

回転成層流体の基本特性, 資料

林 祥介・岩山隆寛・竹広真一

2020 年 9 月 13 日

目次

1	熱力学による考察: 成層安定性	2
2	地衝風平衡	9
3	地衝風調節	16
4	軸対称流の安定性, 慣性不安定	21
5	摩擦の影響: エクマン層	31

回転成層流体の著しい特色は, 温度差があっても「水平対流しない」ですませられることにある. 圧力勾配があってもコリオリ力でもってそれを支えることができるので, 圧力勾配方向の流れは生じないでよい (温度風平衡). 水平対流させようとするれば圧力勾配をささえているコリオリ力を減じるべく何らかの形で運動量を散逸させないといけない. 流れの場が圧力勾配をささえるこの特性は渦のそれである. 軸対象渦は理想流体方程式の定常解であり, したがって, 流れは粘性等による散逸を経るまでいつまででも存在しているのである. 回転系に乗っかっている静止流体は, 慣性系から見れば文字通り渦巻いているわけであるから, 渦としての定常状態をとることができる.

1 熱力学による考察: 成層安定性

重力場中におかれた流体を考えよう. 重力場中の運動を予想するもっとも有用な経験は「上の方が重ければひっくり返る」である*¹. 重力場中で上下 (重力ポテンシャルの勾配方向) にひっくり返る流体運動を鉛直対流 (略して vertical convection*²) という. 重力場中の流体の鉛直安定性の指標を静的安定度 (static stability) という. 静的安定度は熱力学的な情報のみで構成される量である. 一度その定式化を理解すれば鉛直対流が発生するかどうかはもはや運動方程式を解かないで予想することができる.

まず, 重力場中で静止している流体が満たさなければならない条件を求めよう. その圧力, 密度を p, ρ とする. 流体は完全流体であるものとし, 重力以外の力も働いていないものとする. 流体力学の基礎方程式において $\frac{\partial}{\partial t} = 0, \mathbf{v} = 0$ とおけば, 連続の式, 熱力学の式は自明, 運動方程式から

$$0 = -\nabla p - \rho \nabla \Phi \quad (1)$$

が得られる. これを静水圧平衡の式という. $\nabla \Phi$ 方向に z 軸をとった直線直交座標を導入し, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g$ とすれば

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \quad (2)$$

静水圧平衡状態では水平方向, つまり, ポテンシャル勾配と直交する方向に圧力勾配があってはならない. 静水圧平衡にある密度非一様な流体を密度成層した流体という. 水平方向に圧力勾配があるときは直ちに運動が発生してしまう. 粘性が入っていても事情はかわらない. 運動が発生して速度勾配による粘性ストレスが圧力勾配とつりあうまで加速が続くのである.

*¹ 本当は, 上の方が重いからといって必ずしも運動が生じるわけではない. 粘性や伝導の効果により運動が生じない場合もある (ほんのちょっとだけ). 正しい法則は「上の方が軽ければ容易にはひっくり返らない」である.

*² convection という英語はより一般的に単に「移流」という意味で使われることもある. $\mathbf{v} \cdot \nabla \bullet$ を convective derivative あるいは convection term という. また, 上の方が重いわけではないが水平に密度差があり結果として水平に圧力差があることによって生じる運動を水平対流 (horizontal convection) という.

密度成層した流体を記述する一つの尺度としてスケールハイト (scale height) がある. スケールハイトは

$$H_\rho \equiv \rho / \left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right|, \quad H_p \equiv p / \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|, \quad (3)$$

で定義される長さである. H_ρ を密度スケールハイト (density scale height) H_p を圧力スケールハイト (density scale height) という. 静水圧平衡にある流体ならば $H_p = \frac{p}{\rho |\nabla \Phi|}$ である. 静水圧平衡にある理想気体ならば $H_p = \frac{RT}{g}$ である. さらに等温ならば $H_p = H_\rho =$ 定数 であり, $p = p_0 \exp(-z/H_p)$ 大気的全質量 (面積当) は (重力一定とみなせる範囲で) $\rho_0 H_p$ である (なんのことも無い = p_0/g).

運動を考えるとときは運動方程式から静水圧平衡部分を差し引いて議論することが多い. 適当な準拠圧力場 \bar{p} と密度場 $\bar{\rho}$ を静水圧平衡 $-\nabla \bar{p} - \bar{\rho} \nabla \Phi = 0$ を満たすように定義する. 運動方程式の右辺からこの部分を差し引けば

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla(p - \bar{p}) - (\rho - \bar{\rho}) \nabla \Phi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}'. \quad (4)$$

$-(\rho - \bar{\rho}) \nabla \Phi$, すなわち, $-(\rho - \bar{\rho})g$, の項を浮力という. 密度が一様一定な流体では適当な圧力場を使って保存力 $\nabla \Phi$ の項を消去することができることに注意. 準拠密度場として $\bar{\rho} = \rho = \text{const.}$ と選ばばよい. 水中では水と同じ密度の人には浮力が働かない, つまり, 重力を感じないのでどっちが上だかわからない.

静水圧平衡状態にある流体の重力的な安定性は流体粒子を仮想的に上下にずらしてみてもその密度とその位置での周囲の密度との比較で判断される. 着目する流体粒子の密度を周囲の密度と区別のために $\tilde{\rho}$ と書くことにする. 注目している高さを z_0 , 微小変位を δz とすれば, 上向きに変位させたとき ($\delta z > 0$),

$$\tilde{\rho}(z_0 + \delta z) < \rho(z_0 + \delta z)$$

ならば, 周囲の流体よりも軽いので上向きの浮力が働き変位は助長されるので不安定であると判断される. δz 変位した高さでの流体粒子の密度 $\tilde{\rho}(z_0 + \delta z)$ を厳密に知るためには運動方程式を解かなければならない. が, 圧力は常に周囲の圧力 p に等しい, とみなしてよいことにすれば議論は熱力学的な条件を指定するだけでよくなる. これは, ある高さにちょうど浮かんでいる風船 (つまり周囲の流体と同じ密度) を持ってきてちょっと押しつけて見ることに相当する. 風船の運動はゆっくりしていて風船内の圧力は周囲の圧力とつりあっているとみなせる. 与えるべき熱力学的な条件は風船の内部の空気の熱力学的な特性

と周囲との熱的やりとりである. このような仮想的な風船のことを空気塊, 水塊, ..., パーセル (parcel) といい, 流体粒子に対してこのような扱いをすることを, パーセル法 (parcel method) と呼ぶ. パーセルの圧力を p に置き換えるので z 方向の運動方程式は浮力だけの問題となって

$$\tilde{\rho} \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -(\tilde{\rho} - \rho)g$$

である (基準圧力・密度場として周囲の圧力・密度を用いた). δz の 1 次で展開すると

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -\frac{g}{\rho} \left[\frac{d}{dz} (\tilde{\rho} - \rho) \right]_{z=z_0} \delta z$$

$\frac{d\tilde{\rho}}{dz}$ はパーセルの従う熱力学過程に応じて記述されるべき量である. 一方 $\frac{d\rho}{dz}$ は周囲の場として与えられている量である.

パーセルの運動にともなう熱力学過程として通常よく用いられるものは断熱過程 $\frac{d\tilde{s}}{dz} = 0$ である. そこで密度をエントロピーと圧力で表示することにして $\tilde{\rho} = \rho(\tilde{p}, \tilde{s})$, $\rho = \rho(p, s)$ と書けば, 運動方程式の右辺は

$$\begin{aligned} & -\frac{g}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{d\tilde{s}}{dz} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dz} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dz} \right] \delta z \\ & = \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} \delta z = -\frac{gT}{c_p} \alpha \frac{ds}{dz} \delta z \end{aligned}$$

と変形される. ただし c_p は比熱, T は流体の温度, $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ である. ここで

$$N^2 \equiv \frac{gT}{c_p} \alpha \frac{ds}{dz} \quad (5)$$

とおくと

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -N^2 \delta z$$

となる. かくして成層流体は $N^2 > 0$ ならば安定成層, $N^2 < 0$ ならば不安定成層, $N^2 = 0$ のとき中立成層と呼ばれる. N は時間の逆数の次元をもち, 浮力振動数 (buoyancy frequency) あるいはブラウント・バイサラ振動数 (Brunt-Vaisala frequency) とよばれる. 通常 $\alpha > 0$ なのでエントロピーが上層程大きくなる ($\frac{ds}{dz} > 0$) ような成層は安定成層である.

エントロピーが上層程大きいあるいは小さい, という指標は実用上不便である. 温度や圧力といった直接観測可能な量で表現しておいた方が便利である. 熱力学関係式と静水圧関係を利用すれば

$$N^2 \equiv \frac{gT}{c_p} \alpha \left[\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} \right] = g\alpha \left[\frac{dT}{dz} + \frac{gT}{c_p} \alpha \right]. \quad (6)$$

理想気体ならば $\alpha = \frac{1}{T}$ なので $N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{g}{c_p} \right)$ である. したがって理想気体の中立成層は温度で表現すれば直ちに $\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p}$ であることがわかる. これよりも温度勾配がきつい (上昇するにつれ成層温度が低い) と不安定である. 温度勾配

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dz} &= - \frac{\partial(T, s)}{\partial(p, s)} \frac{dp}{dz} \\ &= - \frac{\partial(T, s)}{\partial(T, p)} \frac{\partial(T, p)}{\partial(p, s)} \frac{dp}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p \frac{dp}{dz} \\ &= - \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T} \right)_p \frac{T}{c_p} \frac{dp}{dz} = - \frac{\alpha T}{\rho c_p} \frac{dp}{dz} \\ &= \frac{g}{c_p} \end{aligned} \quad (7)$$

のことを断熱温度減率 (adiabat) という.

パーセルの運動とともに相転移を起こす場合でも断熱過程 $\frac{d\tilde{s}}{dz} = 0$ である限り得られる N^2 の表現は先に求めたものと同じである. が, α が複雑な形になる. 一般的表示を求めるにはエントロピーの具体的関数形を求めなくてはならない. たとえば理想気体に凝結する理想気体が混ざっていたとしよう. エントロピーは混合理想気体のそれと凝結した物質のそれとの和でかけるとすれば結局断熱温度勾配は

$$\frac{g}{c_{pd}} \frac{1 + \frac{l(T) q_v^*}{R_d T q_d}}{q_d + q_v^* \frac{c_{pv}}{c_{pd}} + q_c^* \frac{c_{pc}}{c_{pd}} + \varepsilon (q_d + q_v^*/\varepsilon)} \frac{l(T)^2 q_v^*}{R_d c_{pd} T^2 q_d} \quad (8)$$

となる. この断熱温度勾配を湿潤断熱勾配 (moist adiabat) と言う. ただし, 添字 d, v, c はそれぞれ凝結しない成分, 凝結する成分の気相, 凝結相を表し, q は質量混合比 ($q_d + q_v + q_c = 1$), ε は凝結しない成分の分子量で規格化した凝結性成分の分子量 ($\varepsilon \equiv m_v/m_d$), R は質量当たりの気体定数である. 添字 $*$ は飽和していることを示し, 飽

和蒸気圧 $p^*(T)$ で書けば, $q_v^*(p, T) = \frac{\varepsilon p^*(T)}{p - (1 - \varepsilon)p^*(T)}$ である. $l(T)$ は潜熱でありクラウジウス・クラペイロン (Clausius-Clapeyron) の式 $l = T(\rho_v^{-1} - \rho_c^{-1}) \frac{dp^*(T)}{dT}$ に従う. 地球大気の場合は, 降水があってパーセルから凝結した物質が離脱するので考察すべき運動はもはや断熱過程ではない. $\frac{d\bar{s}}{dz}$ はしかるべき値を持つことに注意する必要がある. 熱のやりとりは降水として離脱する部分だけ, とし得られる中立温度勾配を湿潤擬断熱勾配ということもある.

地球大気の場合は, 水蒸気量がたかだか 1 パーセント程度の量なので上記表式で小さい項を無視した

$$\frac{g}{c_{pd}} \frac{1 + \frac{l(T)}{R_d T} q_v^*}{1 + \varepsilon \frac{l(T)^2}{R_d c_{pd} T^2} q_v^*} \quad (9)$$

がおおむね湿潤擬断熱勾配のいい近似になっている. 水蒸気量が少ないことを陽に使うであらためてやりなおすと, 静水圧, 断熱過程であるとして, エントロピーの変化は

$$\begin{aligned} 0 &= T ds \\ &= T \left(\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T, q_v} dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p, q_v} dT + \left(\frac{\partial s}{\partial q_v} \right)_{p, T} dq_v \right) \\ &= g dz + c_p dT + l dq_v \end{aligned}$$

と簡略に書ける. c_p は凝結相も加えた気塊全体の質量当たりの比熱である. (水蒸気が $-dq_v$ 凝結した分だけ熱 $-ldq_v$ が出る). 混合比が小さい, あるいは, p に比して p^* が小さいという近似のもとでは $q_v = \varepsilon p_v / p$. いま, ちょうど飽和していたとすると $q_v = q_v^* = \varepsilon p^*(T) / p$. この時

$$\begin{aligned} g dz + c_p dT + l dq_v^* &= g dz + c_p dT + \varepsilon \frac{l}{p} dp_v^* - \frac{l q_v^*}{p} dp \\ &= g dz + c_p dT + \varepsilon \frac{l}{p} \frac{dp_v^*}{dT} dT + \rho g \frac{l q_v^*}{p} dz \\ &= \left(1 + \frac{l q_v^*}{RT} \right) g dz + \left(1 + \varepsilon \frac{l}{p c_p} \frac{dp_v^*}{dT} \right) c_p dT \end{aligned}$$

クラウジウス・クラペイロンに従い, 凝結相の体積を無視すると

$$l(T) = \frac{T}{\rho_v} \frac{dp_v^*}{dT}$$

よって

$$\begin{aligned} gdz + c_p dT + ldq_v^* &= \left(1 + \frac{lq_v^*}{RT}\right) gdz + \left(1 + \varepsilon \frac{l^2 \rho_v}{pc_p T}\right) c_p dT \\ &= \left(1 + \frac{lq_v^*}{RT}\right) gdz + \left(1 + \varepsilon \frac{l^2 q_v^*}{RT^2 c_p}\right) c_p dT \end{aligned}$$

すなわち

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s = -\frac{g}{c_p} \frac{1 + \frac{Lq^*}{RT}}{1 + \varepsilon \frac{L^2 q^*}{RT^2 c_p}}.$$

水蒸気の混合比が小さい時には, 気相だけのエントロピーの変化を考えることにより, 次のような簡略な式を書くこともある.

$$T ds_g = -ldq_v$$

すなわち

$$\begin{aligned} 0 &= T ds_g + ldq_v \\ &= T \left(\left(\frac{\partial s_g}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial s_g}{\partial T}\right)_p dT \right) + ldq_v \\ &= gdz + c_{pg} dT + ldq_v \end{aligned}$$

大雑把な答えを求めるのならエンタルピー h を使う方が楽であろう. エンタルピーの表式を直観的に得ることはたやすい. たとえば水蒸気が飽和していてその混合量が q_v^* である理想気体ではおおむね $h = c_p T + lq_v^*$. という具合である. 熱力学的関係を使えば $\frac{ds}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dh}{dz} - \frac{1}{T\rho} \frac{dp}{dz}$ である. よって静水圧の式と組み合わせてただちに先の実用的な湿潤断熱勾配が得られる.

N^2 は成層流体の安定性を示す指標であり静的安定度ともよばれる. 物理量としての次元は異なるが $\frac{ds}{dz}$ や $\frac{dT}{dz} - \frac{gT}{c_p} \alpha$ など静的安定度と呼ばれることがある.

最後に, ポテンシャル温度 (温位, potential temperature), あるいは, ポテンシャル密度という量を紹介しておこう. 異なる高さに存在する流体粒子の密度や温度を直接比較し

ても成層安定性の評価には使えない。圧力の効果を考慮してあげないといけないからである。密度や温度を比較するために基準の圧力を指定し、その基準圧力に準静断熱的に変化させた時の流体粒子の温度をポテンシャル温度、あるいは、密度をポテンシャル密度という。浮力振動数を求めるのと同じ手続きのくりかえしになるが、熱力学を用いれば $ds = -\left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p dp + \frac{c_p}{T} dT$ であるから断段過程では $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T}{c_p \rho} \alpha$ 。よって相転移しない理想気体ならポテンシャル温度 θ は

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (10)$$

で定義される。圧力 p の高度において温度 T であったパーセルを準静断熱的に基準圧力 p_0 の高度に持ってきたときに持つべき温度が θ である。ポテンシャル温度あるいはポテンシャル密度が一様な流体は中立成層していることになる。安定成層流体では上にいく程ポテンシャル温度が高い。

中立成層状態というのは金星や木星など深い大気をもつ惑星の大気温度構造の第 0 近似である。赤外放射が直接宇宙空間へ届かないほど厚い大気をもてば熱輸送は対流に頼るほかない。その際、粘性散逸や熱伝導があまり大きくないとすれば、大気が不安定状態にあれば速やかにひっくり返って安定化しなければならない。だから、大気の鉛直温度構造はほぼ中立状態になっているはずである。実際惑星探査機による観測によれば実際対流圏ではほぼ中立状態である。逆に言えば、惑星大気の運動を熱的に見ると中立状態からの小さなずれを考えなければいけないわけである。たとえば、海洋の運動を議論する際には密度の 1000 分の 1 の差が問題になる。

断熱運動をする流体粒子についてはポテンシャル温度 (ポテンシャル密度) はラグランジュ的保存量である。流体粒子は等ポテンシャル温度面から離れない。一方非散逸系ではポテンシャル渦度もラグランジュ的保存量であったので等ポテンシャル温度面上のポテンシャル渦度の図というのを描くと 3 次元流体の運動は 2 次元面上の保存量の運動としてとらえることができる。あるいは逆に等ポテンシャル渦度面上のポテンシャル温度の図ということでも良い。実際、気象学や海洋学では渦の運動をトレースする手段として用いられている。

2 地衝風平衡

さていよいよ回転系の運動を考えることにする。回転系では水平対流, すなわち, 水平に温度差 (密度差) があることによって流れが生じ温度差を解消すること, がおこりにくい。流れが生じるとコリオリ力が働いて結局圧力傾度力とバランスしてしまい, 水平温度差を解消できないのである。このような流れのバランス状態を地衝風 (地衝流, geostrophic wind, geostrophic current) 平衡という。非回転系でも強い渦であれば水平圧力傾度と非線形項として現れる慣性力 (渦とともに回転する系で見ればそのコリオリ力と遠心力) とでバランスできる。しかし, 回転系では線形近似の成り立つような弱い流れについてもバランスが成立してしまう。以下, バランスしている状態, すなわち運動があるので静止状態ではないが, 粘性などの散逸が無ければ時間変化も無い (永久にとまらない) 状態を考察することにする。このような流れの状態を, バランスしているという意味で平衡状態, あるいは, 時間変化が無いので定常状態という。

まず, スケールアナリシス, あるいは, 無次元化, という手法について説明しよう。物理法則を簡略化し, 着目する現象の物理的エッセンスを切り出すための手法で流体力学でよく用いられる。現象を特徴づける物理量の大きさが観測等によりわかっているときは, その大きさを単位にして諸々の物理量を定義しなおし (無次元化という), 方程式の簡略化をおこなうことができる。単位として用いられた大きさのことをスケールともいう。たとえば

$$\begin{array}{ll} \text{速度のスケール} & U \quad \mathbf{v} = U \mathbf{v}_* \\ \text{変化の時間スケール} & \tau \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t_*} \\ \text{変化の空間スケール} & L \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x_*} \end{array}$$

という具合である。* を付した変数はもはや次元を持たないので無次元量と呼ばれる。スケールアナリシスでは微分は単なる割算で評価されることに注意。たとえば $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{U}{\tau} \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t_*}$ であるから $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ のスケールは $\frac{U}{\tau}$ である。

回転系の運動方程式に対して無次元化を行ってみよう。非保存的外力 \mathbf{F}' はとりあえず省

略することにし, また, 粘性は動粘性係数 ν のみで書けるものとする.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau|\Omega|} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{U}{2L|\Omega|} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \hat{\Omega} \times \mathbf{v} \\ = -\frac{\delta p_0}{2|\Omega|LU\rho_0} \frac{1}{\rho} \nabla(\delta p) - \frac{1}{2|\Omega|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho} \hat{\mathbf{g}} + \frac{\nu}{2L^2|\Omega|} \nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, 後の議論のため方程式全体をコリオリ加速項のスケール $2|\Omega|U$ で割った. ここで, $\delta p \equiv p - \bar{p}$ は圧力偏差 (圧力の基準圧力場からのずれ), $\delta\rho \equiv \rho - \bar{\rho}$ は密度偏差 (密度の基準密度場からのずれ) であり, さらに

$$\begin{aligned} \text{圧力偏差のスケール} & \delta p_0 \\ \text{密度偏差のスケール} & \delta\rho_0 \\ \text{密度のスケール} & \rho_0 \end{aligned}$$

として無次元化した. スケール以外の変数はもはやすべて無次元量であり, 添字 * は省略していることに注意. また

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} & \text{ 回転軸方向の単位ベクトル} \\ \hat{\mathbf{g}} & \nabla\Phi \text{ 方向の単位ベクトル} \\ g \equiv |\nabla\Phi| & \text{ 重力加速度} \end{aligned}$$

である.

さて, スケールを組み合わせるといくつかの次元を持たない数, 無次元数と呼ばれる, が定義できる.

$$\begin{aligned} \text{ロスビー (Rossby) 数} & \varepsilon_r \equiv \frac{U}{2L|\Omega|} \\ \text{エクマン (Ekman) 数} & E \equiv \frac{\nu}{2L^2|\Omega|} \end{aligned}$$

ロスビー数は非線形項とコリオリ加速項のスケールの比である. エクマン数^{*3}は粘性散逸

項とコリオリ加速項のスケールの比である. もとの次元量で表現すれば

$$\varepsilon_r = O\left(\frac{|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|}{|2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}|}\right), \quad E = O\left(\frac{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|}{|2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}|}\right)$$

大気や海洋の惑星規模な運動では通常ロスビー数は 1 に比べて小さい数である*4.

ロスビー数が小さいということは, 運動の記述において, コリオリの項に比べれば非線形項はおおむね無視できる, ということを示唆している. 同様に, エクマン数が小さいということは, 粘性項がおおむね無視できる, ということを示唆している. コリオリの項を基準に選んでそれと大きさがおおむね等しくなるように圧力のスケールを選ぶと $\delta p_0 = 2|\boldsymbol{\Omega}|LU\rho_0$ である. 結局運動方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau|\boldsymbol{\Omega}|} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \varepsilon_r \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{v} \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla(\delta p) - \frac{1}{2|\boldsymbol{\Omega}|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho} \hat{\mathbf{g}} + E\nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned} \quad (12)$$

以後, 定常運動 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ を考えよう. エクマン数が小さいも ($E \ll 1$) のとして粘性項も無視すると

$$\varepsilon_r \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\delta p) - \frac{1}{2|\boldsymbol{\Omega}|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho} \hat{\mathbf{g}} \quad (13)$$

これが定常運動が満たしていなければならない方程式である. ロスビー数が小さい ($\varepsilon_r \ll 1$) ものとして移流項を無視すると

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \delta p - \frac{1}{2|\boldsymbol{\Omega}|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho} \hat{\mathbf{g}} \quad (14)$$

*3 エクマン数の逆数の自乗 $T \equiv \left(\frac{2L^2|\boldsymbol{\Omega}|}{\nu}\right)^2$ をテイラー (Taylor) 数とよぶこともあり不安定問題でよく用いられる.

*4 L として惑星半径を, U としてたとえば 10 m/s や 100 m/s など知っている代表的な流速を用いて ε_r を計算してみて欲しい. また, 大気や海洋の惑星規模な運動ではエクマン数も小さい数である. 分子粘性係数をもってエクマン数を計算するととてつもなく小さな数になってしまう. 大気や海洋の大規模な流れは, より小さいスケールで見ると非常に乱れた流れ, 乱流, になっている. 大規模な流れのエネルギーは, 乱流を介して小さいスケールの流れ場に移され, 最終的には分子粘性散逸で消滅する. 乱流の効果による大規模な流れの場の散逸を分子粘性係数と同じ書き方をして, 渦粘性係数と呼ぶ. 渦粘性がどの程度の大きさであるかは先見的にはわからない. 逆に観測にあうようなしかるべき大規模場になるように決めるのが普通である. 地球の大気や海洋の大規模運動においては渦粘性係数をもってしてもエクマン数は非常に小さな数である.

ここで, 直線直交座標を導入しよう. まずはコリオリ力のスケール $2|\Omega|U$ に比べて浮力のスケール $\frac{g\delta\rho_0}{\rho_0}$ が大きい場合を考える. z 軸として $\hat{\mathbf{g}}$ 方向を選ぶ. $\hat{\mathbf{g}}$ と $\hat{\Omega}$ のなす角の余角を ϕ (地球の重力方向と回転軸との関係でいえば ϕ は緯度) とすると

$$\begin{aligned} -\sin\phi v + \cos\phi w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\delta p}{\partial x} \\ \sin\phi u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\delta p}{\partial y} \\ -\cos\phi u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\delta p}{\partial z} - \frac{1}{2|\Omega|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho} \end{aligned}$$

$\frac{1}{2|\Omega|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \gg 1$ なので鉛直成分 (z 成分) の式では浮力とコリオリ力はもはやつりあうことができない. z 成分の式でコリオリ力を無視すれば

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\delta p}{\partial z} - \frac{1}{2|\Omega|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (15)$$

静水圧の式が成り立っていないことになる. z 成分の式でコリオリ力を無視したのと運動エネルギー的につじつまがあう^{*5} ように x 成分の式で $\cos\phi w$ の項を無視すると結局水平成分 (x - y 成分) の式は

$$-\sin\phi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\delta p}{\partial x}, \quad \sin\phi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\delta p}{\partial y} \quad (16)$$

これを地衝風平衡 (geostrophic balance) の式という. 地衝風平衡状態というのは, 鉛直方向に対しては静水圧平衡状態にあるが, その圧力の水平勾配に対してはコリオリ力とバランスしている流れの状態のことをいう^{*6}. 大気や海洋の大規模運動はおおむねこのような地衝風平衡の状態にあり, その時間変化はそこからの小さなずれにほかならない.

^{*5} 左辺は慣性力なので x, y, z 成分に u, v, w をかけてたしあわせたときにエネルギーの生成消滅があっ
てはいけない, つまり 0 になる.

^{*6} 移流項まで入れた表現

$$\varepsilon_r \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \hat{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\delta p)$$

(ただし δp からは静水圧平衡部分を完全に差し引いてポテンシャル力を消去してある) を傾度風平衡 (gradient wind balance) の式ということもある. ちなみに回転系でない場合の表現

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\delta p)$$

を旋衡風平衡 (cyclotrophic balance) ともいう.

浮力優先のスケールでは回転の効果は自転角速度ベクトルの鉛直成分しか寄与しない。もとの回転角速度ベクトルは定ベクトルであったはずなのだが鉛直成分のみを切り出すために惑星上ではその大きさが緯度毎に変化する。両極域では回転の効果は自転角速度 $|\Omega|$ そのものであるが赤道域では 0 となる*7。

ついでに温度風 (thermal wind) という単語も紹介しておこう。地衝風平衡の式を鉛直方向 z で微分し、静水圧の関係を用いて変形を行うと

$$\begin{aligned} \sin \phi \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \delta p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \delta p}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \delta p}{\partial y} + \frac{g}{\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial y} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p \right] = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_p \end{aligned}$$

添字 p を付けた微分は等圧面に沿った微分であることに注意。同様にして結局

$$\sin \phi \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_p, \quad \sin \phi \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_p \quad (17)$$

これを温度風の関係式という。地衝風平衡のこの形での表現を温度風平衡 (thermal wind balance) と呼ぶ。理想気体なら $p = \rho RT$ であるから

$$\sin \phi \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p, \quad \sin \phi \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \quad (18)$$

であるので温度という名前が登場するわけである。回転系では水平に温度差があると鉛直方向に流れのシアが存在しなければならないことを言っている。地球大気の中緯度ジェット (偏西風) で典型的に見られるように、上空にいく程西風が強いということと、南北温度差があるということとは温度風バランスによって要請されているつじつまのあった定常状態なのである。

さて、逆にコリオリ力のスケール $2|\Omega|U$ に比べて浮力のスケール $\frac{g\delta\rho_0}{\rho_0}$ が小さい場合を考える。たとえば成層が中立に近い場合がそれである。流体粒子をよほど大きく変移させ

*7 鉛直方向にはつねに静水圧が成り立つものとする近似を気象学ではプリミティブ方程式系 (primitive equation) と呼ぶ。また、運動方程式で Ω の重力方向成分だけの寄与を残す ($\cos \phi w, \cos \phi u$ を無視する) 近似を気象学・海洋学では伝統的近似 (traditional approximation) という。静水圧近似, 伝統的近似に加え、地球半径に比べて流体層が薄いことを使って球座標系の r の変化を無視した (r が陽に出てきたらすべて地球半径 a で置きかえる) 近似を気象学的近似 (the meteorological approximation) という。大気の地球シミュレーションモデルではそのような方程式系が用いられる。

ない限り大きな浮力が発生しない. z 軸として $\hat{\Omega}$ 方向を選ぶ.

$$\begin{aligned} -v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x} \\ u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial y} - \cos \phi \frac{1}{2|\Omega|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial z} - \sin \phi \frac{1}{2|\Omega|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho} \end{aligned}$$

$\frac{1}{2|\Omega|U} \frac{g\delta\rho_0}{\rho_0} \ll 1$ なのでポテンシャル力の y 成分はもはやどうでもよい存在であり, 考えなくて良い. 結局

$$-v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x}, \quad u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial y} \quad (19)$$

回転軸と直交する面内の運動はコリオリ力と圧力傾度力のバランスに規定されている. これも地衝風平衡ということがある. 浮力優先 (重力軸優先) のスケールでは圧力傾度力は重力と直交する 2 次元面上 (水平方向), 惑星上なら球面上, の運動によるコリオリ力とつりあっていたが, コリオリ力優先 (回転軸優先) のスケールでは圧力傾度力は回転軸と直交する 2 次元面上の運動によるコリオリ力とつりあう. 惑星にあっても球という幾何学はとりあえず忘れてしまうことになる.

特に, 非圧縮 (密度が一定一様, $\rho = \text{const}$) の流体の場合は浮力項がないので

$$-v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x}, \quad u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \quad (20)$$

第一式, 第二式を z で微分して第三式をもちいれば $\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ である. 非圧縮なので $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ であるから $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ となり結局

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

運動は回転軸方向 (z) に依存しない. これをテイラー・プラウドマン (Taylor-Proudman) の定理といい, 実現された z に依存しない流れの場をテイラー柱 (Taylor column) という. 惑星中心殻 (流体殻) あるいは恒星内部に存在すると想定されている熱対流の数値計算では, 運動は重力方向ではなくて回転軸方向にそろった形になる. 中立に近い状況では浮力の影響が小さく, 運動がおおむねテイラー・プラウドマンの定理にしたがうからで

ある*8.

厳密に非圧縮でなくとも, 浮力の効果が無視できるなら,

*8 以上を渦度方程式 (??) において見てみよう. 運動方程式と同様の無次元化を行うと

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)(\varepsilon_r \boldsymbol{\omega} + \hat{\boldsymbol{\Omega}}) + (\varepsilon_r \boldsymbol{\omega} + \hat{\boldsymbol{\Omega}}) \nabla \cdot \mathbf{v} - (\varepsilon_r \boldsymbol{\omega} + \hat{\boldsymbol{\Omega}}) \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

ただし p は全圧力 (基準圧力部分を引いていない) である. すでに E は小さいものとして粘性項は無視してある. ε_r も小さいとして消してしまうと

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} \nabla \cdot \mathbf{v} - \hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

これを一般的な温度風バランスという. 傾圧項によるトルク生成を系の回転ベクトルの起き上がりでバランスさせている. さらに非発散 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ならば

$$-\hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

ρ と p とに何らかの関数関係がある (例えば $\rho = \text{一定}$, あるいは順圧流体 $\rho = \rho(p)$, あるいは中立状態 $s = s(\rho, p) = \text{一定}$,) ときには右辺が 0 で

$$-\hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$$

テイラー・プラウドマンの定理が再び得られる.

3 地衝風調節

回転系の定常状態は地衝風平衡状態になっていなければならない。したがって逆に、適当な初期値からはじめて十分に時間がたった状態を想像すると流れはすべて（おおむね）地衝流になっているはずである。おおむね地衝流にいたる過程を地衝流調節（geostrophic adjustment）という。

ロスビー数の小さい線形の範囲では、初期値に対して得られるべき最終状態は渦位保存則から想像できる。渦位保存則は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q = 0$$

であるが、もともと渦位分布 \bar{q} があって、そこに初期擾乱として q' を加えたとする（ $q = \bar{q} + q'$ ）、線形化された渦度の時間発展方程式は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{q} = 0$$

初期の渦位分布 \bar{q} が空間一様なら q は時間によらず初期値のままとなる。

例として浅水方程式 (shallow water equation) で考えてみよう。浅水方程式は自由水面がある薄い非圧縮流体 (水) の運動を記述する式であり、流れの構造の図示するために地球流体力学では特によく用いられるモデル方程式である*⁹。例によって粘性の存在を無視しよう。重力の軸 $\hat{\mathbf{g}}$ と回転軸 $\hat{\mathbf{\Omega}}$ とは平行であるものとし (あるいは伝統的近似を行ったと思えば良い)、 z 軸を $\hat{\mathbf{g}}$ 方向にとる。非圧縮流体 (ρ 一定) なので熱力学はいらない。連続の

*⁹ 線形化した浅水方程式は、密度静層した流体の方程式 (気象学的伝統近似を行う) を線形化し、鉛直方向依存性と水平方向依存性とは変数分離して得られる式と同じ形をしている。 H_0 は変数分離定数である。鉛直構造が固定されているような大気・海洋の運動構造を記述する際によく用いられる。特に、回転球面 (半径 a) 上の浅水方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \sin \phi &= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial g\eta}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u \sin \phi &= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial g\eta}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H_0 \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \cos \phi v}{\partial \phi} \right] &= 0, \end{aligned}$$

式と運動方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - 2\Omega v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v + 2\Omega u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g\end{aligned}$$

境界条件は

$$\begin{aligned}\text{底面 } z = h_B(x, y) &: w = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} \\ \text{自由表面 } z = h(x, y, t) &: w = \frac{dh}{dt}, p = p_s(\text{一定})\end{aligned}$$

ここで, 運動の水平スケール L は鉛直スケール D に比べて非常に大きいものとする (浅水なのである). 立横比 (aspect ratio) $\delta \equiv D/L \ll 1$ である. 速度の水平成分 (u, v) のスケールを U とすれば連続の式から鉛直方向成分のスケールは高々 $U\delta$ である. 圧力を

$$p = p_s - \rho g z + \tilde{p}$$

と表現することになると運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\rho L U}{\tau} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} + \rho U^2 \mathbf{v}_* \cdot \nabla_* u_* - 2\Omega U \rho L v_* &= -p_0 \frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial x_*} \\ \frac{\rho L U}{\tau} \frac{\partial v_*}{\partial t_*} + \rho U^2 \mathbf{v}_* \cdot \nabla_* v_* + 2\Omega U \rho L u_* &= -p_0 \frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial y_*} \\ \delta^2 \left(\frac{\rho L U}{\tau} \frac{\partial w_*}{\partial t_*} + \rho U^2 \mathbf{v}_* \cdot \nabla_* w_* \right) &= -p_0 \frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial z_*}\end{aligned}$$

ただし, p_0 は \tilde{p} のスケールであり, 添字 $*$ は無次元量であることを表す. 水平成分の式と鉛直成分の式とを比べれば, $\frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial z_*}$ は $\frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial x_*}$, $\frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial y_*}$ に比べて高々 δ^2 の大きさしか持たないこ

において, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$, $\frac{\partial}{\partial \lambda} \rightarrow ik$ と置き換え, 変数を消去して h だけで表現した式

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{\omega'^2 - \mu^2} \frac{d\eta}{d\mu} \right) - \frac{1}{\omega'^2 - \mu^2} \left(-\frac{k}{\omega'} \frac{\omega'^2 + \mu^2}{\omega'^2 - \mu^2} + \frac{k^2}{1 - \mu^2} \right) \eta + \frac{4\Omega^2 a^2}{gH_0} = 0$$

$\mu \equiv \sin \phi$, $\omega' \equiv \omega/2\Omega$ をラプラスの潮夕方程式, その固有関数をハフ関数 (Hough function), 方程式に現れる唯一の無次元数 $4\Omega^2 a^2/gH_0$ をラムパラメタ (Lamb's parameter) という.

とがわかる. $O(\delta^2)$ の範囲で \tilde{p} の z 依存性を無視することができる. 表面 $z = h(x, y, t)$ において圧力は一定値 p_s であるから $\tilde{p} = \rho gh(x, y, t)$ である. 運動方程式水平成分に代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\Omega v &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2\Omega u &= -g \frac{\partial h}{\partial y}\end{aligned}$$

水平圧力傾度力 $-g \frac{\partial h}{\partial x}, -g \frac{\partial h}{\partial y}$ は z によらず一定なので, u, v も z によらないとする (初期値で z によらなければ永久に z によらない). そこで, 連続の式を z で積分し境界条件を用いると

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (h - h_B) + w|_{z=h} - w|_{z=h_B} = 0$$

まとめると浅水方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2\Omega v = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2\Omega u = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (23)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v H}{\partial x} + \frac{\partial v H}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

が得られる. ただし H は流体の深さ $H = h - h_B$ である. 容易にわかるようにこのシステムのポテンシャル渦度は

$$q \equiv \frac{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\Omega}{H} \quad (25)$$

であり,

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad (26)$$

をみたす.

さて, この浅水方程式を用いて地衝風調節を考察しよう. 底面 $h_B = 0$ とする. 擾乱は微

小なので線形化できるものとする.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial v H_0}{\partial x} + \frac{\partial u H_0}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

H_0 は定数, $\eta \equiv H - H_0$ は表面の変位である. 線形化されたポテンシャル渦度は

$$q' = \frac{1}{H_0} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2\Omega \frac{\eta}{H_0} \right] \quad (30)$$

であり, $\frac{\partial q'}{\partial t} = 0$ をみたす.

さて, 初期時刻 $t = 0$ で η にのみ 0 でない値を次のように与える.

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0, \quad \eta(x, y, 0) = \begin{cases} 0 & (x < 0, L > x) \\ \eta_0 & (0 \leq x \leq L) \end{cases}.$$

$t \rightarrow \infty$ での最終状態は, 地衝流状態にあることと q' が時間によらず初期と同じであることから容易に計算できて

$$u(x, y, \infty) = 0, \quad v(x, y, \infty) = \frac{g}{2\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \eta(x, y, \infty)$$

$$\eta(x, y, \infty) = \begin{cases} \eta_0 \left(\frac{1}{2} e^{x/L_R} - \frac{1}{2} e^{(x-L)/L_R} \right) & (x < 0) \\ \eta_0 + \eta_0 \left(-\frac{1}{2} e^{-x/L_R} - \frac{1}{2} e^{(x-L)/L_R} \right) & (0 \leq x \leq L) \\ \eta_0 \left(-\frac{1}{2} e^{-x/L_R} + \frac{1}{2} e^{-(x-L)/L_R} \right) & (L < x) \end{cases}.$$

ただし $L_R \equiv \frac{\sqrt{gH}}{2\Omega}$ であり, これをロスビーの変形半径 Rossby radius of deformation, あるいは単に変形半径という. \sqrt{gH} は後に述べるように水面波 (浅水波) の伝搬速度であり L_R は回転周期程度の時間 $1/2\Omega$ の間で水面波の到達できる距離に対応している. 最終状態として得られる水面の凹凸は L_R 程度の指数関数的な広がりを持つ. 初期に与えた水面の凹凸の幅 L が非常に大きくて $L \gg L_R$ である場合には両端の幅 L_R 程度が削れるだけで, 水面の凹凸はほとんど解消されないことに注意 (η_0 のままである). 逆に初期値の水面の凹凸の幅が非常に狭い $L \ll L_R$ ときには水面の凹凸はほとんど無くなってしまう. 非回転系では水面の凹凸が無くなるのはいわば当然のことであるが, 回転系では初期に与えた擾乱の大きさに依存している.

似て非なる状況として, 初期 $t = 0$ で v にのみ 0 でない値を次のように与えた場合を考えて見よう.

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = \begin{cases} 0 & (x < 0, L > x) \\ v_0 & (0 \leq x \leq L) \end{cases}, \quad \eta(x, y, 0) = 0.$$

$t \rightarrow \infty$ での最終状態は同様に容易に計算できて

$$u(x, y, \infty) = 0 \quad v(x, y, \infty) = \frac{g}{2\Omega} \frac{\partial \eta(x, y, \infty)}{\partial x}$$

$$\eta(x, y, \infty) = \begin{cases} \frac{Hv_0}{2\Omega L_R} \left(-\frac{1}{2}e^{x/L_R} + \frac{1}{2}e^{(x-L)/L_R} \right) & (x < 0) \\ \frac{Hv_0}{2\Omega L_R} \left(-\frac{1}{2}e^{-x/L_R} + \frac{1}{2}e^{(x-L)/L_R} \right) & (0 \leq x \leq L) \\ \frac{Hv_0}{2\Omega L_R} \left(-\frac{1}{2}e^{-x/L_R} + \frac{1}{2}e^{-(x-L)/L_R} \right) & (L < x) \end{cases}.$$

今度は, 初期に与えた速度場の不連続点 ($x = 0, x = L$) を中心に L_R 程度の指数関数的な広がりを持つ水面の凹凸が得られる. 初期に与えた速度場の幅 L が非常に大きくて $L \gg L_R$ である場合には, そのほとんどの領域で速度が雲散霧消してしまって 0 になることに注意. 非回転系では一様な速度場は散逸しない. しかし, 回転系では速度は与えた場所からは散逸してしまう. 波となって伝搬してしまうからである.

初期に水面の凹凸を与えたのと速度場を与えたのとでは, 特に $L \gg L_R$ の場合に, 大きな差が生じた (凹凸はほとんど散逸しないのに対し, 運動量は雲散霧消する). その原因は与えたポテンシャル渦度に大きな差があるからで, 一様な速度場を与えてもポテンシャル渦度自体は 0 である. 定常状態を得るのに重要なのは速度の空間微分, すなわち渦度だからである. この例題では渦度は初期に速度を与えた領域の端にのみ存在する.

4 軸対称流の安定性, 慣性不安定

渦は定常状態を保つことができると述べてきたが, その定常状態が安定であるか否かは別の問題である. ちょっとつついただけで渦がくずれるような場合は, 大雑把にいて二種類, 以下で述べる慣性不安定 (inertia instability) が発生する場合とシアア不安定が発生する場合とがある. 慣性不安定は別名対称不安定 (symmetric instability) と呼ばれ軸対称性を保った不安定である. これに対してシアア不安定では軸対称性を崩す波動の存在が必須であり, 力学的には全く異なる種類のものである*10.

慣性不安定は単純に言えば渦の外側が角運動量一様なプロファイルよりもさらにゆっくり回っている場合に発生する. 軸対称回転している流体の微小部分をドーナツ状に軸対称性を保ったままその半径を少し増やしてみる. この際角運動量は保存される. ずらした位置で働く遠心力が, その位置で回りの場がそもそも作っていた圧力勾配に比べて大きければドーナツ状の微小部分は外向きにほおりだされるわけである. 静止流体の安定性で議論したパーセル法と同様の議論を用いることができるのである.

以下この議論をもう少し詳細に行うことにしよう. 軸対称循環でかつ温度風バランスしている世界を考えることにする. 微小変位を導入することは同じであるが, 静止流体の時とは多少手法を変えてエネルギー的考察を行うことにする. もちろん静止流体の時と同じように微小変位に関する方程式を導きその時間変化の指数 (静止流体の時は浮力振動数であった) が実数か虚数かを判断することもできる. 議論のみかけが異なるが数学的には同じものである.

以下, 理想的な軸対称渦とその軸対称な安定性を考えよう. 円筒座標系で記述することし z 軸を系の回転軸に選ぶ. 理想的軸対称という意味はすべての物理量が角度 ϕ に依存しない ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$) ということである. 簡単のため流体は剛体壁に囲まれているとしよう. 境界条件は $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ である (\mathbf{n} は境界面の法線ベクトル). 散逸も働かないものとして外力は

*10 慣性不安定の発生とシアア不安定の発生とは全く異なる条件に支配される. シアア不安定は二種類の波動の相互作用として理解されるのに対し, 慣性不安定は成層不安定と類似している. 大気平均東西風は通常慣性不安定の領域にはないが, 温度風バランスした平均東西風のみを与えて数値計算を行うと軸対称状態はやぶれて低気圧・高気圧として知られる乱れた流れの状態に至る.

ポテンシャル Φ のみで書けるとする. このような状況での回転系の基礎方程式は (付録参照)

$$\frac{dl}{dt} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} + (l^2 - r^4\Omega^2)\nabla\chi = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi, \quad (32)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rv_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0, \quad (33)$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_m^2 + \frac{1}{2}v_\phi^2 + \varepsilon + \Phi\right) + \nabla \cdot (\mathbf{v}_m p) = 0. \quad (34)$$

となる. Ω は系の回転角速度ベクトルの大きさである. 運動方程式の ϕ 成分は絶対角運動量

$$l \equiv rv_\phi + r^2\Omega$$

で書いた. 一方

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m &\equiv (v_r, 0, v_z), \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_m \cdot \nabla, \\ \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

である. \mathbf{v}_m で生成される流れを子午面循環 (meridional circulation) という. これに対して v_ϕ で生成される流れを帯状循環 (zonal circulation) という. また, 遠心力を表現するために

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2r^2} \\ \nabla\chi &= \left(-\frac{1}{r^3}, 0, 0\right) \end{aligned}$$

を導入した. 系の回転に伴う遠心力 $r\Omega^2$ はポテンシャル Φ に含めてあることに注意. 対応してエネルギーの式で遠心力ポテンシャルが陽に現れている. 境界条件を用いてエネルギー方程式を流体の全領域にわたって積分すると

$$K + J = \text{const.} \quad (35)$$

である. ただし

$$K \equiv \int \frac{1}{2} \rho v_m^2 dV, \quad (36)$$

$$J \equiv \int \rho \left(\frac{1}{2} v_\phi^2 + \varepsilon + \Phi \right) dV = \int \rho \left(l^2 \chi - l\Omega + \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 + \varepsilon + \Phi \right) dV \quad (37)$$

である. K は子午面循環の運動エネルギー, J は軸対称流の運動エネルギーと内部エネルギー, ポテンシャルエネルギーの和である.

まずは定常な軸対称渦が満たすべき条件を求める. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ かつ $\mathbf{v}_m = 0$ である. 子午面の運動方程式からは

$$(l^2 - r^4 \Omega^2) \nabla \chi = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (38)$$

遠心力, 圧力傾度力, 保存力の3つの力がつり合っていることを示している. あるいは $\nabla \times$ をとるとトルクバランス

$$\nabla l^2 \times (-\nabla \chi) = \nabla \frac{1}{\rho} \times (-\nabla p) \quad (39)$$

軸対称 ($\partial/\partial\phi = 0$) なので, ϕ 成分だけが意味があつて

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial l^2}{\partial r}, 0, \frac{\partial l^2}{\partial z} \right) \times \left(-\frac{\partial \chi}{\partial r}, 0, -\frac{\partial \chi}{\partial z} \right) &= \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial r}, 0, \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial z} \right) \times \left(-\frac{\partial p}{\partial r}, 0, -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ (0, 0, \frac{\partial l^2}{\partial r} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial l^2}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial r}) &= (0, 0, \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r}) \end{aligned}$$

よつて

$$-\frac{\partial l^2}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r}$$

となる. これは温度風平衡の一般的表現である.

$$2 \left(\frac{v_\phi}{r} + \Omega \right) \frac{\partial}{\partial z} (v_\phi + r\Omega) = \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_p$$

これらの力のバランスあるいはトルクバランスさえみたせば軸対称な渦は系の定常解であることになる.

さてパーセルを $\delta \mathbf{r} = (\delta r, 0, \delta z)$ だけ変位させる. あくまで軸対称を保つて変化させるのでパーセルはドーナツ型であることに注意. 以下では $\delta \mathbf{r}$ のことを (軸対称) 擾乱と呼ぶことにする. また擾乱も境界条件を満たすものとする, つまり, 境界では $\delta \mathbf{r} = 0$.

軸対称渦の安定性はこの擾乱の成長で判断する. 擾乱が成長し子午面循環 v_m が強まる方向に変化が起きる場合, 擾乱によってもとの軸対称渦が壊されてしまうと解釈して軸対称渦は不安定であるということにする. 逆に擾乱が成長しない場合, 軸対称渦は安定であるということにする.

このことをエネルギー積分を用いて表現すれば, 不安定ならば $\delta^2 J < 0$ である, ということになる ($\delta J = 0$ であることは以下に示す). 軸対称渦それ自体は $K = 0$ である. K は正定値であることに注意すると擾乱が実現するためには $\delta^2 K > 0$ でなければならない. $K + J = \text{一定}$ であるので $\delta^2 K + \delta^2 J = 0$ である. よって $\delta^2 J < 0$ ならば外界からエネルギーを新たに投入することなく擾乱が存在することが可能である. $\delta^2 J > 0$ ならば外界からエネルギーを別途投入しなければ $\delta^2 K > 0$ を得られない. よって不安定ならば $\delta^2 J < 0$ でなければならないのである^{*11}.

$\delta^2 J$ を求めて見よう. $\delta \mathbf{r}$ に対する J の 1 次の変動量はまずは δJ を計算する. 質量は保存量であるから $\delta(\rho dV) = 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \delta J &= \int \left\{ \delta(l^2 \chi) - \delta(l\Omega) + \delta\left(\frac{1}{2}r^2\Omega^2\right) + \delta\varepsilon + \delta\Phi \right\} \rho dV \\ &= \int (l^2 \delta\chi + \Omega^2 r \delta r + \delta\varepsilon + \delta\Phi) \rho dV \\ &= \int \left\{ (l^2 - \Omega^2 r^4) \delta\chi + \frac{p}{\rho^2} \delta\rho + \delta\Phi \right\} \rho dV. \\ &= \int \left\{ (l^2 - \Omega^2 r^4) \delta\chi - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \delta \mathbf{r} + \delta\Phi \right\} \rho dV \\ &= \int \left\{ (l^2 - \Omega^2 r^4) \nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r} + \nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \delta \mathbf{r} \right\} \rho dV \end{aligned}$$

である. $\delta\chi = -r^{-3} \delta r$, 角運動量 l はパーセルに伴う保存量 ($\frac{dl}{dt} = 0$) なので $\delta l = 0$, 内部エネルギーについては, エントロピーの保存 $\delta s = 0$ により $\delta\varepsilon = -p\delta\rho^{-1}$ 密度については質量保存により $\delta\rho = -\rho \nabla \cdot \delta \mathbf{r}$ であることに注意. χ, Φ は場の量であるので $\delta\chi = \nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}$ $\delta\Phi = \nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r}$ である. 境界条件 $\delta \mathbf{r} = 0$ を用いて部分積分すると結局,

$$\delta J = \int \left\{ (l^2 - r^4 \Omega^2) (\nabla \chi) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi \right\} \cdot \delta \mathbf{r} \rho dV \quad (40)$$

^{*11} この議論では $\delta^2 J < 0$ だからといって不安定とは限らない. 不安定ならば $\delta^2 J < 0$ でなければならないといっているだけ.

となる. 力の釣合の式 (38) は $\delta J = 0$ の条件と同等である.

さて $\delta^2 J$ の表現を求める.

$$\begin{aligned}
\delta^2 J &= \int \left\{ \delta [(l^2 - r^4 \Omega^2)(\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r})] + \delta(\nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r}) + \delta\left(\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \delta \mathbf{r}\right) \right\} \rho dV \\
&= \int \left\{ (l^2 - r^4 \Omega^2) \nabla \chi + \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \nabla p \right\} \cdot \delta^2 \mathbf{r} \rho dV \\
&\quad + \int \left\{ -(\nabla(r^4 \Omega^2) \cdot \delta \mathbf{r}) \nabla \chi + (l^2 - r^4 \Omega^2) \nabla(\delta \chi) \right. \\
&\quad \quad \left. + \nabla(\delta \Phi) + \left(\delta \frac{1}{\rho}\right) \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla(\delta p) \right\} \cdot \delta \mathbf{r} \rho dV \\
&= \int \left\{ -(\nabla(r^4 \Omega^2) \cdot \delta \mathbf{r})(\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) - \rho^{-1} \nabla \cdot ([\rho(l^2 - r^4 \Omega^2)] \delta \mathbf{r}) (\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) \right. \\
&\quad \left. - \rho^{-1} (\nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r}) \nabla \cdot (\rho \delta \mathbf{r}) - \rho^{-2} \delta \rho \nabla p \cdot \delta \mathbf{r} - \rho^{-1} \nabla \cdot \delta \mathbf{r} \delta p \right\} \rho dV \\
&= \int \left\{ -(\nabla(r^4 \Omega^2) \cdot \delta \mathbf{r})(\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) - \rho^{-1} \nabla [\rho(l^2 - r^4 \Omega^2)] \cdot \delta \mathbf{r} (\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) \right. \\
&\quad \left. + \rho^{-1} \delta \rho (l^2 - r^4 \Omega^2) (\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) \right. \\
&\quad \left. - \rho^{-1} (\nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r}) \nabla \cdot (\rho \delta \mathbf{r}) - \rho^{-2} \delta \rho \nabla p \cdot \delta \mathbf{r} - \rho^{-1} \nabla \cdot \delta \mathbf{r} \delta p \right\} \rho dV \\
&= \int \left\{ -(\nabla(r^4 \Omega^2) \cdot \delta \mathbf{r})(\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) - \rho^{-1} (\nabla [\rho(l^2 - r^4 \Omega^2)] \cdot \delta \mathbf{r}) (\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) \right. \\
&\quad \left. - \rho^{-1} \delta \rho (\nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r}) - \rho^{-2} \delta \rho (\nabla p \cdot \delta \mathbf{r}) \right. \\
&\quad \left. - \rho^{-1} (\nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r}) \nabla \cdot (\rho \delta \mathbf{r}) - \rho^{-2} \delta \rho \nabla p \cdot \delta \mathbf{r} - \rho^{-1} \nabla \cdot \delta \mathbf{r} \delta p \right\} \rho dV \\
&= \int \left\{ -\rho (\nabla(r^4 \Omega^2) \cdot \delta \mathbf{r}) (\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) - (\nabla [\rho(l^2 - r^4 \Omega^2)] \cdot \delta \mathbf{r}) (\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) \right. \\
&\quad \left. - (\nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r}) (\nabla \rho \cdot \delta \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho c_s^2} (\nabla p \cdot \delta \mathbf{r})^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho c_s^2} (\delta p - \nabla p \cdot \delta \mathbf{r})^2 \right\} dV \\
&= \int \left\{ \rho (\nabla l^2 \cdot \delta \mathbf{r}) (-\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) - (l^2 - r^4 \Omega^2) (\nabla \rho \cdot \delta \mathbf{r}) (\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) \right. \\
&\quad \left. - (\nabla \Phi \cdot \delta \mathbf{r}) (\nabla \rho \cdot \delta \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho c_s^2} (\nabla p \cdot \delta \mathbf{r})^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho c_s^2} (\delta p - \nabla p \cdot \delta \mathbf{r})^2 \right\} dV \\
&= \int \left\{ \rho (\nabla l^2 \cdot \delta \mathbf{r}) (-\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) + (\nabla \rho \cdot \delta \mathbf{r}) (\rho^{-1} \nabla p \cdot \delta \mathbf{r}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho c_s^2} (\nabla p \cdot \delta \mathbf{r})^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho c_s^2} (\delta p - \nabla p \cdot \delta \mathbf{r})^2 \right\} dV
\end{aligned}$$

力のバランスの式を使い, 音速の定義式 (2.3 節参照)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c_s^2$$

を用いれば

$$\delta \rho = \frac{1}{c_s^2} \delta p$$

であり, さらに連続の式を組み合わせると

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho c_s^2} \delta p$$

となること, などを使った. 熱力学関係式を用いれば

$$\begin{aligned} \nabla \rho - \frac{1}{c_s^2} \nabla p &= \nabla \rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \nabla p \\ &= \nabla \rho + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \nabla p \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \left[\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p \nabla \rho + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho \nabla p \right] \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \nabla s \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \nabla s \\ &= \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \nabla s \end{aligned}$$

なので, 結局,

$$\begin{aligned} \delta^2 J = \int \left\{ (\nabla l^2 \cdot \delta \mathbf{r})(-\nabla \chi \cdot \delta \mathbf{r}) - \frac{1}{c_p} \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (\nabla s \cdot \delta \mathbf{r}) \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \delta \mathbf{r}\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho^2 c_s^2} (\delta p - \nabla p \cdot \delta \mathbf{r})^2 \right\} dV \end{aligned} \quad (41)$$

となる.

パーセル法の掟にしたがってパーセルの圧力と周囲の圧力は等しい, すなわち, $\delta p - \nabla p \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ であるとする. $\delta^2 J$ の符号は行列

$${}^T(\nabla l^2)(-\nabla \chi) - \frac{1}{c_p} \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p {}^T(\nabla s) \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p\right) \quad (42)$$

の固有値で決まっていることになる. この行列が正定値であればもとの軸対称循環は安定であることになる.

(42) の第二項は成層安定性の効果である. 極端な場合は静止している ($v_\phi = 0$) 場合で, 成層安定性の節で考察した浮力に関する結論が再生される. つまり z 方向を $\nabla\Phi$ 方向に取れば安定である条件は $\frac{ds}{dz} > 0$ であった.

(42) の第一項が軸対称流の特性に起因する項である. 極端な場合で成層が中立で (つまり第二項が存在しない), かつ, l が z に依存しない場合を考えて見よう. $(\nabla l^2 \cdot \delta\mathbf{r})(-\nabla\chi \cdot \delta\mathbf{r}) = l \frac{\partial l}{\partial r} \frac{1}{r^3} (\delta r)^2$ であるから角運動量が r とともに減少するような場合, つまり外側程遅く回っている場合不安定が発生しうることになる. 不安定の存在しうる条件を書き下せば

$$(v_\phi + r\Omega) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v_\phi}{\partial r} + 2\Omega \right) < 0 \quad (43)$$

である.

密度成層が適当にはいつている一般の軸対称渦の安定性は行列の固有値をきちんと計算してみないとわからない. 地球大気の場合は惑星規模での平均東西風に関しては $2\Omega \sin\phi$ (伝統的近似を行うので Ω の鉛直方向成分のみを考慮) が大きいので慣性不安定がおこることはまずない. 一方中小規模の天気現象などでは慣性不安定も考慮すべき運動構造の一つとなっている.

二次形式の行列を M とする.

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{D}, \\ \mathbf{A} &= \nabla l^2, \quad \mathbf{B} = -\nabla\chi, \quad \mathbf{C} = -\frac{1}{c_p} \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \nabla s, \quad \mathbf{D} = -\rho^{-1} \nabla p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } M &= (A_1 B_1 + C_1 D_1)(A_2 B_2 + C_2 D_2) - (A_1 B_2 + C_1 D_2)(A_2 B_1 + C_2 D_1) \\ &= (A_1 C_2 - A_2 C_1)(B_1 D_2 - B_2 D_1) \\ &= (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) \\ &= \left\{ \nabla l^2 \times \left(-\frac{1}{c_p} \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \nabla s \right) \right\} \cdot \{ (-\nabla\chi) \times (-\rho^{-1} \nabla p) \}. \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr } M &= A_1 B_1 + C_1 D_1 + A_2 B_2 + C_2 D_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \\ &= (\nabla l^2) \cdot (-\nabla \chi) + \left(-\frac{1}{c_p} \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right) (\nabla s) \cdot (-\rho^{-1} \nabla p). \end{aligned} \quad (45)$$

$-\nabla \chi$ は定義によって動径方向であり, 惑星規模の惑星大気海洋の状況では, $-\rho^{-1} \nabla p$ はほとんど鉛直方向である. したがって, $\text{Tr } M > 0$ であり, $\text{Det } M$ の正負によって, 安定もしくは条件付不安定である.

また, 通常は, 惑星規模では ∇l^2 は $-\nabla \chi$ と同様動径方向であり, また, ∇s は $-\rho^{-1} \nabla p$ と同様鉛直方向であるので, $\text{Det } M$

$$\text{Det } M = \left\{ \nabla l^2 \times \left(-\frac{1}{c_p} \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right) \nabla s \right\} \cdot \{ (-\nabla \chi) \times (-\rho^{-1} \nabla p) \}$$

は正となりそうだが, $(-\nabla \chi) \times (-\rho^{-1} \nabla p)$ の ϕ 成分は 0 または 負であるので, ∇s が ∇l^2 より「寝ている」と $\text{Det } M$ は負になる.

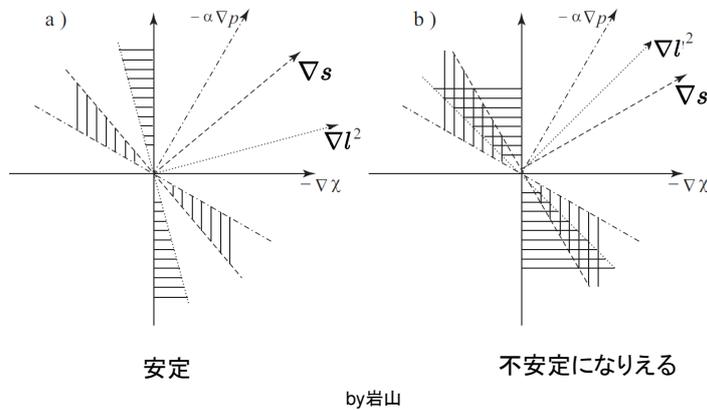


図 1 実線, 破線, 点線, 一点破線はそれぞれ $-\nabla \chi$, ∇h , ∇l , $-\rho^{-1} \nabla p$ の方向およびそれと垂直は方向を表す.

軸対称場においては渦位は

$$\begin{aligned}
 q &\equiv \frac{(\nabla \times \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla s}{\rho} \\
 &= \frac{(\nabla \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) \cdot \nabla s}{\rho} \\
 &= \frac{\nabla \times ((v_\phi + r\Omega)\mathbf{e}_\phi) \cdot \nabla s}{\rho} \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(\nabla \times \left(\frac{l}{r} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \nabla s \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial l}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial l}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) \cdot \nabla s \\
 &= \frac{1}{r\rho} \left(\frac{\partial l}{\partial z} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial l}{\partial r} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \nabla s \\
 &= \frac{1}{r\rho} (\nabla l \times \mathbf{e}_\phi) \cdot \nabla s \\
 &= -\frac{1}{r\rho} (\nabla l \times \nabla s) \cdot \mathbf{e}_\phi
 \end{aligned}$$

であるので, Det M が負であるとは, 通常, 北半球では $q < 0$ であることに対応する.

あるいは

$$q = \frac{1}{r\rho} \left(-\frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial z} \right) = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial(l, s)}{\partial(r, z)}.$$

とも書ける.

5 摩擦の影響: エクマン層

一様回転系では, 水平圧力差はコリオリ力によってバランスし, 散逸がなければ永久にそのままである. 弱い散逸があればゆるゆると流れは崩れていく. 回転系での流れの散逸は渦の力学を介するようにおこる (スピンドアウン). 逆に境界面を引っ張って流れを作るばあいは粘性項を介して運動量が輸送されるわけであるが, これも渦としての特性に支配される (スピニアップ) *12.

状況を図式化するための簡単なモデルを導入しよう. 例として粘性の小さい密度一定 (非圧縮) 流体を考察する. 深さが d で水平方向の広がりも d に比べ十分大きい流体層は回転角速度 Ω で回転しているものとする (水層を回転する台の上に乗せている). 定常状態を考えると, 流体層のほとんどの領域では粘性の効果は無視できて, 地衡流平衡が成り立つ. ところが底面では流体の速度は底面の速度に等しくならなければならない (粘着条件). 粘性の効果が効いているのはこの底面付近の一部だけである. そこで流体は次のような二つの部分に分けられると仮定する. 地衡流平衡が成り立つ領域, これを内部領域と呼ぶことにする. 境界付近にあって, 粘性が効くために地衡流平衡が成り立たない領域, これを境界層 (boundary layer) と呼ぶことにする. 回転系に発生するこの境界層のことを特にエクマン境界層 (Ekman layer) という.

さて, 鉛直方向と回転軸は一致するものとして z 軸を回転軸に取る. z 軸方向の単位ベクトルを \hat{z} とする密度一定流体なので p から静水圧部分を差し引いて重力を消去することができる. 時間, 距離のスケールをそれぞれ $1/2\Omega$, d , 速度のスケールはとりあえず U , 圧力のスケールを地衝風に選んで $\rho\Omega dU$ とし, 無次元化をおこなう. 方程式は

$$\frac{1}{2\tau\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \hat{z} \times \mathbf{v} = -\nabla p + E\nabla^2 \mathbf{v} \tag{46}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{47}$$

となる. すでに, ロスビー数 $\varepsilon_r \equiv \frac{U}{2\Omega d}$ は小さいものとして線形化を施した. 粘性が小さいということの意味はエクマン数 $E \equiv \frac{\nu}{2\Omega d^2}$ も小さい数 ($E \ll 1$) であるということである.

*12 よくある練習問題に, 洗濯機の羽はどこについているか (底), 茶碗の中心に茶葉があつまるのは何故か, 太平洋に浮かぶゴミはどこに集まるか, ... がある. 風がふくとどういふ海流系ができるか, を考えるときの基本アイテムである. 詳細は他の巻に譲る.

だが, 線形近似が優先して成り立つためには $\varepsilon_r \leq O(E^2)$ であなければならない. 時間スケール τ は後で決められる量であるが, $\frac{1}{2\tau\Omega}$ は小さい数であるものとする. 境界条件は上端 (無次元化したので $z = 1$) でストレス無しの壁, 下端 ($z = 0$) で粘着条件を用いることにする.

$$\mathbf{v} = 0 \quad (z = 0) \quad (48)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (z = 1) \quad (49)$$

である.

定常状態 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) を考えよう. E が小さいので内部領域では粘性は効かないと考えれば

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_I = -\nabla p_I, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_I = 0$$

\mathbf{v}_I, p_I は内部領域における速度と圧力をあらわす. これは地衝風バランスであり, 境界条件 $w = 0$ を用いれば, 速度の鉛直成分は 0 である. また, 速度の水成分 u_I, v_I は z によらない (テイラープラウドマンの定理が成り立つ). よって, この流れの場合は粘着境界条件を満たさない. このような問題を数学語では特異摂動問題という. 微分に関する最高次数の項を E が小さいとして無視してしまったためにもとの境界条件を満たすことができない. 特異でない摂動論に従えば速度場や圧力場を微小パラメーター E で展開する, すなわち, 大きさのおおむねひとしい固まりに分ける (振幅展開という). たとえば, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + E\mathbf{v}^{(1)} + \dots$, $p = p^{(0)} + Ep^{(1)} + \dots$ とおいて方程式に代入するわけである. この方法で得られた $O(E^0)$ の方程式が先の内部領域の式であるわけだが, $O(E^1)$ の式を求めて展開をすすめるようにしてもやはり境界条件を満足する答えが得られない.

問題を解決する方法は境界層での長さスケールを変えることである. 粘着条件を課する境界近傍においては鉛直方向に急速に場が変化すると考えられる (まさにそれをもって境界層というわけである) ので, $E \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}$ は大きい値をとり, $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}$ と同じオーダーになっていなければならない. そこで小さい数 δ_E を導入して座標を引き延ばす, つまり, $\zeta \equiv z/\delta_E$ なる座標を新たに定義することにする. もとの方程式 (46) をながめれば容易に理解されるように $\delta_E = \sqrt{E}$ とおけばコリオリ力と粘性力のバランスが成立しうる. このスケールの再評価に対応して速度と圧力をそれぞれ二つの部分に分ける. 一方は内部領域をつかさどる z で表現される関数でもう一方は境界層を担当する $\zeta = z/\delta_E$ で表現される関数で

ある.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_I(z) + \tilde{\mathbf{v}}(\zeta) \quad (50)$$

$$p = p_I(z) \quad (51)$$

象徴的に鉛直方向の引数を残しておいた. $\tilde{\mathbf{v}}$ を z で微分する時は係数として大きな数 $\frac{1}{\delta_E}$ がかかるというわけである. 注意すべきことは, 圧力に関しては内部領域と境界層とを区別しない. 高階微分が直接かかわってこないからである. $\tilde{\mathbf{v}}$ に対する境界条件は

$$\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_I = 0 \quad (z = 0) \quad (52)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow 0 \quad (\zeta \rightarrow \infty) \quad (53)$$

である. 境界層の下端では本当の境界条件 $\mathbf{v} = 0$ を満たすように定める. 境界層の上端は $\zeta \rightarrow \infty$ であると認識し, そこで境界層を担う部分の関数 $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow 0$ となり滑らかに内部領域につながってくれることを要請するのである.

改めて方程式を解くことにしよう. 今度は時間微分を残しておくとする. 改めて各変数

を \sqrt{E} で振幅展開し (スケールとして \sqrt{E} がでてきたので), 方程式に代入する.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(u_I^{(0)} + E^{1/2} u_I^{(1/2)} + E u_I^{(1)} \dots + \tilde{u}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{u}^{(1/2)} + E \tilde{u}^{(1)} \dots \right) \\ & - \left(v_I^{(0)} + E^{1/2} v_I^{(1/2)} + E v_I^{(1)} \dots + \tilde{v}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{v}^{(1/2)} + E \tilde{v}^{(1)} \dots \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(p_I^{(0)} + E^{1/2} p_I^{(1/2)} + E p_I^{(1)} \dots \right) \\ & + E \nabla^2 \left(u_I^{(0)} + E^{1/2} u_I^{(1/2)} + E u_I^{(1)} \dots + \tilde{u}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{u}^{(1/2)} + E \tilde{u}^{(1)} \dots \right), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_I^{(0)} + E^{1/2} v_I^{(1/2)} + E v_I^{(1)} \dots + \tilde{v}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{v}^{(1/2)} + E \tilde{v}^{(1)} \dots \right) \\ & + \left(u_I^{(0)} + E^{1/2} u_I^{(1/2)} + E u_I^{(1)} \dots + \tilde{u}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{u}^{(1/2)} + E \tilde{u}^{(1)} \dots \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial y} \left(p_I^{(0)} + E^{1/2} p_I^{(1/2)} + E p_I^{(1)} \dots \right) \\ & + E \nabla^2 \left(v_I^{(0)} + E^{1/2} v_I^{(1/2)} + E v_I^{(1)} \dots + \tilde{v}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{v}^{(1/2)} + E \tilde{v}^{(1)} \dots \right), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(u_I^{(0)} + E^{1/2} u_I^{(1/2)} + E u_I^{(1)} \dots + \tilde{u}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{u}^{(1/2)} + E \tilde{u}^{(1)} \dots \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_I^{(0)} + E^{1/2} v_I^{(1/2)} + E v_I^{(1)} \dots + \tilde{v}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{v}^{(1/2)} + E \tilde{v}^{(1)} \dots \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(w_I^{(0)} + E^{1/2} w_I^{(1/2)} + E w_I^{(1)} \dots + \tilde{w}^{(0)} + E^{1/2} \tilde{w}^{(1/2)} + E \tilde{w}^{(1)} \dots \right) = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

また

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{X} = E^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{X} \quad (57)$$

であることに注意.

内部領域に関する $O(E^0)$ の式は先のものと同じである. 成分でかくと

$$-v_I^{(0)} = \frac{\partial p_I^{(0)}}{\partial x}, \quad u_I^{(0)} = \frac{\partial p_I^{(0)}}{\partial y}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial w_I^{(0)}}{\partial z} = 0. \quad (59)$$

時間変化項は $\frac{1}{2\tau\Omega}$ を小さい数としているのでとりあえず出てこない. よって, 地衝風なの

で水平非発散 $\frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial y} = 0$, これと連続の式ならびに上端の境界条件から $w_I^{(0)} = 0$ となる.

一方境界層では $O(E^{-1/2})$ の式から始まる. 連続の式である.

$$\frac{\partial \tilde{w}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0 \quad (60)$$

下端の境界条件から $\tilde{w}^{(0)} = -w_I^{(0)} = 0$ でなければならない. 境界層での $O(E^0)$ の式は

$$-\tilde{v}^{(0)} = \frac{\partial^2 \tilde{u}^{(0)}}{\partial \zeta^2}, \quad \tilde{u}^{(0)} = \frac{\partial^2 \tilde{v}^{(0)}}{\partial \zeta^2}, \quad (61)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}^{(1/2)}}{\partial \zeta} = 0. \quad (62)$$

境界条件 ($\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_I = 0$ ($z = 0$)) を用いて解くと ($u_I^{(0)}, v_I^{(0)}$ は ζ で見たときには定数だと思ふ),

$$\tilde{u}^{(0)} = -u_I^{(0)} e^{-\zeta/\sqrt{2}} \cos \zeta/\sqrt{2} - v_I^{(0)} e^{-\zeta/\sqrt{2}} \sin \zeta/\sqrt{2}, \quad (63)$$

$$\tilde{v}^{(0)} = -v_I^{(0)} e^{-\zeta/\sqrt{2}} \cos \zeta/\sqrt{2} + u_I^{(0)} e^{-\zeta/\sqrt{2}} \sin \zeta/\sqrt{2}. \quad (64)$$

速度 ($\tilde{u}^{(0)}, \tilde{v}^{(0)}$) は高さ方向 ζ をパラメタにする螺旋型をしており, これをエクマン螺旋 (Ekman spiral) という. δ_E は境界層内の水平速度 ($\tilde{u}^{(0)}, \tilde{v}^{(0)}$) が $e^{-1/\sqrt{2}}$ の大きさになる高さであり, これをエクマン層の高さという. エクマン境界層内では粘性力のためにコリオリ力で支えられなくなった分だけ圧力傾度力方向に流れが生じる. その積分輸送量のことをエクマン輸送 (Ekman transport) という. 積分を実行しスケーリングファクターを内部領域のものにもどしてやればエクマン輸送は

$$\tilde{u}_T = -\frac{\delta_E}{\sqrt{2}} v_I^{(0)}, \quad \tilde{v}_T = \frac{\delta_E}{\sqrt{2}} u_I^{(0)} \quad (65)$$

である.

さていよいよ時間変化を考えよう. 境界層内では地衝風平衡がやぶれているので一般に水平収束がある. 境界層での解を (62) に代入すれば $u_I^{(0)}, v_I^{(0)}$ に水平収束がないことに注意して

$$\frac{\partial \tilde{w}^{(1/2)}}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial y} \right) e^{-\zeta/\sqrt{2}} \sin \zeta/\sqrt{2}.$$

境界層上端まで積分すると

$$\tilde{w}^{(1/2)} \Big|_{\zeta=\infty} - \tilde{w}^{(1/2)} \Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial y} \right)$$

これはエクマン輸送量の収束分に他ならない. 境界条件 ($\tilde{w}^{(1/2)} \Big|_{\zeta=\infty} = 0$, $w_I^{(1/2)} + \tilde{w}^{(1/2)} = 0$ ($z = 0$)) により結局

$$w_I^{(1/2)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial y} \right) \quad (66)$$

であることになる. 内部領域の渦度に比例する上昇流が生じるのである. この現象をエクマンポンピングという. エクマンポンピングとして発生する上昇流が内部領域の渦度の伸び縮みをおこし, 結果として内部領域の渦を減衰させるのである.

内部領域の $O(E^{1/2})$ の式を書き下すと

$$\frac{1}{2\tau\Omega E^{1/2}} \frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial t} - v_I^{(1/2)} = \frac{\partial p_I^{(1/2)}}{\partial x} \quad (67)$$

$$\frac{1}{2\tau\Omega E^{1/2}} \frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial t} + u_I^{(1/2)} = \frac{\partial p_I^{(1/2)}}{\partial y} \quad (68)$$

$$\frac{\partial u_I^{(1/2)}}{\partial x} + \frac{\partial v_I^{(1/2)}}{\partial y} + \frac{\partial w_I^{(1/2)}}{\partial z} = 0 \quad (69)$$

$1/2\tau\Omega$ はたかだか $E^{1/2}$ の大きさであるものとしている. 第一式と第二式とから渦度の z 成分に関する方程式を作り, 連続の式から $u_I^{(1/2)}, v_I^{(1/2)}$ を消去して $u_I^{(0)}, v_I^{(0)}$ は z に依存しないことに注意して鉛直に積分すると

$$\frac{1}{2\tau\Omega E^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial y} \right) = -w_I^{(1/2)}(z=0)$$

エクマン上昇流の表現を使うと結局

$$\frac{1}{2\tau\Omega E^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_I^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u_I^{(0)}}{\partial y} \right) \quad (70)$$

この式が成り立つためにはまさに $1/2\tau\Omega = E^{1/2}$ でなければならない.

$$\tau = \frac{1}{2\Omega E^{1/2}} \quad (71)$$

をスピンドウンタイムと呼ぶ。渦が粘性散逸する際の時間スケールである。

例えば, $d = 0.1$ m, $\Omega = 1$ rad/sec で, 流体として水を想定すると $\nu \sim 10^{-6}$ m²/s, 従って, $E = 0.5 \times 10^{-4}$ m だから $\tau = 10^2/\sqrt{2}$ sec となり, $\delta_E = 10^{-3}/\sqrt{2}$ m

これまでは簡単のために上面に蓋をした議論を行ってきたが, 海洋のように上面がオープンである場合でも議論のすすめ方は全く同じである。風によって海洋表面にストレスが加えられると定常状態ではやはりエクマン層が形成されストレスは直接内部領域には伝えられない。風のストレスが渦度を持っている (回転成分がある) ときのみエクマンパンピングがおこって内部領域の渦を生成させ運動を直接生じさせることができる。境界層内の水平成分の運動方程式を z で積分すると理解されるように, 風のストレスはエクマン輸送にかかるコリオリ力とバランスしていなければならない。したがってエクマン輸送の水平発散は風のストレスの回転になっているのである。

貿易風として知られる亜熱帯大気赤道向けの流れは大気下層に集中している。ほぼ温度風平衡にある対流圏亜熱帯大気の下層, 地面付近が地面摩擦 (鉛直乱流混合) で崩れていることに対応する。赤道域で上昇, 中緯度で下降というハドレー循環の構造は摩擦の関与が本質的なのである。単に赤道域を温めて中緯度を冷やしただけでは, いずれ各緯度での放射平衡に達してその温度での温度風平衡に至るので, 水平対流であるハドレー循環はおこらない。