nabla_\sigma\rho\times\nabla_\sigma p) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_\sigma - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_\sigma
\end{aligned}
\tag{85}
$$

  となる. ただし

$$
\omega_\sigma = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_\sigma - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\sigma, \quad D_\sigma = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_\sigma
$$

  である. (85) は z 座標系の渦度方程式の鉛直成分を σ 座標系に変換したものとは異なる.

- σ 座標系における発散方程式

  σ 座標系における水平発散方程式は, 一般の場合において得られた ζ 座標系での水平発散方程式において $\zeta = \sigma$ とし, (70) の関係と静水圧平衡式 (79) を用いることにより

$$
\begin{aligned}
\frac{dD_\sigma}{dt} &+ \nabla_\sigma u\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right)_\sigma + \nabla_\sigma v\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)_\sigma + \nabla_\sigma\dot{\sigma}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\sigma} - f\omega_\sigma \\
&= -\frac{1}{\rho}\nabla_\sigma^2 p + \frac{1}{\rho^2}\nabla_\sigma\rho\cdot\nabla_\sigma p - g\nabla_\sigma^2 z + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_\sigma
\end{aligned}
\tag{86}
$$

  となる. ただし

$$
\nabla_\sigma^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)_\sigma
$$

  である. (86) は z 座標系の水平発散方程式を σ 座標系に変換したものとは異なる.

6.4　ポテンシャル渦度保存則

ポテンシャル渦度保存則の σ 座標系における表現は, 一般の場合において得られた ζ 座標系でのポテンシャル渦度保存則において $\zeta=\sigma$ とし, 静水圧平衡式 (79) を用いることにより

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{p_s}\left(\omega_{x\sigma}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_\sigma+\omega_{y\sigma}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_\sigma+(\omega_\sigma+f)\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right)\right\}=0 \qquad (87)}$$

ただし

$$\begin{aligned}\omega_{x\sigma} &= -\frac{\partial v}{\partial\sigma},\\ \omega_{y\sigma} &= \frac{\partial u}{\partial\sigma}\end{aligned}$$

となる.

7 参考文献

Kasahara, A., 1974: Various vertical coordinate systems used for Numerical Weather Prediction. *Mon. Wea. Rev.*, **102**, 509–522.

栗原宣夫, 1979: 大気力学入門, 岩波全書, 244pp.

沼口ノート, 1989: A-GCM 概説 (力学編).

Washington, W.M., Parkinson, C.L., 1986: *An Introduction to Three-Dimensional Climate Modeling*, University Science Books.

謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっているものである. 原作版は若山郁生・石渡正樹による「鉛直座標変換」(1991-04-12) であり, 林祥介によって「鉛直座標変換」として書き直された (2002-11-18). セミナー参加者および校正とデバッグに協力してくれたすべての方々に感謝するものである.

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

http://www.gfd-dennou.org/arch/riron/mhd/teishiki/pub

において公開されているものである.

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

riron@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いである.