連続体力学: 応力

林 祥介, 竹広 真一

2000 年 05 月 13 日

目 次

要旨

応力は連続体内部の力の場, すなわち, 内力を表現するための道具である. 応力は 2 階のテンソル (力のベクトルとしての 3 成分 $\times$ 働く面の向きとしての 3 成分) として与えられる. 応力テンソルは極性物質でない限り対称テンソルである.

1　応力とは

連続体の内部の, ある閉じた領域 D を考える. D を構成する各物質粒子に作用する力は, 重力や電磁力などいわゆる遠隔作用として現れる巨視的な力, すなわち外力, と分子原子レベルの微視的な相互作用を平均した結果現れる巨視的な力, すなわち, 内力とに分けられると考える. 内力の相互作用の距離は非常に短い (微視的な距離でしかない) ものとし, 領域 D の内側では作用反作用で完全に打ち消しあうものと考える.

連続体の物質粒子に働く力が内力と外力とに完全に分けられるものとする考えをオイラー・コーシーの応力原理 (stress principle of Euler and Cauchy) と呼ぶことがある.

内力は, 領域 D の表面 ∂D においてのみ, 打ち消しあう相手がいないので, 領域に作用する力として現れる. この力を領域の表面 ∂D の面積あたりについて定義したものを 応力 (stress) という.

連続体の領域 D に作用する外力は, 通常, 力学的ポテンシャルを介して個々の物質粒子に作用し, その大きさは物質量すなわち体積や質量に比例する. その意味で外力は 体積力(body force あるいは物体力) と呼ばれる.

これに対し連続体の領域 D の表面に作用する力は ∂D の面積に比例する. その意味で応力は 面積力(surface force あるいは表面力) と呼ばれる.

2 応力の表現

一般に, 応力は考える平面の向きに依存している. 連続体の内部の閉じた 3 次元領域 D を考え, D の表面 ∂D 上の点 $P = \boldsymbol{x}$ に注目する. そこでの面積要素 (微小面積素片) を δS, 面積要素の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする.

応力ベクトル (stress vector) は面積要素 δS に対して

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \lim_{\delta S \to 0} \frac{\delta \boldsymbol{F}_s}{\delta S} \tag{1}$$

で定義される. $\delta \boldsymbol{F}_s$ は面積要素 δS の $\boldsymbol{n}$ 側の面に働く力のベクトルである.

応力ベクトルの表現 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ は, 引数としてあらわした $\boldsymbol{x}$, すなわち, 面を考えている P 点の座標と, 添字としてあらわした $\boldsymbol{n}$, すなわち, その面の向き, に応力ベクトルが依存していることを示している.

ちなみに, 領域 D 全体にその表面から加わる力は, 応力を表面 ∂D で面積分してあげれば良く,

$$\boldsymbol{F}_s = \int_{\partial D} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) dS, \tag{2}$$

領域 D 全体にその表面から加わるトルクは同様に

$$\boldsymbol{N}_s = \int_{\partial D} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) dS \tag{3}$$

である.

3　応力を考察するための連続体の諸法則

連続体の運動法則を考察することにより応力ベクトルの性質 (テンソルであることならびにその対称性) が明らかになる. その準備として積分形で表現した運動法則について述べる.

これら 2 つの法則をとある微小領域に対して適用すると, 体積積分の寄与を十分に小さくすることができ, 結果的に面積積分の項だけのバランスが得られる. これから応力に関する性質が導かれることになる.

3.1　運動量保存則: オイラーの第一法則

連続体の運動方程式は連続体内の領域 D に対してニュートン力学を適用すれば次のように書き下せる:

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)} \rho \boldsymbol{v} dV \quad = \quad \int_{\partial D} \boldsymbol{\sigma_n} dS + \int_D \boldsymbol{F}_b dV \tag{4}$$

積分形で表現されるこの運動方程式を特にオイラーの第一運動法則という (Euler's first law of motion) ことがある.

ここで, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は連続体の各点における連続体物質の運動速度であり,

$$\int_D \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\rho dV \tag{5}$$

は連続体領域 D が持つ全運動量に他ならない.

連続体の領域 D に働く力は各点に働く体積力 $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x})$ と, 表面 ∂D に働く応力 $\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{x})$ である.

3.2　連続体の角運動量保存則: オイラーの第二法則

連続体の角運動量方程式は連続体内の領域 D に対してニュートン力学を適用すれば次のように書き下せる:

$$\frac{d}{dt}\int_D \boldsymbol{j}\rho dV \quad = \quad \int_{\partial D} \boldsymbol{x} \times \sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) dS + \int_D \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x}) dV \tag{6}$$

$\boldsymbol{j}$ は角運動量密度であり, 非極性物質 (nonpolar material) であれば

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

である[1]. 積分形で表現されるこの角運動量の式を特にオイラーの第二運動法則という (Euler's second law of motion) ことがある.

[1]物体が微視的な角運動量 $\boldsymbol{s}$ を持てば

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s}$$

である. $\boldsymbol{s}$ が存在すると応力テンソルは対称にはならないことが後で示される.

4　応力がテンソルであること

4.1　はじめに

応力は考察するすべての面の向き $\boldsymbol{n}$ に対して与えなければならないわけではない. 以下に示すように運動量保存則を考察することより応力はテンソルとして与えられることがわかる.

応力がテンソルで書けるということは, 応力の面の向き依存性の自由度は高々 3 次行列, すなわち, $3 \times 3 = 9$, ということになる.

点 $(\boldsymbol{x})$ において, (局所) 直交座標系の j 方向を向いた面に働く応力ベクトルの i 方向成分

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_i) \tag{8}$$

を定義すれば, 点 $(\boldsymbol{x})$ における任意の方向 $\boldsymbol{n}$ を向いた面に働く応力ベクトルの表現は

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{n}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) n_j \boldsymbol{e}_i \tag{9}$$

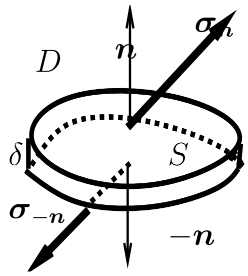
で与えられるわけである. ここで $n_j = (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{n})$ は法線ベクトルの j 成分を表す

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{10}$$

を応力テンソルという. 面の向きの取り方による応力の表現は, 応力テンソルからその座標変換ルールに従って得られるのである.

4.2 面の表の応力と裏の応力

連続体内の領域 D として点 $\boldsymbol{x}$ を含む厚さ δ, 上面・下面が面積 S の微小領域を考察する.



応力の作用反作用を考えるための領域 D.

運動方程式 (4) において $\delta \to 0$ に近づけると, 体積力, すなわち, 体積積分であらわさられる項は加速度項も含め, 積分領域の D の体積が 0 に収斂するので寄与がなくなってしまう:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{d}{dt} \int_D \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\rho dV \to 0$$
$$\lim_{\delta\to 0} \int_D \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x}) dV \to 0$$

また, 側面に働く面積力の寄与も 0 である. よって, S 上の面積分だけがのこり

$$0 = \int_{S_u} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS + \int_{S_d} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS$$

S_u は領域の上面, S_d は領域の下面をあらわす. 上面の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば下面の外向き法線ベクトルは $-\boldsymbol{n}$ なので面積分を上面だけで評価すれば

$$0 = \int_{S_u} \left(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\right) dS$$

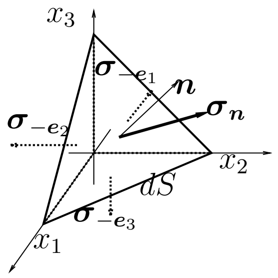
この関係は連続体内の領域の取り方によらないので

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

連続体の内部に想定した境界面の, 正の側の領域が負の側の領域に及ぼす作用 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ は, 負の側の領域が正の側の領域に及ぼす作用 $\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ と大きさが同じで向きが反対, ということである.

4.3　応力テンソル

連続体内の領域 D として点 $\boldsymbol{x}$ を含む, 微小 4 面体を考察する. 局所直交座標系をとり, 4 面のうち, 3 面は座標面に平行, 残りの 1 面は法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする面である (図).



応力がテンソルであることを考察するための 4 面体. 面 dS の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分が $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $n_3 > 0$ であるものとして描いた. ただし, $n_j = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_j)$

4 面体の高さを δ とする. 4 面体の形を保ったまま $\delta \to 0$ に近づける. 運動方程式 (4) において体積力, すなわち, 体積積分であらわさられる項は加速度項も含め, δ^3 に比例して小さくなる:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{d}{dt} \int_D \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\rho dV \propto \delta^3$$
$$\lim_{\delta\to 0} \int_D \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x}) dV \propto \delta^3$$

一方, 面積力, すなわち面積分であらわされる項の寄与は δ^2 に比例して小さくなる. よって, $\delta \to 0$ においては

$$0 \;=\; \int_{\partial D} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) dS$$

でなければならない.

面積分を各面上のそれに分けて評価する. x_i 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ とする. $\boldsymbol{n}$ を法線ベクトルとする面を S とする. その微小面積を dS とすれば x_i 軸と垂直な面の面積は $|n_i| dS$ である. よって

$$0 \;=\; \Big(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}_{-(\mathrm{sgn} n_1)\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x})|n_1| + \boldsymbol{\sigma}_{-(\mathrm{sgn} n_2)\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x})|n_2| + \boldsymbol{\sigma}_{-(\mathrm{sgn} n_3)\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{x})|n_3|\Big)\, dS$$

$\mathrm{sgn} n_i$ は n_i の符号である. 面の向きを考慮すれば結局

$$0 \;=\; (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x}) n_1 - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x}) n_2 - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{x}) n_3)\, dS$$

である. この関係は連続体内の領域の取り方によらずに成り立たなければならないから

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x}) n_1 + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x}) n_2 + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{x}) n_3$$

そこで,

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_i)$$

を定義すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x})n_1 + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x})n_2 + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{x})n_3 \\ &= \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{n}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})n_j\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{12}$$

であることになる. σ_{ij} の最初の添字 i は応力ベクトルの第 i 成分, 後ろの添字 j は面の向きの j 成分に対応している.

この表現は, 先に見出した面の表と裏に働く応力の関係を正しく表していることに注意されたい. すなわち,

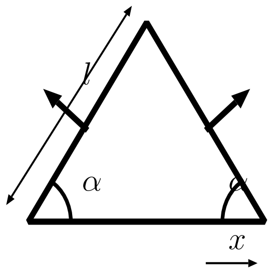
$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})n_j\boldsymbol{e}_i = -\sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})(-n_j)\boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}), \tag{13}$$

である.

5　垂直応力について

平面の接線方向の応力 (せん断応力ともいう) が常に 0 である場合, 法線方向の応力は平面の向きによらない.

連続体中に図のようなプリズム型の領域を考える.



プリズム型の領域

各面の法線方向に応力 p_i $(i = 1, 2, 3)$ が働いているとする.

1. まず, 連続体が静止していて働く力が応力のみである場合を考える.

   x 方向の力がつり合うことから

   $$p_1 l \sin\alpha = p_2 l \sin\alpha \quad \text{ゆえに} \quad p_1 = p_2$$

   任意の角度 α について成り立つので, 法線方向の応力は面の向きによらず一定である.

2. 次に, 連続体は静止していて体積力が働く場合を考える.

   プリズム領域に働く体積力は l^3 に比例する. 一方, 領域の境界面に働く力 (応力の寄与) は l^2 に比例する. 領域を十分小さくとれば, 体積力は応力の寄与より十分小さくなるので無視することができる. したがって, 体積力が働いていない場合の結果がそのまま成り立ち, 法線方向の応力は面の向きによらず一定である.

3. さらに, 連続体が運動している場合を考える.

   プリズム型の領域とともに動く座標系にのってみたとき, 連続体には応力・外力に加えて慣性力が働き, それらがつりあって静止している. ところで慣性力は体積力であるから, 領域を十分小さくとれば, 応力の寄与より十分小さくなるので無視することができる. したがって, このときも先の結果と一致して, 法線方向の応力は面の向きによらず一定であることがわかる.

以上より, 接線方向の応力が常に 0 であるならば, 法線方向の応力の大きさは面の向きによらないことが示された.

6 応力テンソルの対称性

応力テンソルは角運動量保存則を考察することにより, 物体が極性物質でなければ, 対称テンソルであること示せる. この場合, 応力テンソルの自由度は $3 \times 4/2 = 6$ ということになる.

6.1 対称性

連続体内の領域 D として点 $\boldsymbol{x}$ を含む, 微小 6 面体を考察する. 各面が座標面に平行になるように局所直交座標系をとる (図).

6 面体の高さを δ とする. 6 面体の形を保ったまま $\delta \to 0$ に近づける. 角運動量方程式 (6) において体積力, すなわち, 体積積分であらわさられる項は角運動量の時間変化項も含め, δ^4 に比例して小さくなる:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_D \boldsymbol{j} \rho dV \propto \delta^4$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_D \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x}) dV \propto \delta^4$$

一方, 面積力, すなわち面積分であらわされる項の寄与は δ^3 に比例して小さくなる. よって, $\delta \to 0$ においては

$$0 = \int_{\partial D} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) dS$$

でなければならない[2].

第 3 軸成分について考える. このとき面積分に寄与するのは第 1 軸, 2 軸成分に垂直な面だけであり

$$0 = \frac{\Delta x}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e_1}}, \boldsymbol{e_2}) \Delta y \Delta z - \frac{\Delta y}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e_2}}, \boldsymbol{e_1}) \Delta x \Delta z$$

[2]物体が微視的な角運動量 $\boldsymbol{s}$ を持つ場合には

$$\lim_{\delta \to 0} \int_D \boldsymbol{j} \rho dV = \lim_{\delta \to 0} \int_D (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s}) \rho dV$$

である. このとき $\boldsymbol{s}$ の項は δ^3 の程度でしか小さくならないのでバランスは

$$\int_D \boldsymbol{s} \rho dV = \int_{\partial D} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) dS$$

となる. したがって応力テンソルは対称にはならない.

$$-\frac{\Delta x}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e_1}}, -\boldsymbol{e_2})\Delta y\Delta z + \frac{\Delta y}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e_2}}, -\boldsymbol{e_1})\Delta x\Delta z$$

すなわち

$$0 = (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e_1}}, \boldsymbol{e_2})\Delta x\Delta y\Delta z - (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e_2}}, \boldsymbol{e_1})\Delta x\Delta y\Delta z$$

領域の取りかたに依存しないので任意の Δx, Δy, Δz について成り立たねばならない. したがって

$$(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e_1}}, \boldsymbol{e_2}) = (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e_2}}, \boldsymbol{e_1})$$

あるいは

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

である.

同様のことを 1, 2 軸成分について行うことにより

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13},$$

が得られる. したがって応力テンソルは対称である.

7　参考文献

Batchelor,G.K., 橋本英典 他 訳：入門流体力学, 東京電機大学出版局, 614pp.

Landau,L.D., Lifshitz,E.M., 竹内 均 訳, 1970：流体力学 1, 東京図書, 280pp.

今井　功, 1973：流体力学 (前編), 裳華房, 428pp.

8 謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっている. 原作版は竹広真一による「流体力学の基礎」(1989-04-21) であり, 保坂征宏による改定 (1990-04-23) を経て, 林祥介/竹広真一によって「連続体力学: 応力」として書き直された (1996-04-23). 構成とデバッグに協力してくれたセミナー参加者のすべてに感謝するものである.