

連続体概説

林 祥介, 竹広 真一

2003 年 10 月 29 日

目次

1	連続体とは	2
2	連続体近似が妥当なための条件	3
3	連続体を語る物理量とその力学	4
4	まとめの例: 1 成分 1 相系の場合	6
5	参考文献	8
6	謝辞	9

要旨

連続体, あるいは, 連続体近似とは, 巨視的なスケールでの, すなわち, 原子分子を極めて数多く含む物体の変形を中心とする力学的挙動を原子分子の詳細には立ち入らずに表現するための数学的モデルである. 原子分子の粒々(?) としての存在は忘れ, 物体を滑らかな数学的連続体として抽象して扱う. 連続体はその変形 (または変形速度) と熱力学量とを場の量として与えることによって記述される. 連続体の時間発展 (力学) は, 連続の式, 運動方程式, 熱力学の式から構成される. 時間発展の方程式系を閉じるためには熱力学関係式と構成方程式とが必要である. 構成方程式は, 物体の変形と力との関係を定式化したものであり, 連続体を物理的な実体としてとらえるために知っていなければならない物性法則である. 粘性流体・弾性体・粘弾性体などなどの区別は構成方程式の定式化において現れる.

1 連続体とは

物質は多数の原子分子で構成されている。しかし、水の流れや地震波の伝搬を記述するためにいちいち原子分子レベルの物理法則に立ち至らないですむことを我々は日常経験を通して知っている。多数の原子分子で構成される物質の性質は、原子分子の挙動を支配する力学ではなく、それらを平均した結果現れる別の性質とその性質の時間変化を与える力学で記述される。平均する手順を与えてくれる物理学は統計力学と呼ばれるが、ここでは統計力学の詳細には立ち入らない。

多数の原子分子の存在を平均し個々の存在を意識しないで平滑化して物質の性質を語ることを巨視的 (macroscopic)¹に記述するという。これに対して物質の性質を原子分子の力学で語ることを微視的 (microscopic) に記述するという。平均した結果あらわれる性質を巨視的な性質、平均した結果定義できる物理量を巨視的な物理量という。温度、圧力などの熱力学的な量、電流、磁化などの電磁気的な量はこのような巨視的な物理量である。

物質が一様でなく非一様、すなわち、空間的に性質が変化している場合でも、変化の空間スケールにくらべて十分微小な領域をとることができてそこで巨視的な物理量が定義できる場合がある。それが物体を連続体として扱える状況である。

微小領域は、十分に微小で空間的非一様性を無視できるが、それでも十分巨大でその中に多数の原子分子が存在するようなそういう領域である。物体中の任意の点に対し、その点を中心とする微小領域をとる。温度、圧力などの物理量はその微小領域で定義され、その値をもってこの点での値とする。かくして、物理的性質は物質の各点ごとに定義され、空間について連続的に変化することになる。熱力学や電磁気学の法則は物質の各点ごとに局所的に適応される。

微視的スケールについて平均して得られる、連続的な物理的性質を持つ物質を連続体 (continuum) という。あるいは、それが物質のモデル (本物とは違うが似た性質を持つ仮想物) であることを強調して 連続体モデル という。また、物質をそのような仮想物として近似して扱うことを 連続体近似する という。

¹言うまでもなく「巨視的」、「微視的」という単語は相対的な意味しかもたない。ここでは着目している物体は原子分子にくらべて非常に大きいということで巨視的と呼んでいる。原子核を構成する素粒子に注目すれば原子分子が巨視的世界、素粒子が微視的世界である。以下同様。

2 連続体近似が妥当なための条件

連続体近似が妥当であるためには, 原子分子の力学が関与する時間空間スケール (微視的スケール) に比べて十分大きい (巨視的な) 微小領域が定義できなければならない, しかもその微小領域は, 物体の振舞いについて着目したい時間空間スケールに比べ十分に小さい局所的なものでなければならない.

微小領域での平均がうまく働くためには, そこに多数の原子分子が存在して, それらの運動が平均化されるべく原子分子同士の相互作用が十分頻繁に起こっていることが必要である. 詳細は統計力学の議論を参照されたい².

²例が必要だ. Knudsen 数 K , すなわち 平均自由行程 l と現象の巨視的スケール L との比とか.

3 連続体を語る物理量とその力学

連続体における物理法則は、一様な物質に関する物理法則を局所的に適用することによって得られる。連続体を微小部分に分割し、各微小領域を一様な物体であると思って質点力学、熱力学、電磁気学などを適用するのである。連続体が変形や流動をする際には、物理法則が適用される微小部分も空間的に移動することに注意しなければならない。このような意味で微小部分のことを連続体を構成する物質粒子(material particle, 粒子ではないけれど)とよぶことがある。流体力学では特に流体粒子(fluid particle)と呼ぶ。微小部分の空間的に移動を考慮しながら物理法則を適用することを、物質の運動に沿って(物質粒子,あるいは、流体粒子の運動に沿って)物理法則を適用する、という。

連続体上の各点を指定するために連続体上には空間座標を張る。局所的に定義されている熱力学量や電磁気量は空間座標の関数として表現される。

連続体近似を行った結果必要となる法則に質量保存則 (mass conservation) がある。別名を連続の式 (continuity equation) という³。物質粒子を指定する数学的方法は座標を導入してその微分で微小体積を定義することである。その体積は座標の導入の仕方に依存する。一方、連続体を記述するための空間座標のとり方はどのように行っても数学的には勝手である。しかし、物理法則を物質粒子の運動に沿って適用するためには、とある時刻にとある座標で定義された微小体積が次の時刻でこのどのような微小体積に対応しているのかを知っておかなければならない。微小体積の対応づけを質量を通して行うのが質量保存則である⁴。連続体のとある微小体積に注目する。その中に含まれている質量は微小体積が変形を受けたり運動したりしても変化しない。

変形あるいは運動を記述する法則はいわゆる運動方程式である。運動方程式は質点系の運動方程式(いわゆるニュートンの法則)に他ならない。連続体の運動方程式はニュートンの運動方程式を微小部分に関して平均して得られる法則なので、これを特にオイラーの第1運動法則とよぶこともある。連続体近似を行ったために、運動方程式の力の項には面積力(surface force あるいは表面力)と体積力(body force あるいは物体力)の二種類が現れる。体積力はいわゆる遠隔作用を平均した結果現れる力であり、通常は力学的ポテンシャルを介して物質粒子の総体に作用する。面積力は分子原子レベルの微視的な相互作用を平均した結果現れる力であり、物質粒子の表面に作用する。面積力は連続体内の面を対して定式化され、応力(stress)と

³ここでの「連続」(continuity)は「保存」(conservation)と同じ意味で使われはじめたらしい。質量の値が一定、すなわち、時間的に連続している、という程度の意味(参照 Batchelor, 入門流体力学)。

⁴対応づけをさせる量は質量でなくてもよい。たとえば「色」でもよい。

よばれるテンソルで表現される。

応力は法則として別途、連続体を記述する座標 (変形) および熱力学量などと関係づけなければならない。この関係づけの法則を 構成方程式(constitution equation) という。良く行われる定式化は、応力を 歪み (strain) で与えるものである。歪みは連続体の変形を定式化したものである。連続体内の 2 点間の距離の偏差で定式化される。類似のものに歪み速度がある。連続体内の 2 点での速度の勾配で定式化される。応力と歪み速度とを比例関係であたえる連続体を ニュートン流体 という。応力と歪みそのものを比例関係 (フックの法則) であたえる連続体を 線形弾性体 という。

連続体の角運動量保存則も質点系の角運動量保存則を積分してえられる。連続体においては物質粒子自身がどのような角運動量をもつのかを別途定めなければならない。連続体に関して法則として陽に回転の法則を与えたものをオイラーの第 2 運動法則とよぶことがある。物質粒子自身が角運動量を持たない場合には応力テンソルは対称テンソルとなる。

熱力学に関して必要な法則は エネルギー保存則 である。熱力学的にもっとも簡単な 1 成分 1 相から成り立つ物質ならば記述に要する変数 (通常熱力学変数と呼ばれる) は 2 つである。たとえば温度 T と圧力 p がそれである。熱力学の構造、すなわち、熱力学関係式を利用すれば独立に選べる 2 つの変数は自由に変換し、たとえば、エントロピー s と密度 ρ などなどを選ぶこともできる。微分形で与えられた独立変数間の変換公式を Maxwell の関係式と呼ぶこともある。熱力学関係式は、熱力学の定式化においては熱力学関数と呼ばれる一群の自由エネルギー、すなわち、内部エネルギー (独立変数は s と ρ)、または、エンタルピー (独立変数は s と p)、または、いわゆる自由エネルギー (独立変数は T と ρ)、Gibbs の自由エネルギー (独立変数は T と p)、で与えられる。連続体の物性として与えられるべき量はこの熱力学関数のどれかである。しかしながら、実用上の物性として観測値 (実験値) から直接与えられるのは状態方程式 (T と ρ と p の関係式) と比熱の式 (定圧比熱なら s と p と T の関係式の微分形) である。

4 まとめの例: 1 成分 1 相系の場合

1 成分 1 相系の連続体の振舞いを記述する法則は

- 質量保存則 (連続の式)
- 運動量保存則 (運動方程式) (3 成分)
- エネルギー保存則 (熱の式)

の $1+3+1=5$ つの方程式である.

補助的であるが重要な方程式は

- 変形 (歪みテンソル, 歪み速度テンソル) を応力と関係づける構成方程式.
- 熱力学変数間の関係を与える熱力学的構造 (通常は状態方程式と比熱として与えられる). 1 成分 1 相系では熱力学量が 3 つ以上登場する場合の相互の変換に用いられる.

である. 必要に応じてその他の力の法則 (重力, 電磁気力) を記述する方程式が付け加わわる.

1 成分 1 相系の連続体の振舞いを記述する量は, その表現方法によってことなる.

流体の場合は座標を陽に用いない記述 (Euler 表現) がよく用いられる. 1 成分 1 相系の流体の振舞いを記述する量は

- 運動学的な量 3 つ: 連続体上の各点の速度 \boldsymbol{v} の 3 成分
- 熱力学的な量 2 つ: 圧力 p , 密度 ρ , 温度 T , *etc.* のうち 2 つ

の計 5 つであり, 上記 5 つの方程式で系の時間発展が記述される. ただし, 速度で記述される運動方程式は時間に関して 1 階微分であり, 初期値は場の量 5 つで与えられることになる.

弾性体の場合は座標 (変位) のみを用いた記述がよく用いられる. 1 成分 1 相系の線形弾性体の振舞いを記述する量は

- 運動学的な量 3 つ : 連続体上の各点の変位座標 \boldsymbol{x} の 3 成分
- 熱力学的な量 2 つ : 圧力 p , 密度 ρ , 温度 T , *etc.* のうち 2 つ

であり, 上記 5 つの方程式で系の時間発展が記述される. ただし, 変位座標で記述される運動方程式は時間に関して 2 階微分であり, 初期値は場の量 8 つ (変位とその時間微分の量で 6 つ + 熱力学量 2 つに対応) で与えられることになる.

流体と弾性体とで必要となる初期値の数がことなるのは, 状態として表現しなければならない量がことなるためである. 弾性体では各時刻における物質粒子の位置を記述しなければならないが, Euler 表現された流体では速度場だけが問題であって, 流体粒子の位置はとりあえず関心外の量であることによる. 流体粒子の位置を計算しようとすれば (つまり流体とともに流される粒子, トレーサー, の位置を計算しようとすれば) 当然初期値としては 6 + 2 つの場の量が必要となる.

5 参考文献

Batchelor, G.K. 著, 橋本英典 他 訳 : 入門流体力学, 東京電機大学出版局, 614pp.

Landau, L.D., Lifshitz, E.M. 著, 竹内 均 訳, 1970 : 流体力学 1, 東京図書, 280pp.

今井 功, 1973 : 流体力学 (前編), 裳華房, 428pp.

6 謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっている. 原作版は竹広真一による「流体力学の基礎」(1989-04-21) であり, 保坂征宏による改定(1990-04-23)を経て, 林祥介/竹広真一によって「連続体力学概説」として書き直された(1996-04-23). 構成とデバッグに協力してくれたセミナー参加者のすべてに感謝するものである.

本ドキュメントは

<http://www.gfd-dennou.org/library/rironn/renzoku/gaisetupub/>

において, 無保証無責任を原則として公開している. 原著作者ならびにその他の資源提供者(図等の版元等を含む)の諸権利に抵触しない(不利益を与えない)限り, 資源は自由に利用していただいて構わない. ©林祥介・竹広真一 (Y.-Y. Hayashi and S. Takehiro) 1989-2014.