

**Fortran 90 数值解析ライブラリ
(STPK) マニュアル
(Ver.0.9.30.0)**

辻野智紀

2024 年 8 月 14 日

目次

第 1 章 概要	1
1.1 概要	1
1.1.1 本ライブラリの特徴	1
第 2 章 インストール・使用方法	2
2.1 インストール	2
2.1.1 コンパイルオプション	3
2.1.2 アンインストール	4
2.2 使い方	5
2.2.1 OpenMP に関する諸注意	5
2.3 本ライブラリの使用にあたって	5
第 3 章 サブルーチン一覧	7
3.1 algebra	7
3.1.1 abst_2d	7
3.1.2 abst_3d	7
3.1.3 dot_prod_2d	8
3.1.4 dot_prod_3d	9

3.1.5	<code>rectangle_int</code>	10
3.1.6	<code>vec_prod_2d</code>	10
3.1.7	<code>vec_prod_3d</code>	11
3.2	<code>basis</code>	12
3.2.1	<code>c2i_convert</code>	13
3.2.2	<code>c2r_convert</code>	13
3.2.3	<code>i2c_convert</code>	14
3.2.4	<code>r2c_convert</code>	14
3.2.5	<code>gsub</code>	15
3.2.6	<code>rand_make</code>	15
3.2.7	<code>counter_day</code>	16
3.2.8	<code>counter_sec</code>	17
3.2.9	<code>time_zone_convert</code>	17
3.2.10	<code>sec_convert</code>	18
3.2.11	<code>check_array_size_1d</code>	18
3.2.12	<code>check_array_size_2d</code>	19
3.2.13	<code>check_array_size_3d</code>	19
3.2.14	<code>check_leap_year</code>	20
3.2.15	<code>count_cmax</code>	21
3.3	<code>derivation</code>	21
3.3.1	<code>curl</code>	21
3.3.2	<code>curl_3d</code>	23

3.3.3	div	24
3.3.4	div_3d	25
3.3.5	grad_1d	26
3.3.6	grad_2d	27
3.3.7	grad_3d	28
3.3.8	grad4_1d	29
3.3.9	grad4_2d	30
3.3.10	grad4_3d	31
3.3.11	laplacian_1d	32
3.3.12	laplacian_2d	33
3.3.13	laplacian_3d	34
3.3.14	z_2_zeta	35
3.3.15	zast_2_w_2d	36
3.3.16	zast_2_w_3d	37
3.3.17	local_peak_check_1d	39
3.4	ellip_slv	39
3.4.1	Ellip_GauSei_2d	40
3.4.2	Ellip_Jacobi_2d	42
3.4.3	Ellip_GauSei_3d	45
3.4.4	Ellip_Jacobi_3d	48
3.5	ffts	51
3.5.1	c2r_ffttp_1d	52

3.5.2	ffttp_1d	53
3.5.3	ffttp_2d	54
3.5.4	prim_calc	56
3.5.5	r2c_ffttp_1d	56
3.5.6	rotate_calc	58
3.5.7	phase_velocity_binning	58
3.6	file_operate	60
3.6.1	auto_read_file	60
3.6.2	line_number_counter	61
3.6.3	read_file_grads	62
3.6.4	request_axis_grads	63
3.6.5	request_dim_grads	64
3.6.6	request_vardim_grads	64
3.6.7	read_file	65
3.6.8	read_file_3d	65
3.6.9	read_file_part	66
3.6.10	read_file_gtool3	67
3.6.11	read_file_gtool3_header_c	68
3.6.12	read_file_gtool3_header_i	69
3.6.13	read_file_gtool3_header_r	69
3.6.14	read_file_text	70
3.6.15	read_himsst	71

3.6.16	read_mgdsst	71
3.6.17	write_file	72
3.6.18	write_file_3d	73
3.7	Geometry	74
3.7.1	rt_2_xy	74
3.7.2	xy_2_rt	74
3.8	Map_Function	75
3.8.1	check_close	75
3.8.2	check_intersect	77
3.8.3	check_triclose	78
3.8.4	lat2mery	78
3.8.5	ll2lamdis	79
3.8.6	ll2lamxy	80
3.8.7	ll2merdis	82
3.8.8	ll2radi	83
3.8.9	ll2rt	83
3.8.10	lon2merx	84
3.8.11	rt2ll	85
3.8.12	sph_ll2rt	86
3.8.13	sph_rt2ll	87
3.8.14	sph_vec_ll2rt	88
3.8.15	sph_vec_rt2ll	89

3.8.16	vec2lam	91
3.8.17	x2merlon	92
3.8.18	xy2lamll	93
3.8.19	y2merlat	94
3.9	math_const	95
3.9.1	rotate_array	95
3.10	matrix_calc	97
3.10.1	Gau_Se	97
3.10.2	Jacobi_algebra	97
3.10.3	Jacobi_eigen	98
3.10.4	LU_devs	99
3.10.5	SOR_Gau_Se	100
3.10.6	SOR_Jacobi_algebra	100
3.10.7	determ_2d	101
3.10.8	eigenvalue_power	102
3.10.9	fp_gauss	102
3.10.10	gauss	103
3.10.11	tri_gauss	104
3.10.12	Householder	104
3.10.13	invert_mat	105
3.10.14	fp_invert_mat	106
3.10.15	mat_dot	106

3.10.16	QR_method	107
3.10.17	schumit_norm	108
3.10.18	trans_mat	108
3.11	max_min	109
3.11.1	max_val_1d	109
3.11.2	max_val_2d	110
3.11.3	max_val_3d	110
3.11.4	min_val_1d	111
3.11.5	min_val_2d	111
3.11.6	min_val_3d	112
3.12	phys_const	113
3.13	poly_function	113
3.13.1	chebyshev	113
3.13.2	gegenbauer	114
3.13.3	hermite	115
3.13.4	jacobi_poly	115
3.13.5	laguerre	116
3.13.6	legendre	116
3.13.7	sonine	117
3.14	pv_analy	118
3.14.1	Ertel_PV	118
3.14.2	HEPV	119

3.14.3	HQGPV	120
3.15	special_function	122
3.15.1	Full_Ellip1_Func	122
3.15.2	Full_Ellip2_Func	122
3.15.3	bessj	123
3.15.4	bessy	123
3.15.5	beszero	124
3.15.6	beta_func	125
3.15.7	delta	125
3.15.8	df_bessj	126
3.15.9	df_bessy	126
3.15.10	epsilon	127
3.15.11	gamma_func	127
3.15.12	kaijo	128
3.15.13	sp_bessj	128
3.15.14	sp_bessy	129
3.16	statistics	129
3.16.1	Anomaly_1d	129
3.16.2	Anomaly_2d	130
3.16.3	Anomaly_3d	131
3.16.4	auto_interpo_search_1d	132
3.16.5	auto_interpo_search_2d	132

3.16.6 auto_interpo_search_3d	133
3.16.7 auto_interpolation_1d	134
3.16.8 auto_interpolation_2d	135
3.16.9 auto_interpolation_3d	136
3.16.10 Cor_Coe_1d	137
3.16.11 Cor_Coe_2d	138
3.16.12 Cor_Coe_3d	139
3.16.13 Freqbin_count_1d	139
3.16.14 Freqbin_count_2d	140
3.16.15 Freqbin_count_3d	141
3.16.16 LSM_1d	142
3.16.17 LSM_2d	143
3.16.18 LSM_3d	144
3.16.19 LSM_poly_1d	144
3.16.20 LSM_poly_2d	145
3.16.21 LSM_poly_3d	146
3.16.22 LSM_multi	147
3.16.23 Mean_1d	148
3.16.24 Mean_2d	148
3.16.25 Mean_3d	149
3.16.26 Median_1d	150
3.16.27 Median_2d	150

3.16.28 Median_3d	151
3.16.29 Quantile_1d	152
3.16.30 Quantile_2d	153
3.16.31 Quantile_3d	154
3.16.32 Quartile_1d	155
3.16.33 Quartile_2d	155
3.16.34 Quartile_3d	156
3.16.35 Reg_Line_1d	157
3.16.36 Reg_Line_2d	157
3.16.37 Reg_Line_3d	158
3.16.38 covariance_1d	159
3.16.39 covariance_2d	159
3.16.40 covariance_3d	160
3.16.41 interpo_search_1d	161
3.16.42 interpo_search_2d	161
3.16.43 interpo_search_3d	162
3.16.44 interpolation_1d	163
3.16.45 interpolation_2d	164
3.16.46 interpolation_3d	165
3.16.47 nearest_search_1d	166
3.16.48 nearest_search_2d	167
3.16.49 nearest_search_3d	168

3.16.50 nearest_neighbor_search_1d	168
3.16.51 nearest_neighbor_search_2d	169
3.16.52 nearest_neighbor_search_3d	169
3.16.53 spline_3	170
3.16.54 stand_devi_1d	171
3.16.55 stand_devi_2d	172
3.16.56 stand_devi_3d	173
3.16.57 tri_interpolation	173
3.16.58 Move_ave	174
3.16.59 Move_anom	175
3.16.60 Bubble_Sort	176
3.16.61 Quick_Sort	177
3.16.62 detrend_1d	177
3.16.63 detrend_2d	178
3.17 Thermo_Advanced_Function	179
3.17.1 SSIndex	179
3.17.2 CAPE	180
3.17.3 CIN	181
3.17.4 T_LFC	182
3.17.5 T_LNB	183
3.17.6 precip_water	184
3.17.7 qrsg_2_dbz	184

3.17.8	p_LCL	186
3.17.9	z_LCL	186
3.17.10	z_LFC	187
3.17.11	z_LNB	187
3.18	thermo_advanced_routine	188
3.18.1	Brunt_Freq	189
3.19	thermo_const	189
3.20	thermo_function	189
3.20.1	Cefp	190
3.20.2	Cefv	191
3.20.3	Cl	192
3.20.4	DSE_Emanuel	192
3.20.5	eP_2_qv	193
3.20.6	eP_2_sh	193
3.20.7	es_Bolton	194
3.20.8	es_TD	195
3.20.9	esi_Emanuel	195
3.20.10	eT_2_RH	196
3.20.11	exner_func_dry	196
3.20.12	get_gamma_d	197
3.20.13	goff_gratch	197
3.20.14	goff_gratch_i	198

3.20.15 hypsometric_form	199
3.20.16 LH	199
3.20.17 liquid_enthal	200
3.20.18 moist_enthal	200
3.20.19 MSE_Emanuel	201
3.20.20 qvP_2_e	202
3.20.21 qvT_2_Tv	202
3.20.22 qvTP_2_RH	203
3.20.23 qv_2_sh	204
3.20.24 Reff	204
3.20.25 rhoP_2_T	205
3.20.26 rhoT_2_P	205
3.20.27 RHTP_2_qv	206
3.20.28 RHT_2_e	206
3.20.29 sh_2_qv	207
3.20.30 tetens	208
3.20.31 thetaP_2_T	208
3.20.32 thetaT_2_P	209
3.20.33 theta_dry	209
3.20.34 theta_moist	210
3.20.35 thetae_Bolton	211
3.20.36 thetae_Emanuel	211

3.20.37 thetaes_Bolton	212
3.20.38 thetal_Emanuel	212
3.20.39 thetalv_Emanuel	213
3.20.40 thetaw_Emanuel	214
3.20.41 TthetavP_2_qv	215
3.20.42 thatavqvP_2_T	216
3.20.43 TvT_2_qv	216
3.20.44 qvTv_2_T	217
3.20.45 TP_2.qvs	217
3.20.46 TP_2.shs	218
3.20.47 TP_2_rho	219
3.20.48 Tq_2_Trho	220
3.20.49 TqvP_2_TLCL	220
3.20.50 TqvP_2_thetae	221
3.20.51 TqvP_2_thetaes	222
3.20.52 TqvP_2_thetav	222
3.20.53 TTd_2_RH_Bolton	223
3.20.54 TTd_2_RH_tetens	224
3.20.55 WSE_Emanuel	224
3.20.56 rho_ocean	225
3.20.57 D26	228
3.20.58 OHC	229

3.21 Trajectory	230
3.21.1 Backward_Traject_2d	230
3.21.2 Backward_Traject_3d	233
3.21.3 Forward_Traject_2d	236
3.21.4 Forward_Traject_3d	238
3.21.5 Stream_Line_2d	241
3.21.6 Stream_Line_3d	243
3.22 typhoon_analy	245
3.22.1 grad_wind_pres	245
3.22.2 hydro_grad_eqb	246
3.22.3 hydro_grad_eqb_it	249
3.22.4 hydro_grad_eqbp_it	250
3.22.5 Cart_conv_scal	252
3.22.6 Cart_mean_scal	254
3.22.7 tangent_conv_scal	256
3.22.8 tangent_mean_anom_scal	258
3.22.9 tangent_mean_anom_scal_Cart	260
3.22.10 tangent_mean_anom_vec	262
3.22.11 tangent_mean_scal	264
3.22.12 tangent_median_scal	267
3.22.13 tangent_mean_vec	268
3.22.14 CPS_Hart	270

3.22.15 DC_Braun	272
3.22.16 DC_Braun_SAT	273
3.22.17 DCE_Yang	274
3.22.18 DC_Sat_ZNCC	277
3.22.19 Parallax_Himawari	279
3.22.20 SPLB_Kurihara	280
3.22.21 calc_taufil	281
第4章 サンプルプログラム	283
4.1 サンプルプログラムのコンパイル方法	283
4.2 各プログラムの説明	285
4.2.1 cov	285
4.2.2 fft_test	285
4.2.3 fft_data	286
4.2.4 matrix_test	289
4.2.5 normal_poly	289
4.2.6 read_mgdsst_nc	295
4.2.7 sort	296
4.2.8 thermo	297
4.2.9 thermo2	298
4.2.10 time_check	299
4.2.11 traj_sample	300
4.2.12 wind	300

4.2.13	advection	301
4.2.14	diffusion	303
4.2.15	poison	304
4.2.16	parallax_test	306
4.2.17	adjust	307
4.2.18	Thorpe_2d	310
4.2.19	Thorpe_3d	313
4.2.20	SEQ	315
4.2.21	sound_analysis	316
4.2.22	NM01	322
4.2.23	Karman	329
4.2.24	WK04	333
4.2.25	BAROVOR	334
4.2.26	QGPV	337
第 5 章 付録		340
5.1	ellip_slv の付録	340
5.1.1	境界条件の設定	340
5.1.2	2次元楕円型方程式の求解法	340
5.1.3	3次元楕円型方程式の求解法	347
5.1.4	デカルト座標系以外への適用	363
5.2	Thermo_Advanced_Function の付録	364
5.2.1	レーダ反射強度の導出	364

5.3	map_function の付録	370
5.3.1	球面三角法	370
5.3.2	直交座標系における基底ベクトルの変換	376
5.3.3	地図投影	377
5.3.4	地図投影に伴うベクトル成分変換	386
5.3.5	線分の交差判定	391
5.3.6	三角形の内外判定	392
5.3.7	大円回転による円筒座標から球面座標の変換	393
5.4	Statistics の付録	407
5.4.1	最小自乗法	407
5.4.2	線形内挿	411
5.4.3	スプライン補間	414
5.4.4	三角形の要素内補間	418
5.5	trajectory の付録	418
5.5.1	流跡線	418
5.5.2	時間積分スキーム	420
5.6	Braun (2002) による熱帯低気圧の中心位置推定	422
5.7	Kurihara et al. (1990) によるフィルタリング処理	425
5.8	衛星の視差補正	429
5.8.1	楕円の幾何学	429
5.8.2	ベクトルの幾何学	430
5.8.3	視差補正の必要性	431

5.8.4	視差補正の定式化	432
5.8.5	視差補正の処理手順	436
5.9	付録：サンプル	438
5.9.1	浅水方程式系の導出	438
5.9.2	NM01 におけるモデルの詳細	441
5.9.3	adjust におけるモデルの詳細	443
5.9.4	adjust_2d におけるモデルの詳細	443
5.9.5	BAROVOR/SBL_NBM におけるモデルの詳細	444
5.9.6	MBL_NBM におけるモデルの詳細	449
5.9.7	WK04 におけるモデルの詳細	452
5.9.8	QGPV における定式化詳細	453

第1章 概要

1.1 概要

STPK ライブラリとは、Fortran 90 をベースとする数値解析ライブラリである。数値モデルの出力結果から様々な解析を行うために必要な処理をサブルーチンおよび関数という形で表現し、Fortran 90 のモジュールという概念を用いて用途別に関数を分類した関数集ライブラリである。Linux 系で動作するようにコーディングされているので、Linux 系のディストリビューションが多数を占める大学および研究機関の計算機、ワークステーション、果てはスーパーコンピュータにおいても問題なく動作することが期待される。また、近年計算機に使用されるプロセッサはデュアルコア、クアッドコアが当たり前となっている。そのような環境における高速な解析を実現するために、本ライブラリでは、OpenMP と呼ばれるスレッド並列命令を用いることで、一部処理の高速化を図っている。

1.1.1 本ライブラリの特徴

本ライブラリの特徴として以下のような事柄があげられる。

- lapack などの純粋な数学ライブラリと同様の処理を行う (例えば、連立一次方程式の求解や固有値問題) サブルーチンが充実している。これに関連して特に特殊関数を計算する関数、サブルーチンが非常に充実している。
- 流体力学において必須となる変数の空間微分等を計算するルーチンが充実している。
- 気象観測等の初期解析として必要となる熱力学関係の処理を行うルーチン (相当温位の計算等) が充実している。

以上のようなことから、本ライブラリを扱う上で必要な技能は、「プログラムのコンパイルができる」、「ルーチンと関数が適切に使える」のみである。これは、Fortran に限らず、プログラム言語を少し覚えて、簡単なプログラムなら書けるレベルとそれ以上のユーザーを対象としており、ライブラリとしての敷居が低いことが言えるであろう。

第2章 インストール・使用方法

2.1 インストール

本節では、STPK ライブラリのインストール方法を説明する。

1. tar.gz 形式のソースファイルを以下のコマンドで展開する。

```
$ tar zxvf ソースファイル.tar.gz
```

2. ソースファイルの中に `configure` ファイルが存在することを確認する。
3. コンパイル時に必要となる環境変数を設定する。ただし、用いるコンパイラによって設定する変数は様々であるので、ここでは以下のように例をあげておく。

Intel Fortran 版

```
FC = ifort, FCFLAGS='-assume byterecl (必須) -convert big_endian  
-openmp'
```

gfortran 版

```
FC = gfortran, FCFLAGS='-fconvert=big-endian -fopenmp'
```

Fujitsu Fortran 版

```
FC = frt, FCFLAGS='-KOMP -Am (必須)'
```

g95 版

```
FC = g95, FCFLAGS='-fendian=big'
```

このとき、使用するコンパイラや使用用途に応じて、コンパイルオプションをいくつか追加しなければならない場合がある。それについては、[2.1.1](#) 参照。

4. 展開ディレクトリ内において、`configure` スクリプトによって `Makefile` を作成する。

```
$ ./configure --prefix=インストール先ディレクトリ --includedir=モジュールファイルインストール先
```

これらは、デフォルトでは、`/usr/local` にインストールされる。

5. `make` する。

```
$ make
```

6. `make` が正常に終了したら、`make install` でインストールを行う。

2.1.1 コンパイルオプション

必須事項 1

本ライブラリには、ファイル入出力ルーチンとして、書式なしダイレクトアクセス形式のファイル入出力をサポートしており、入出力の際のレコード長さ単位は 1 バイトを仮定している。ゆえに、入出力ルーチンを使用する際にはこの点に注意すること。Intel Fortran コンパイラなど一部のコンパイラはデフォルトのレコード長さ単位が異なる場合がある。ifort の場合は、`"-assume byterecl"` をつけることで、レコード長さ単位を 1 バイトに設定することができるので必ずオプションをつけておくこと。

必須事項 2

本ライブラリの各手続きは大きくモジュール単位でまとめられている。Fujitsu Fortran コンパイラなど一部のコンパイラはデフォルトでモジュールファイルのコンパイルを行えないものがある。frc の場合は `"-Am"` をつけることでモジュールのコンパイルを行うことができるようになるので、必ずオプションをつけること。

注意事項 1

本ライブラリでは書式なしダイレクトアクセス形式ファイルの入出力をサポートしている。この形式のファイルの入出力の際、エンディアン (データをメモリ上に格納するときの方法) に注意しなければならない。このエンディアンは計算機依存なので、読み込もうとしているあるいは、書き込もうとしているファイルがどのようなエンディアンを仮定しているのかに十分注意しなければならない。各コンパイラでは、エンディアンに対するオプションが用意されており、`"-convert big_endian"`、`"-fconvert=big-endian"`、`"-fendian=big"` はともに、エンディアンに関する設定である。frc のように、コンパイル時ではなく実行時にエンディアンオプションを指定するものも存在する。

注意事項 2

本ライブラリは OpenMP 並列に対応しているが、ソースをビルドする際に、陽に

オプションを指定しなければこの機能を使用することはできない。各コンパイラのコンパイルオプションで `"-openmp"`, `"-fopenmp"`, `"-KOMP"` は OpenMP を有効にするオプションである。

注意事項 3

`gfortran` におけるプリミティブな指定. `gfortran` には他のコンパイラが自動で設定、あるいは陰に仮定している事項が設定されていない場合がある。以下は著者が遭遇したコンパイル時のエラーに対する対処法である。

- 1 行の文字数制限によるエラーが出た際には, `"-ffree-line-length-none"` を追加する.
- 定義されている型で扱える範囲を超えた値が入っているとされる場合は, `"-fno-range-check"` を追加する.
- `basis` モジュール使用時, `time` 変数が参照されていない旨のエラーが出た場合は, `src/basis.f90` の `rand_make` ルーチンにおいて, `time` 変数についての属性を `external` から `intrinsic` に変更して, ライブラリをビルドしなおす.

注意事項 4

OpenMP 使用時に Segmentation fault する場合, OpenMP 不使用の場合で同様のエラーが出るかをチェックする。同様のエラーが出れば, プログラムの単なる実行時エラーである可能性が高い。しかし, 不使用時に正常終了する場合, OpenMP の各プライベートスレッドに用意されたメモスタック容量が不足していることによるエラーの可能性が高い。この場合, OpenMP が用意している環境変数 `OMP_STACKSIZE` にメモスタックの容量を陽に指定してみる (詳しくは [2.2](#) 参照)。

注意事項 5

大規模データを解析する場合, サブルーチンで `stack` に確保されるメモリ容量が不足していることで Segmentation Fault が発生する可能性がある。その場合は, スタックに確保されるメモリ領域をヒープ領域に確保することで回避できるかもしれない。`ifort` の場合, コンパイルオプションとして `"-heap-arrays 数値"` の様に指定すれば, ヒープ領域にメモリ領域を作成することができる。

2.1.2 アンインストール

アンインストールは、インストール先のライブラリおよび、モジュールファイルを手動で削除すればよい。また、展開ディレクトリ内の `config.log` 等の中間生成ファイルは `make distclean` を実行することで削除可能である。

2.2 使い方

ここでは、適切に本ライブラリのモジュールを組み込み、適切にサブルーチンを用いたソースファイルがあるとして、そのソースをコンパイルすることを考える。このとき、プログラムのコンパイルには、以下の形式を自身の環境に合わせて適宜書き換えれば OK である。

```
コンパイラ名 -I(includedir のパス) ソースファイル名 -L(prefix/lib のパス)
-lstpk
```

上を実行すると、`a.out` という実行形式のプログラムが作成されるはずである。ただし、コンパイル時のその他オプションはインストール時に `FCFLAGS` に設定したオプションをそのまま使用した方が無難である。

2.2.1 OpenMP に関する諸注意

本ライブラリはスレッド並列を行うことが可能な OpenMP という機能を実装している。この機能を有効にするためには、コンパイルオプションで指定しなければならない (これについては、[2.1](#) 参照)。OpenMP にはいくつか環境変数が用意されており、各自計算実行環境にあった値を設定しておく必要がある。以下は代表的な環境変数の設定方法である^{*1}。

—— スレッド並列の数を指定する ——

```
$ export OMP_NUM_THREADS=NUM
NUM には、並列するスレッドの数を整数値で指定する。
```

—— スレッドが使用するプライベートスタック容量の指定 ——

```
$ export OMP_STACKSIZE=INT
INT には、プライベートスタック容量を単位 KB で整数値で指定する。例えば、INT が 512000 だった場合、512 MB がスタック容量として指定されたことになる。
```

2.3 本ライブラリの使用にあたって

本ライブラリは自由に使用、ソースコードの改変を行って頂いて構いません。また、本ライブラリを使用したことによって発生した損害等は開発者は一切責任を負いません。な

^{*1}OpenMP で提供されている環境変数については、例えば、[参照](#)。

お, 本ライブラリを用いた著作物を作成する際は「本研究の解析には数値解析ライブラリ STPK (Version.??; <http://www.gfd-dennou.org/library/davis/stpk>) を用いた」と表記して頂ければ幸いです. また, 引用文献として記述する場合は, 「辻野智紀. 2012. Fortran 90 数値解析ライブラリ (STPK) マニュアル」と記述して頂ければ幸いです.

第3章 サブルーチン一覧

3.1 algebra

幾何演算を主に担当するルーチン集。

3.1.1 abst_2d

機能

2次元ベクトルの絶対値を計算するルーチン。

書式

```
call abst_2d( x, y, dis )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	x 方向のベクトル成分.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	y 方向のベクトル成分.
dis	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	inout	各点での絶対値.

定義式

デカルト座標系で定義された 2次元ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ の絶対値を計算する.

備考

特になし.

3.1.2 abst_3d

機能

3次元ベクトルの絶対値を計算するルーチン.

書式

```
call abst_3d( x, y, z, dis )
```

引数

x	<R,DP(:, :, :)>	in	x 方向のベクトル成分.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	y 方向のベクトル成分.
z	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	z 方向のベクトル成分.
dis	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	inout	各点での絶対値.

定義式

デカルト座標系で定義された 3 次元ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の絶対値を計算する.

備考

特になし.

3.1.3 dot_prod_2d

機能

2 次元デカルト座標系の各格子点で定義される 2 次元ベクトルの内積を計算するルーチン.

書式

```
call dot_prod_2d( x, y, u, v, dot, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	x 方向の 1 ベクトル成分.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	y 方向の 1 ベクトル成分.
u	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	x 方向の 2 ベクトル成分.
v	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	y 方向の 2 ベクトル成分.
dot	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	inout	各点での内積値.
undef	<R,DP>	in	未定義値.

定義式

2 種類の 2 次元ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} がデカルト座標系では,

$$\mathbf{a} = (x, y), \quad \mathbf{b} = (u, v)$$

と定義されたとき, これらの内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = xu + yv$$

となる. これらの変数とルーチンの引数の対応関係は以下のとおりである.

$$(x, y) \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, \quad (u, v) \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rightarrow \text{dot}.$$

ベクトルの成分が 1 つでも未定義である場合, その点での内積値は未定義となる.

備考

特になし.

3.1.4 dot_prod_3d

機能

デカルト座標系の各格子点で定義される 3 次元ベクトルの内積を計算するルーチン.

書式

```
call dot_prod_3d( x, y, z, u, v, w, dot, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:, :, :)>	in	x 方向の 1 ベクトル成分.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	y 方向の 1 ベクトル成分.
z	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	z 方向の 1 ベクトル成分.
u	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	x 方向の 2 ベクトル成分.
v	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	y 方向の 2 ベクトル成分.
w	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	z 方向の 2 ベクトル成分.
dot	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	inout	各点での内積値.
undef	<R,DP>	in	未定義値.

定義式

2 種類の 3 次元ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} がデカルト座標系では,

$$\mathbf{a} = (x, y, z), \quad \mathbf{b} = (u, v, w)$$

と定義されたとき, これらの内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = xu + yv + zw$$

となる. これらの変数とルーチンの引数の対応関係は以下のとおりである.

$$(x, y, z) \rightarrow x, y, z, \quad (u, v, w) \rightarrow u, v, w,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rightarrow \text{dot}.$$

ベクトルの成分が 1 つでも未定義である場合, その点での内積値は未定義となる.

備考

特になし.

3.1.5 rectangle_int

機能

1次元データを元に台形積分を行う。

書式

```
result = rectangle_int( x, y, bot, top, res [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	積分変数座標.
y	<R,DP,CP,CPD(size(x))>	in	被積分関数.
bot	<R,DP>	in	積分の下端.
top	<R,DP>	in	積分の上端.
戻り値	<R,DP,CP,CPD>	inout	積分値.
undef	<R,DP>	in	未定義値.

定義式

任意の変数 x とその変数についての関数 $f(x)$ の積分：

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

を台形積分：

$$\sum_{k=2}^N \frac{1}{2} (x_k - x_{k-1}) (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

で計算する. ここで, N は $\frac{x_2 - x_1}{dx}$ である.

備考

- undef が設定されている場合は, その値をもつ点の両側の短冊領域は計算しない.
- bot, top の値は x で与えられる格子点上になければ, 不足分を短冊分割して足し合わせる.
- 必ず, bot < top でなければならない.

3.1.6 vec_prod_2d

機能

2次元デカルト座標系の各格子点で定義される2次元ベクトルの外積を計算するルーチン.

書式

```
call vec_prod_2d( x, y, u, v, vecx, [undeff] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	x 方向の 1 ベクトル成分.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	y 方向の 1 ベクトル成分.
u	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	x 方向の 2 ベクトル成分.
v	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	y 方向の 2 ベクトル成分.
vec	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	inout	各点での外積値.
undeff	<R,DP>	in	未定義値.

定義式

2 種類の 2 次元ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} がデカルト座標系では,

$$\mathbf{a} = (x, y), \mathbf{b} = (u, v)$$

と定義されたとき, これらの外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = xv - yu$$

となる. これらの変数とルーチンの引数の対応関係は以下のとおりである.

$$(x, y) \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, (u, v) \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{vec}.$$

ベクトルの成分が 1 つでも未定義である場合, その点での外積値は未定義となる.

2 次元平面で外積を計算する場合, その平面に直交する方向の大きさ成分のみが計算されることに注意する (intent(inout) が 1 種類しかないのはこのため).

備考

特になし.

3.1.7 vec_prod_3d

機能

デカルト座標系の各格子点で定義される 3 次元ベクトルの外積を計算するルーチン.

書式

```
call vec_prod_3d( x, y, z, u, v, w, vecx, vecy, vecz, [undeff] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:, :, :)></code>	<code>in</code>	x 方向の 1 ベクトル成分.
<code>y</code>	<code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code>	<code>in</code>	y 方向の 1 ベクトル成分.
<code>z</code>	<code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code>	<code>in</code>	z 方向の 1 ベクトル成分.
<code>u</code>	<code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code>	<code>in</code>	x 方向の 2 ベクトル成分.
<code>v</code>	<code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code>	<code>in</code>	y 方向の 2 ベクトル成分.
<code>w</code>	<code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code>	<code>in</code>	z 方向の 2 ベクトル成分.
<code>vecx</code>	<code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code>	<code>inout</code>	各点での x 方向の外積値.
<code>vecy</code>	<code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code>	<code>inout</code>	各点での y 方向の外積値.
<code>vecz</code>	<code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code>	<code>inout</code>	各点での z 方向の外積値.
<code>undeff</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	未定義値.

定義式

2 種類の 3 次元ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} がデカルト座標系では,

$$\mathbf{a} = (x, y, z), \quad \mathbf{b} = (u, v, w)$$

と定義されたとき, これらの外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (yw - zv, zu - xw, xv - yu)$$

となる. これらの変数とルーチンの引数の対応関係は以下のとおりである.

$$(x, y, z) \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \quad (u, v, w) \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow (\text{vecx}, \text{vecy}, \text{vecz}).$$

ベクトルの成分が 1 つでも未定義である場合, その点での外積値は未定義となる.

備考

特になし.

3.2 basis

本ライブラリを使用する上で必要となるルーチンのうち, どのモジュールにも当てはまらなかった基本的な数学処理関数集である.

本モジュールには予約変数があり, 現在は以下の表のように与えられている.

```
type dttime ! 開始日の日付
integer :: year_d ! 西暦
integer :: month_d ! 月
integer :: day_d ! 日
integer :: hour_d ! 時
integer :: min_d ! 分
integer :: sec_d ! 秒
end type dttime
```

3.2.1 c2i_convert

機能

文字型を整数型に変換する。

書式

```
result = c2i_convert( cval )
```

引数

cval	<C(100)>	in	変換する文字.
戻り値	<I>	inout	変換された整数.

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.2 c2r_convert

機能

文字型を実数型に変換する。

書式

```
result = c2r_convert( cval )
```

引数

cval	<C(100)>	in	変換する文字.
戻り値	<R>	inout	変換された実数.

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.3 i2c_convert

機能

整数型を文字型に変換する。

書式

```
result = i2c_convert( ival, [forma] )
```

引数

ival	<I>	in	変換する整数.
forma	<C(*)>	in	変換時の形式.
戻り値	<C>	inout	変換された文字.

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.4 r2c_convert

機能

実数型を文字型に変換する。

書式

```
result = r2c_convert( rval, [forma] )
```

引数

rval	<R>	in	変換する実数.
forma	<C(*)>	in	変換時の形式.
戻り値	<C>	inout	変換された文字.

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.5 gsub

機能

文字型の中に含まれる特定文字列を置換する。

書式

```
call gsub( cval, oval, bc, ac, [mode] )
```

引数

cval	<C(*)>	in	対象となる文字列.
oval	<C(*)>	inout	置換した結果の文字列.
bc	<C(*)>	in	置換する参照文字列.
ac	<C(*)>	in	置換した参照文字列.
mode	<I>	in	置換方法 (後述).

定義式

なし.

備考

- オプション引数 mode は一度文字を頭からチェックし、最後まで置換した後の文字列を再度チェックするかどうかのオプション。デフォルトは mode=1 で一度置き換えたら再度チェックはしない。mode=2 のときには再度チェックして、まだ対象文字列の中に bc で指定される文字列が含まれているなら、それらが全て ac で置き換えられるまで処理を繰り返す。これは、例えば bc='11', ac='1' が指定されたとき、cval の中に '1111' という文字列が含まれている状況で発生する。mode=1 の場合は oval='11' となって返されるが、mode=2 の場合は oval='1' となって返される。bc に空白 2 文字を指定し、ac に空白 1 文字を指定して、mode=2 で実行すれば、cval に含まれている余分な空白を全て除去し、1 文字の空白にして返すことが可能である。

3.2.6 rand_make

機能

混合合同法を用いて擬似乱数を生成する。

書式

```
call rand_make( seed, L, output )
```

引数

seed	<I>	in	生成する乱数の種.
L	<I>	in	出力する最大桁数 +1 の数値.
output	<I>	inout	出力される乱数.

定義式

混合合同法は、数列 x_n について、整数 a, b を用いて、

$$x_n = \text{mod}(ax_{n-1} + b, L)$$

という漸化式で表現される数列によって擬似乱数を生成するアルゴリズムである。ここで、 L は整数である。 a, b, L, x_0 については任意性が与えられているので、本ルーチンでは、

$$a = 11, b = 12$$

という値を採用した。また、 L は使用者が必要とする任意の桁数 +1 の数値で求められ、 x_0 は引数 `seed` で与えられる。

備考

なし.

3.2.7 counter_day

機能

開始日から終了日までの日数をカウントする。

書式

```
result = counter_day( stime, etime )
```

引数

stime	<type(datetime)>	in	カウント開始の年月日.
etime	<type(datetime)>	in	カウント終了の年月日.
戻り値	<I>	inout	カウントされた日数.

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.8 counter_sec

機能

開始日から終了日までの秒数をカウントする。

書式

```
result = counter_sec( stime, etime )
```

引数

stime	<type(datetime)>	in	カウント開始の年月日時分秒.
etime	<type(datetime)>	in	カウント終了の年月日時分秒.
戻り値	<I>	inout	カウントされた秒数.

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.9 time_zone_convert

機能

時間について、任意の時間足し引きしたときの日時を返す。タイムゾーン変換等に用いる。

書式

```
call time_zone_convert( factor, itime, ctime )
```

引数

factor	<I>	in	変換を行う時間 [hour].
itime	<type(datetime)>	in	変換前の年月日.
ctime	<type(datetime)>	inout	変換後の年月日.

定義式

なし.

備考

- 例えば, JST から UTC に変換する場合, factor=-9 として, itime に JST の時刻を入力すると, ctime に UTC の時刻が返される.

3.2.10 sec_convert

機能

任意の秒数の加減算を行ったときの日時を返す。

書式

```
call sec_convert( factor, itime, ctime )
```

引数

factor	<I>	in	加減算を行う秒数.
itime	<type(dtime)>	in	変換前の年月日.
ctime	<type(dtime)>	inout	変換後の年月日.

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.11 check_array_size_1d

機能

配列のサイズをチェックする。

書式

```
result = check_array_size_1d( n, a )
```

引数

n	<I>	in	1次元配列 a の要素数.
a	<I*,R,DP(:)>	in	任意の 1次元配列.
戻り値	<I>	inout	チェック結果 (後述).

定義式

任意の 1次元配列 a の要素数が引数 n の値と一致しているかどうかをチェックする.
等しければ 0, 異なっていれば 1 を返す.

備考

なし.

3.2.12 check_array_size_2d

機能

配列のサイズをチェックする。

書式

```
result = check_array_size_2d( n1, n2, a )
```

引数

n1	<I>	in	2次元配列 a の第一要素数.
n2	<I>	in	2次元配列 a の第二要素数.
a	<I*,R,DP(:, :)>	in	任意の 2次元配列.
戻り値	<I>	inout	チェック結果 (後述).

定義式

任意の 2次元配列 a の要素数が引数 n1, n2 の値と一致しているかどうかをチェックする. チェック結果は以下のとおり:

戻り値 0 : n1, n2 とも, 要素数が一致.

戻り値 1 : n1 のみ, 要素数が一致.

戻り値 2 : n2 のみ, 要素数が一致.

戻り値 3 : n1, n2 とも, 要素数が不一致.

備考

なし.

3.2.13 check_array_size_3d

機能

配列のサイズをチェックする。

書式

```
result = check_array_size_3d( n1, n2, n3, a )
```

引数

n1	<I>	in	3次元配列 a の第一要素数.
n2	<I>	in	3次元配列 a の第二要素数.
n3	<I>	in	3次元配列 a の第三要素数.
a	<I*,R,DP(:, :, :)>	in	任意の 3次元配列.
戻り値	<I>	inout	チェック結果 (後述).

定義式

任意の 3 次元配列 `a` の要素数が引数 `n1`, `n2`, `n3` の値と一致しているかどうかをチェックする。チェック結果は以下のとおり:

戻り値 0 : 全要素で要素数が一致.

戻り値 1 : `n1` のみ, 要素数が不一致.

戻り値 2 : `n2` のみ, 要素数が不一致.

戻り値 3 : `n1`, `n2` のみ, 要素数が不一致.

戻り値 4 : `n3` のみ, 要素数が不一致.

戻り値 5 : `n1`, `n3` のみ, 要素数が不一致.

戻り値 6 : `n2`, `n3` のみ, 要素数が不一致.

戻り値 7 : 全要素で要素数が不一致.

備考

なし.

3.2.14 check_leap_year**機能**

閏年かどうかをチェックする。

書式

```
result = check_leap_year( year )
```

引数

<code>year</code>	<I>	<code>in</code>	チェックする西暦.
戻り値	<L>	<code>inout</code>	閏年なら <code>.true..</code>

定義式

条件 1 西暦が 4 の倍数のとき, かつ 100 の倍数ではない.

条件 2 西暦が 400 の倍数のとき.

例外条件 西暦が 100 の倍数かつ, 400 の倍数ではないとき, 閏年ではない.

備考

なし.

3.2.15 count_cmax

機能

文字型配列の最大文字数を返す。

書式

```
call count_cmax( cval )
```

引数

cval <C(:)(*)> in 対象となる文字列.

定義式

なし.

備考

- 特になし.

3.3 derivation

微分演算を有限差分で計算するルーチン集。本モジュールに組み込まれているルーチンでは、すべての微分計算において、2次精度の中心差分近似を用いて微分を評価する。なお、評価点の不足する計算領域の端においては、1次精度に差分の近似を落とすことで処理をする。

なお、すべてのルーチンで用いられているスケール因子の主な座標系での値と、任意の座標系におけるスケール因子の導出方法については、??参照。

3.3.1 curl

機能

2次元ベクトルから渦度を計算する。

書式

```
call curl( x, y, u, v, val, [undef], [hx], [hy], [ord] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
u	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x に対応するベクトル.
v	<R,DP(size(x),size(y))>	in	y に対応するベクトル.
val	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	渦度.
undef	R,DP	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y))>	in	y 方向のスケール因子.
ord	L	in	微分計算の順番を入れ替える (備考参照).

定義式

互いに直交する基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) をもつ曲線座標 (x_1, x_2, x_3) における, 独立した 2 ベクトルの回転 curl を計算する:

$$\text{curl} \equiv \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x_2} \right]$$

ここで、 $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ であり、 h_1, h_2, h_3 はそれぞれ x_1, x_2, x_3 に対応するスケール因子である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad u_1 : u, \quad u_2 : v,$$

$$h_1 : hx, \quad h_2 : hy, \quad \text{curl} : \text{val}$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ であるので、単純に

$$\text{curl} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

を計算することになる。

備考

- オプション ord は微分計算の後、正負を反転させるオプションであり、

.true. : 通常計算, .false. : 正負反転

となる。デフォルトは.true.。つまり、false を指定すれば、以下の計算を行うことと同義である。

$$\text{curl} \equiv -\mathbf{e}_3 \cdot \nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x_2} \right].$$

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.2 curl_3d

機能

3次元ベクトルから3次元渦度を計算する。

書式

```
call curl_3d( x, y, z, u, v, w, zeta, eta, xi, [undef], [hx], [hy], [hz]
)
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
z	<R,DP(:)>	in	右手系第三座標.
u	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	xに対応するベクトル.
v	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	yに対応するベクトル.
w	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	zに対応するベクトル.
zeta	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	xに対応する回転.
eta	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	yに対応する回転.
xi	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	zに対応する回転.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	x方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	y方向のスケール因子.
hz	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	z方向のスケール因子.

定義式

互いに直交する基底ベクトル (e_1, e_2, e_3) をもつ曲線座標 (x_1, x_2, x_3) における, 独立した3ベクトルの渦度 rot を計算する:

$$\begin{aligned} \text{div} \equiv \nabla \times \mathbf{u} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\mathbf{e}_1 \left\{ \frac{\partial(h_3 u_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x_3} \right\} \right. \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \left\{ \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 u_3)}{\partial x_1} \right\} \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_3 \left\{ \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x_2} \right\} \right] = \zeta \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + \xi \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ であり、 h_1, h_2, h_3 はそれぞれ x_1, x_2, x_3 に対応するスケール因子である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$\begin{aligned} x_1 &: \mathbf{x}, & x_2 &: \mathbf{y}, & x_3 &: \mathbf{z}, \\ u_1 &: \mathbf{u}, & u_2 &: \mathbf{v}, & u_3 &: \mathbf{w}, \\ h_1 &: \mathbf{hx}, & h_2 &: \mathbf{hy}, & h_3 &: \mathbf{hz} \\ \zeta &: \mathbf{zeta}, & \eta &: \mathbf{eta}, & \xi &: \mathbf{xi}. \end{aligned}$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ であるので、単純に

$$\text{div} = \mathbf{e}_1 \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right\} + \mathbf{e}_2 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right\} + \mathbf{e}_3 \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.3 div

機能

2次元ベクトルから発散を計算する。

書式

```
call div( x, y, u, v, val, [undef], [hx], [hy] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
u	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x に対応するベクトル.
v	<R,DP(size(x),size(y))>	in	y に対応するベクトル.
val	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	発散.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y))>	in	y 方向のスケール因子.

定義式

互いに直交する基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) をもつ曲線座標 (x_1, x_2) における、独立した 2 ベクトルの発散 div を計算する：

$$\text{div} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 u_2)}{\partial x_2} \right]$$

ここで、 $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ であり、 h_1, h_2 はそれぞれ x_1, x_2 に対応するスケール因子である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad u_1 : u, \quad u_2 : v,$$

$$h_1 : hx, \quad h_2 : hy, \quad \text{div} : \text{val}.$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1$ であるので、単純に

$$\text{div} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.4 div_3d

機能

3次元ベクトルから発散を計算する。

書式

```
call div_3d( x, y, z, u, v, w, val, [undef], [hx], [hy], [hz] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
z	<R,DP(:)>	in	右手系第三座標.
u	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	x に対応するベクトル.
v	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	y に対応するベクトル.
w	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	z に対応するベクトル.
val	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	発散.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	y 方向のスケール因子.
hz	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	z 方向のスケール因子.

定義式

互いに直交する基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) をもつ曲線座標 (x_1, x_2, x_3) における、独立した 3 ベクトルの発散 div を計算する：

$$\text{div} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 u_3)}{\partial x_3} \right]$$

ここで、 $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ であり、 h_1, h_2, h_3 はそれぞれ x_1, x_2, x_3 に対応するスケール因子である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad x_3 : z,$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &: \mathbf{u}, & u_2 &: \mathbf{v}, & u_3 &: \mathbf{w}, \\
 h_1 &: \mathbf{hx}, & h_2 &: \mathbf{hy}, & h_3 &: \mathbf{hz} \\
 \text{div} &: \mathbf{val}.
 \end{aligned}$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ であるので、単純に

$$\text{div} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.5 grad_1d

機能

2 次の中心差分近似を用いて、任意変数の勾配を計算する。

書式

```
call grad_1d( x, u, val, [undef], [hx] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	空間座標.
u	<R,DP(size(x))>	in	x の各点で定義される変数.
val	<R,DP(size(x))>	inout	勾配値.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x))>	in	x 方向のスケール因子.

定義式

座標 (x_1) における変数 ϕ の勾配は

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

で定義される。ここで、 h_1 は x_1 座標のスケール因子であり、デカルト座標の場合、 $h_1 = 1$ である。この勾配を離散変数 ϕ_i 、離散化された位置座標 x_i に対して、2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると、離散点 x_i における勾配 G_i は

$$G_i = \frac{1}{h_i} \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2dx_i}$$

で計算される. ここで, h_i は x_i におけるスケール因子,

$$dx_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

である. このとき, 引数は以下の対応をする:

$$x_i : \mathbf{x}, \quad \phi_i : \mathbf{u}, \quad h_i : \mathbf{hx}, \quad G_i : \mathbf{val}.$$

ただし, この近似では領域の端において参照点がなくなるので, 端領域では 1 次精度の差分近似で計算される.

備考

- 未定義値が定義されている場合は, その値に対応する値が格子点に入っている場合, その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される.

3.3.6 grad_2d

機能

2 次の中心差分近似を用いて, 任意変数の独立 2 次元勾配ベクトルを計算する.

書式

```
call grad_2d( x, y, u, valx, valy, [undef], [hx], [hy] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	第一空間座標.
y	<R,DP(:)>	in	第二空間座標.
u	<R,DP(size(x),size(y))>	in	勾配を計算する変数.
valx	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	x 方向の勾配ベクトル.
valy	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	y 方向の勾配ベクトル.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y))>	in	y 方向のスケール因子.

定義式

基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) で定義される座標 (x_1, x_2) における変数 u を計算する:

$$\mathbf{grad} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

このとき, 引数は以下の対応をする。

$$x_1 : \mathbf{x}, \quad x_2 : \mathbf{y}, \quad u : \mathbf{u}, \quad h_1 : \mathbf{hx}, \quad h_2 : \mathbf{hy},$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} : \text{valx}, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} : \text{valy}.$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1$ であるので、単純に

$$\text{grad} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.7 grad_3d

機能

2 次の中心差分近似を用いて、任意変数の独立 3 次元勾配ベクトルを計算する。

書式

```
call grad_3d( x, y, z, u, valx, valy, valz, [undef], [hx], [hy], [hz]
)
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	第一空間座標.
y	<R,DP(:)>	in	第二空間座標.
z	<R,DP(:)>	in	第三空間座標.
u	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	勾配を計算する変数.
valx	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	x 方向の勾配ベクトル.
valy	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	y 方向の勾配ベクトル.
valz	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	z 方向の勾配ベクトル.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	y 方向のスケール因子.
hz	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	z 方向のスケール因子.

定義式

基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) で定義される座標 (x_1, x_2, x_3) における変数 u を計算する :

$$\text{grad} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad x_3 : z, \quad u : u, \quad h_1 : hx, \quad h_2 : hy, \quad h_3 : hz$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} : \text{valx}, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} : \text{valy}, \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} : \text{valz}$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1$ であるので、単純に

$$\text{grad} = e_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.8 grad4_1d

機能

4 次の中心差分近似を用いて任意変数の勾配を計算する。

書式

```
call grad4_1d( x, u, val, [undef], [hx] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	空間座標.
u	<R,DP(size(x))>	in	x の各点で定義される変数.
val	<R,DP(size(x))>	inout	勾配値.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x))>	in	x 方向のスケール因子.

定義式

座標 (x_1) における変数 ϕ の勾配は

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

で定義される。ここで、 h_1 は x_1 座標のスケール因子であり、デカルト座標の場合、 $h_1 = 1$ である。この勾配を離散変数 ϕ_i 、離散化された位置座標 x_i に対して、2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると、離散点 x_i における勾配 G_i は

$$G_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{2}{3} \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{dx_i} - \frac{\phi_{i+2} - \phi_{i-2}}{12dx_i} \right]$$

で計算される. ここで, h_i は x_i におけるスケール因子,

$$dx_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

である. このとき, 引数は以下の対応をする:

$$x_i : \mathbf{x}, \quad \phi_i : \mathbf{u}, \quad h_i : \mathbf{hx}, \quad G_i : \mathbf{val}.$$

ただし, この近似では領域の端において参照点がないので, 端領域では 1, 2 次精度の差分近似で計算される.

備考

- 未定義値が定義されている場合は, その値に対応する値が格子点に入っている場合, その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される.

3.3.9 grad4_2d

機能

4 次の中心差分近似を用いて, 任意変数の独立 2 次元勾配ベクトルを計算する.

書式

```
call grad4_2d( x, y, u, valx, valy, [undef], [hx], [hy] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	第一空間座標.
y	<R,DP(:)>	in	第二空間座標.
u	<R,DP(size(x),size(y))>	in	勾配を計算する変数.
valx	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	x 方向の勾配ベクトル.
valy	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	y 方向の勾配ベクトル.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y))>	in	y 方向のスケール因子.

定義式

基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) で定義される座標 (x_1, x_2) における変数 u を計算する:

$$\mathbf{grad} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

このとき, 引数は以下の対応をする。

$$x_1 : \mathbf{x}, \quad x_2 : \mathbf{y}, \quad u : \mathbf{u}, \quad h_1 : \mathbf{hx}, \quad h_2 : \mathbf{hy},$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} : \text{valx}, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} : \text{valy}.$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1$ であるので、単純に

$$\text{grad} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.10 grad4_3d

機能

4 次の中心差分近似を用いて、任意変数の独立 3 次元勾配ベクトルを計算する。

書式

```
call grad4_3d( x, y, z, u, valx, valy, valz, [undef], [hx], [hy], [hz]
)
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	第一空間座標.
y	<R,DP(:)>	in	第二空間座標.
z	<R,DP(:)>	in	第三空間座標.
u	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	勾配を計算する変数.
valx	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	x 方向の勾配ベクトル.
valy	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	y 方向の勾配ベクトル.
valz	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	z 方向の勾配ベクトル.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	y 方向のスケール因子.
hz	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	z 方向のスケール因子.

定義式

基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) で定義される座標 (x_1, x_2, x_3) における変数 u を計算する :

$$\text{grad} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad x_3 : z, \quad u : u, \quad h_1 : hx, \quad h_2 : hy, \quad h_3 : hz$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} : \text{valx}, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} : \text{valy}, \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} : \text{valz}$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1$ であるので、単純に

$$\text{grad} = e_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.11 laplacian_1d

機能

2 次の中心差分近似を用いて、任意変数の 1 次元座標ラプラシアンを計算する。

書式

```
call laplacian_1d( x, u, val, [undef], [hx] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	空間座標.
u	<R,DP(size(x))>	in	x の各点で定義される変数.
val	<R,DP(size(x))>	inout	2 階勾配値.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x))>	in	x 方向のスケール因子.

定義式

座標 (x_1) における変数 u の 2 階微分を計算する：

$$\text{laplacian} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{h_1} \right)^2.$$

ここで、 h_1 はスケール因子である。この勾配を離散変数 u_i 、離散化された位置座標 x_i に対して、2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると、離散点 x_i におけるラプラシアン G_i は

$$G_i = \frac{1}{h_i^2} \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{dx_i^2} + Geo.$$

で計算される。ここで、 $Geo.$ はスケール因子の空間微分に関連する項であり、常に 1 階微分で構成されている。この項も同様に 2 次精度の中心差分近似を用いる。このとき、引数は以下の対応をする：

$$x_i : \mathbf{x}, \quad u_i : \mathbf{u}, \quad G_i : \mathbf{val}, \quad h_1 : \mathbf{hx}.$$

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.12 laplacian_2d

機能

2 次の中心差分近似を用いて、任意変数の 2 次元座標ラプラシアンを計算する。

書式

```
call laplacian_2d( x, y, u, val, [undef], [hx], [hy] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	空間座標第一成分.
y	<R,DP(:)>	in	空間座標第二成分.
u	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x, y の各点で定義される変数.
val	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	2 階勾配値.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y))>	in	y 方向のスケール因子.

定義式

座標 (x_1, x_2) における変数 u の 2 階微分を計算する：

$$\begin{aligned} \text{laplacian} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\ &\quad + \frac{1}{2h_2^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{1}{2h_1^2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \end{aligned}$$

ここで、 h_1, h_2 はスケール因子である。この勾配を離散変数 $u_{i,j}$ 、離散化された位置座標 x_i, x_j に対して、2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると、離散点 x_i, x_j に

おけるラプラシアン $G_{i,j}$ は

$$G_{i,j} = \frac{1}{h_1^2} \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{dx_i^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{dx_j^2} + Geo.$$

で計算される。ここで、 $Geo.$ はスケール因子の空間微分に関連する項であり、常に 1 階微分で構成されている。この項も同様に 2 次精度の中心差分近似を用いる。このとき、引数は以下の対応をする：

$$x_i : x, \quad x_j : y, \quad u_{i,j} : u, \quad G_{i,j} : val, \quad h_1 : hx, \quad h_2 : hy.$$

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.13 laplacian_3d

機能

2 次の中心差分近似を用いて、任意変数の 3 次元座標ラプラシアンを計算する。

書式

```
call laplacian_3d( x, y, z, u, val, [undef], [hx], [hy], [hz] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	空間座標第一成分.
y	<R,DP(:)>	in	空間座標第二成分.
z	<R,DP(:)>	in	空間座標第三成分.
u	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	x, y, z の各点で定義される変数.
val	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	2 階勾配値.
undef	<R,DP>	in	未定義値.
hx	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	y 方向のスケール因子.
hz	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	z 方向のスケール因子.

定義式

座標 (x_1, x_2, x_3) における変数 u の 2 階微分を計算する：

$$\begin{aligned} \text{laplacian} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \\ &\quad + \frac{1}{2h_2^2 h_3^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right)^2 + \frac{1}{2h_3^2 h_1^2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)^2 + \frac{1}{2h_1^2 h_2^2} \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \right)^2 \end{aligned}$$

ここで、 h_1 はスケール因子である。この勾配を離散変数 $u_{i,j,k}$ 、離散化された位置座標 x_i, x_j, x_k に対して、2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると、離散点 x_i, x_j, x_k におけるラプラシアン $G_{i,j,k}$ は

$$G_{i,j,k} = \frac{u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k}}{dx_i^2} + \frac{u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k}}{dx_j^2} + \frac{u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k}}{dx_k^2} + Geo.$$

で計算される。ここで、 $Geo.$ はスケール因子の空間微分に関連する項であり、常に 1 階微分で構成されている。この項も同様に 2 次精度の中心差分近似を用いる。このとき、引数は以下の対応をする：

x_i : x, x_j : y, x_k : z, $u_{i,j,k}$: u, $G_{i,j,k}$: val, h_1 : hx, h_2 : hy, h_3 : hz.

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.14 z_2_zeta

機能

デカルト座標系鉛直高度座標に対応する terrain following 座標系（以下、terrain 系）鉛直高度座標を求める。物理的な位置は変化しない。

書式

```
result=z_2_zeta( z, zf, zt )
```

引数

z	<R>	in	地表面高度 [m].
zf	<R>	in	地表面高度 [m].
zt	<R>	in	最上端高度 [m].
戻り値	<R>	inout	terrain 系高度 [m].

定義式

terrain 系鉛直座標 ζ はデカルト系鉛直座標 z を用いて

$$\zeta(x, y, z) \equiv \frac{z_{top} [z - z_{sf}(x, y)]}{z_{top} - z_{sf}(x, y)}$$

で定義されている.

備考

特になし.

3.3.15 zast_2_w_2d

機能

terrain following 座標系 (以下, terrain 系) で定義されるある 1 高度層において、デカルト座標系で定義される鉛直風速を terrain following 座標系で定義される鉛直風速に変換する。ただし、ここでは座標点の変換は行わない。あくまで terrain 系の格子点におけるデカルト座標系風速を terrain 系成分に変換するのみである。本ルーチンは terrain 系格子点上に定義されたデカルト座標系風速成分を terrain 系風速成分に変換するルーチンである^{*1}.

書式

```
call zast_2_w_2d( x, y, zeta, zf, zt, u, v, w, wh, [undef] )
```

引数

x	<R(:)>	in	デカルト系第一座標.
y	<R(:)>	in	デカルト系第二座標.
zeta	<R(size(x),size(y))>	in	terrain 系の任意 1 層における鉛直高度 [m].
zf	<R(size(x),size(y))>	in	地表面高度 [m].
zt	<R(size(x),size(y))>	in	最上端高度 [m].
u	<R(size(x),size(y))>	in	zeta に対応する東西風速 [m/s].
v	<R(size(x),size(y))>	in	zeta に対応する南北風速 [m/s].
w	<R(size(x),size(y))>	in	zeta に対応する鉛直風速 [m/s].
wh	<R(size(x),size(y))>	inout	変換後の鉛直風速 [m/s].
undef	R	in	未定義値.

定義式

本ルーチンは水平方向にはデカルト座標系のみを想定している。今後拡張予定。
terrain 系格子点上において、デカルト座標系で定義されている東西、南北、鉛直風

^{*1}定義されている格子座標と定義されているベクトル成分の座標系が異なっていることに注意。

速を (u, v, w) とし、terrain 系における高度座標を ζ とする。このとき、デカルト座標系の鉛直風速成分を terrain 系鉛直風速成分 W に変換するには以下のような変換式を用いる：

$$W = \frac{1}{G^{1/2}} [w + J_{31}u + J_{32}v],$$

$$G^{1/2} \equiv \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 - \frac{z_{sfc}(x, y)}{z_{top}},$$

$$J_{31} \equiv \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x, y)}{\partial x}, \quad J_{32} \equiv \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x, y)}{\partial y}.$$

ここで、terrain 系鉛直座標 ζ は

$$\zeta(x, y, z) \equiv \frac{z_{top} [z - z_{sfc}(x, y)]}{z_{top} - z_{sfc}(x, y, z)}$$

と定義される。ここで、 x, y, z はデカルト座標系、 z_{top}, z_{sfc} はそれぞれデカルト座標の鉛直方向定義域上端、地表面高度を表す。このとき実際のプログラムにおける引数は以下の対応をする：

$$(u, v, w) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$\zeta(x, y) : \text{zeta}(\text{size}(x), \text{size}(y)), \quad (x, y) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$z_{sfc}(x, y) : \text{zf}(\text{size}(x), \text{size}(y)), \quad z_{top} : \text{zt}(\text{size}(x), \text{size}(y))$$

備考

- 定義式の導出は付録??参照。
- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.16 zast_2_w_3d

機能

terrain following 座標系（以下、terrain 系）で定義されるある 1 高度層において、デカルト座標系で定義される鉛直風速を terrain following 座標系で定義される鉛直風速に変換する。ただし、ここでは座標点の変換は行わない。あくまで terrain 系の格子点におけるデカルト座標系風速を terrain 系成分に変換するのみである。本ルーチンは terrain 系格子点上に定義されたデカルト座標系風速成分を terrain 系風速成分に変換するルーチンである^{*2}。

書式

```
call zast_2_w_3d( x, y, zeta, zf, zt, u, v, w, wh, [undef] )
```

^{*2}定義されている格子座標と定義されているベクトル成分の座標系が異なっていることに注意。

引数

x	<R(size(zeta,1))>	in	デカルト系第一座標.
y	<R(size(zeta,2))>	in	デカルト系第二座標.
zeta	<R(:, :, :)>	in	terrain 系の鉛直高度 [m]
zf	<R(size(zeta,1),size(zeta,2))>	in	地表面高度 [m].
zt	<R(size(zeta,1),size(zeta,2))>	in	最上端高度 [m].
u	<R(size(zeta,1),size(zeta,2),size(zeta,3))>	in	zeta に対応する東西風速
v	<R(size(zeta,1),size(zeta,2),size(zeta,3))>	in	zeta に対応する南北風速
w	<R(size(zeta,1),size(zeta,2),size(zeta,3))>	in	zeta に対応する鉛直風速
wh	<R(size(zeta,1),size(zeta,2),size(zeta,3))>	inout	変換後の鉛直風速 [m/s]
undef	R	in	未定義値.

定義式

本ルーチンは水平方向にはデカルト座標系のみを想定している。今後拡張予定。
terrain 系格子点上において、デカルト座標系で定義されている東西、南北、鉛直風速を (u, v, w) とし、terrain 系における高度座標を ζ とする。このとき、デカルト座標系の鉛直風速成分を terrain 系鉛直風速成分 W に変換するには以下のような変換式を用いる：

$$W = \frac{1}{G^{1/2}} [w + J_{31}u + J_{32}v],$$

$$G^{1/2} \equiv \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 - \frac{z_{sfc}(x, y)}{z_{top}},$$

$$J_{31} \equiv \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x, y)}{\partial x}, \quad J_{32} \equiv \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x, y)}{\partial y}.$$

ここで、terrain 系鉛直座標 ζ は

$$\zeta(x, y, z) \equiv \frac{z_{top} [z - z_{sfc}(x, y)]}{z_{top} - z_{sfc}(x, y, z)}$$

と定義される。ここで、 x, y, z はデカルト座標系、 z_{top}, z_{sfc} はそれぞれデカルト座標の鉛直方向定義域上端、地表面高度を表す。このとき実際のプログラムにおける引数は以下の対応をする：

$$(u, v, w) : (u, v, w),$$

$$\zeta(x, y, z) : \text{zeta}(\text{size}(x), \text{size}(y), \text{size}(\text{zeta}, 3)), \quad (x, y) : (x, y)$$

$$z_{sfc}(x, y) : \text{zf}(\text{size}(x), \text{size}(y)), \quad z_{top} : \text{zt}(\text{size}(x), \text{size}(y))$$

備考

- 定義式の導出は付録??参照.
- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される.

3.3.17 local_peak_check_1d

機能

1次元のデータについて、極値が存在するかどうかを判定する。

書式

```
result=local_peak_check_1d( x, cs, u, [ip], [np], [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	空間座標.
cs	<C(1)>	in	極大・極小のフラグ (後述).
u	<R,DP(size(x))>	in	x の各点で定義される変数.
ip	<I(size(x))>	inout	極値の格子点番号 (後述).
np	<I(size(x))>	inout	極値の数 (後述).
undef	<R,DP>	in	未定義値.
戻り値	<L>	out	極値の存在判定 (後述).

定義式

- 座標 $x(:)$ における変数 $u(\text{size}(x))$ について、空間勾配を計算し、その勾配の隣接 2 点での積から空間勾配の符号の反転を判定する。
- 同じく変数 u について、2 階の微分を計算し、 u の分布の凹凸を判定する。
- 隣接する格子点で空間勾配の符号が反転している 2 格子点およびそれらの隣接点の計 4 点について、最大あるいは最小値をとる格子点を極大あるいは極小値として判定する。このとき、極値が存在していれば、関数の戻り値は `.true.`、存在していなければ `.false.` を返す。

備考

- 引数 `cs` は極大あるいは極小のどちらの存在を判定するかのフラグ。 `cs(1:1)=='+'` なら極大値を、 `cs(1:1)=='-'` なら極小値を判定する。
- 引数 `ip` は各極値が存在するときの、 x に対応する格子点番号が格納される。このとき、`ip` の要素数は `size(x)` であるが、実際に値が格納されるのは、判定された極値の数 `np` 分だけ `ip(1:np)` として格納される。

3.4 ellip_slv

楕円型偏微分方程式を計算するモジュール。現在、2, 3 次元デカルト座標系における一般的な楕円型偏微分方程式の反復法による計算ルーチンをサポートしている。

なお、本モジュールで使用されている計算法・離散化については、[5.1](#) 参照。

3.4.1 Ellip_GauSei_2d

機能

ガウスザイデル法（逐次反復法）を用いて、2次元の楕円型非斉次2階線形偏微分方程式を計算する。本ルーチンは内部領域に任意の未定義領域を含む場合でも計算することが可能である。そのような計算を行う場合はオプション引数 `inner_bound` を設定すること。

書式

```
call Ellip_GauSei_2d( x, y, rho, eps, boundary, psi, &
& [bound_opt], [a], [b], [c], [d], [e], [f], &
& [undef], [inner_bound], [init_flag], [ln] )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
<code>y</code>	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
<code>rho</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	非斉次方程式の強制項（後述）.
<code>eps</code>	<R,DP>	in	反復法の収束条件（後述）.
<code>boundary</code>	<C(4)>	in	4辺の境界条件を与える（後述）.
<code>psi</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	ポアソン方程式の解.
<code>bound_opt</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	境界での値（後述）. デフォルト：すべてゼロ.
<code>a</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数1（後述）. デフォルト：すべて1.
<code>b</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数2（後述）. デフォルト：すべてゼロ.
<code>c</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数3（後述）. デフォルト：すべて1.
<code>d</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数4（後述）. デフォルト：すべてゼロ.
<code>e</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数5（後述）. デフォルト：すべてゼロ.
<code>f</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数6（後述）. デフォルト：すべてゼロ.
<code>undef</code>	<R,DP>	in	内部領域の値（後述）. デフォルト：ゼロ.
<code>inner_bound</code>	<I(size(x),size(y))>	in	内部境界判別整数（付録）. デフォルト：すべてゼロ.
<code>init_flag</code>	<L>	in	応答をゼロで初期化するか（後述）.
<code>ln</code>	<I>	in	反復回数（後述）.

定義式

求める未知変数を ψ としたとき、以下の偏微分方程式を計算する。

$$a(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y) \psi(x, y) = \rho(x, y).$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x : x, \quad y : y, \quad \rho : \text{rho}, \quad \psi : \text{psi}.$$

$$a : a, \quad b : b, \quad c : c, \quad d : d, \quad e : e, \quad f : f.$$

なお、具体的な差分式、境界条件の計算式は付録参照。

備考

- 非斉次強制項 ρ および、 f は計算領域すべてについてゼロと設定すると、ラプラス方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 f をゼロと設定すると、純ポアソン方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 ρ をゼロと設定すると、ヘルムホルツ方程式を計算することに相当する。
- 本ルーチンの収束条件は、反復の 1 ステップ前後での絶対誤差の最大値が閾値以下になったときに計算を終了するように設定しており、オプション引数 `eps` はその誤差の値を設定する。
- 本ルーチンでは、4 辺の境界条件を

1 : 固定端境界 (ディリクレ型), 2 : 自由端境界 (ノイマン型), 3 : 周期境界条件

という 3 種類の数字で設定することができる。ここで、別のオプション引数 `bound_opt` を設定しておけば、その値で境界を強制することができる (固定端の場合は、引数の値そのものが用いられ、自由端の場合は、境界を法線方向に流れるフラックスの値として引数の値が使用される。もちろん、周期境界ではこの値は設定しても反映されない)。この引数は 4 文字の文字型であり、それぞれの順番は図 5.1 左のような対応をしている。

- 境界条件は自由に設定できるが、周期境界条件を設定した場合、その境界に隣接する反対側の境界も同一の境界条件の値を設定しておかなければならない。例えば、 x 軸に平行な境界を周期境界とするのであれば、`boundary` の 1, 3 文字目は '3' でなければならない。そのようにされていない場合には、エラーを返す仕様になっている。
- 境界が固定端か自由端の場合、`bound_opt` で設定される値のうち、境界上に存在する配列要素^{*3}の値を参照して、固定端の場合はその値を直接固定端での値

^{*3}つまり、`bound_opt(1,:)`, `bound_opt(size(x),:)`, `bound_opt(:,1)`, `bound_opt(:,size(y))` に設定されている値のこと。

として、自由端の場合は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g$$

という境界条件である場合、 f, g の値に相当する。つまり、このオプションにおいて、実際にルーチンではほとんどの配列が使用されないことになる。

- 境界の隅における境界条件の優先順位は、固定境界 (1), 周期境界 (3), 自由境界 (2) の順番となっている。つまり、`bound(1:2)='12'` と設定されている場合、両方に属する点 $i = 1, j = 1$ は固定境界 (1) で計算される ('2' で設定される自由境界より優先度が高いため)。
- 偏微分方程式の各係数の値を表す a, b, c, d, e, f であるが、この値を省略すると、最高階の微分演算子に係る係数はすべて 1 に設定され、その他はすべてゼロに設定される (すなわち、純ポアソン方程式の計算となる)。これは、最高階の微分演算子までゼロに設定すると、方程式が特異系になり、この方法で処理すべき方程式の形ではなくなるための措置である。
- 偏微分方程式の係数は空間変化している場合でも計算することは可能であり、空間格子点が等間隔座標でない場合でも計算は可能である。
- 引数 `undef` は内部領域に未定義域を含む場合に、未定義域での応答に対して与えられる値。
- 引数 `inner_bound` は境界格子についてゼロでない値、また内部未定義域に対して 10 という値が与えられる。ユーザーはこの引数を設定することで、内部領域に任意の形の閉じた未定義域を与えて計算することができる。具体的にどのような境界でどのような値を与えるかについては、5.1 を参照。
- 引数 `init_flag` は引数 `psi` を最初にゼロに初期化するかどうかのフラグであり、`.true.` のとき、初期化を行う。デフォルトは `.true.` となる。これは、最初に `psi` の分布がある程度応答の場に類似していれば、反復計算する回数が少なくなることから高速化用のフラグである。ただし、応答の場がある程度予測される場合や既に応答の場がわかっている状態から少し遷移した状態の応答を求めるといった限定的な場合にしか、`.false.` は選ばないほうがよい。
- 引数 `ln` は収束判定条件 `eps` の値に関係なく、`ln` 回反復を繰り返したら、強制的に終了し、反復終了時点での応答の分布を返す。

3.4.2 Ellip_Jacobi_2d

機能

ヤコビ法を用いて、2次元の楕円型非斉次2階線形偏微分方程式を計算する。OpenMPによる並列処理が可能。本ルーチンは内部領域に任意の未定義領域を含む場合でも計算することが可能である。そのような計算を行う場合はオプション引数 `inner_bound` を設定すること。

書式

```
call Ellip_Jacobi_2d( x, y, rho, eps, boundary, psi, &
& [bound_opt], [a], [b], [c], [d], [e], [f], &
& [undef], [inner_bound], [init_flag], [ln] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
rho	<R,DP(size(x),size(y))>	in	非斉次方程式の強制項 (後述).
eps	<R,DP>	in	反復法の収束条件 (後述).
boundary	<C(4)>	in	4 辺の境界条件を与える (後述).
psi	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	ポアソン方程式の解.
bound_opt	<R,DP(size(x),size(y))>	in	境界での値 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
a	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数 1 (後述). デフォルト: すべて 1.
b	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数 2 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
c	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数 3 (後述). デフォルト: すべて 1.
d	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数 4 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
e	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数 5 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
f	<R,DP(size(x),size(y))>	in	係数 6 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
undef	<R,DP>	in	内部領域の値 (後述). デフォルト: ゼロ.
inner_bound	<I(size(x),size(y))>	in	内部境界判別整数 (付録). デフォルト: すべてゼロ.
init_flag	<L>	in	応答をゼロで初期化するか (後述).
ln	<I>	in	反復回数 (後述).

定義式

求める未知変数を ψ としたとき、以下の偏微分方程式を計算する。

$$a(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y) \psi(x, y) = \rho(x, y).$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x : x, \quad y : y, \quad \rho : \text{rho}, \quad \psi : \text{psi}.$$

$$a : a, \quad b : b, \quad c : c, \quad d : d, \quad e : e, \quad f : f.$$

なお、具体的な差分式、境界条件の計算式は付録参照。

備考

- 非斉次強制項 ρ および、 f は計算領域すべてについてゼロと設定すると、ラプラス方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 f をゼロと設定すると、純ポアソン方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 ρ をゼロと設定すると、ヘルムホルツ方程式を計算することに相当する。
- 本ルーチンの収束条件は、反復の 1 ステップ前後での絶対誤差の最大値が閾値以下になったときに計算を終了するように設定しており、オプション引数 `eps` はその誤差の値を設定する。
- 本ルーチンでは、4 辺の境界条件を

1 : 固定端境界 (ディリクレ型), 2 : 自由端境界 (ノイマン型), 3 : 周期境界条件

という 3 種類の数字で設定することができる。ここで、別のオプション引数 `bound_opt` を設定しておけば、その値で境界を強制することができる (固定端の場合は、引数の値そのものが用いられ、自由端の場合は、境界を法線方向に流れるフラックスの値として引数の値が使用される。もちろん、周期境界ではこの値は設定しても反映されない)。この引数は 4 文字の文字型であり、それぞれの順番は図 5.1 左のような対応をしている。

- 境界条件は自由に設定できるが、周期境界条件を設定した場合、その境界に隣接する反対側の境界も同一の境界条件の値を設定しておかなければならない。例えば、 x 軸に平行な境界を周期境界とするのであれば、`boundary` の 1, 3 文字目は '3' でなければならない。そのようにされていない場合には、エラーを返す仕様になっている。
- 境界が固定端か自由端の場合、`bound_opt` で設定される値のうち、境界上に存在する配列要素^{*4}の値を参照して、固定端の場合はその値を直接固定端での値として、自由端の場合は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g$$

という境界条件である場合、 f, g の値に相当する。つまり、このオプションにおいて、実際にルーチンではほとんどの配列が使用されないことになる。

- 境界の隅における境界条件の優先順位は、固定境界 (1), 周期境界 (3), 自由境界 (2) の順番となっている。つまり、`bound(1:2)='12'` と設定されている場合、両方に属する点 $i = 1, j = 1$ は固定境界 (1) で計算される ('2' で設定される自由境界より優先度が高いため)。

^{*4}つまり、`bound_opt(1,:)`, `bound_opt(size(x),:)`, `bound_opt(:,1)`, `bound_opt(:,size(y))` に設定されている値のこと。

- 偏微分方程式の各係数の値を表す a , b , c , d , e , f であるが、この値を省略すると、最高階の微分演算子に係る係数はすべて 1 に設定され、その他はすべてゼロに設定される（すなわち、純ポアソン方程式の計算となる）。これは、最高階の微分演算子までゼロに設定すると、方程式が特異系になり、この方法で処理すべき方程式の形ではなくなるための措置である。
- 偏微分方程式の係数は空間変化している場合でも計算することは可能であり、空間格子点が等間隔座標でない場合でも計算は可能である。
- 引数 `undef` は内部領域に未定義域を含む場合に、未定義域での応答に対して与えられる値。
- 引数 `inner_bound` は境界格子についてゼロでない値、また内部未定義域に対して 10 という値が与えられる。ユーザーはこの引数を設定することで、内部領域に任意の形の閉じた未定義域を与えて計算することができる。具体的にどのような境界でどのような値を与えるかについては、5.1 を参照。
- 引数 `init_flag` は引数 `psi` を最初にゼロに初期化するかどうかのフラグであり、`.true.` のとき、初期化を行う。デフォルトは `.true.` となる。これは、最初に `psi` の分布がある程度応答の場に類似していれば、反復計算する回数が少なくなることから高速化用のフラグである。ただし、応答の場がある程度予測される場合や既に応答の場がわかっている状態から少し遷移した状態の応答を求めるといった限定的な場合にしか、`.false.` は選ばないほうがよい。
- 引数 `ln` は収束判定条件 `eps` の値に関係なく、`ln` 回反復を繰り返したら、強制的に終了し、反復終了時点での応答の分布を返す。

3.4.3 Ellip_GauSei_3d

機能

ガウスザイデル法（逐次反復法）を用いて、3次元の楕円型非斉次 2 階線形偏微分方程式を計算する。本ルーチンは内部領域に任意の未定義領域を含む場合でも計算することが可能である。そのような計算を行う場合はオプション引数 `inner_bound` を設定すること。

書式

```
call Ellip_GauSei_3d( x, y, z, rho, eps, boundary, psi, &
& [bound_opt], [xa], [ya], [za], &
& [a], [b], [c], [d], [e], [f], [g], &
& [undef], [inner_bound], [init_flag], [ln] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
z	<R,DP(:)>	in	右手系第三座標.
rho	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	非斉次方程式の強制項 (後述).
eps	<R,DP>	in	反復法の収束条件 (後述).
boundary	<C(8)>	in	8面の境界条件を与える (後述).
psi	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	ポアソン方程式の解.
bound_opt	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	境界での値 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
xa	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 1 (後述). デフォルト: すべて 1.
ya	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 2 (後述). デフォルト: すべて 1.
za	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 3 (後述). デフォルト: すべて 1.
a	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 4 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
b	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 5 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
c	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 6 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
d	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 7 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
e	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 8 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
f	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 9 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
g	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 10 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
undef	<R,DP>	in	内部領域の値 (後述). デフォルト: ゼロ.
inner_bound	<I(size(x),size(y),size(z))>	in	内部境界判別整数 (付録). デフォルト: すべてゼロ.
init_flag	<L>	in	応答をゼロで初期化するか (後述).
ln	<I>	in	反復回数 (後述).

定義式

求める未知変数を ψ としたとき、以下の偏微分方程式を計算する。

$$\begin{aligned}
& X(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Y(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + Z(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + a(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + b(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + c(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \\
& + d(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + g(x, y, z) \psi(x, y, z) = \rho(x, y, z).
\end{aligned}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$\begin{aligned} x : x, \quad y : y, \quad z : z, \quad \rho : \text{rho}, \quad \psi : \text{psi}, \\ X : \text{xa}, \quad Y : \text{ya}, \quad Z : \text{za}, \\ a : a, \quad b : b, \quad c : c, \quad d : d, \quad e : e, \quad f : f, \quad g : g. \end{aligned}$$

備考

- 非斉次強制項 ρ および、 g は計算領域すべてについてゼロと設定すると、ラプラス方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 g をゼロと設定すると、純ポアソン方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 ρ をゼロと設定すると、ヘルムホルツ方程式を計算することに相当する。
- 本ルーチンの収束条件は、反復の1ステップ前後での絶対誤差の最大値が閾値以下になったときに計算を終了するように設定しており、オプション引数 `eps` はその誤差の値を設定する。
- 本ルーチンでは、6面の境界条件を

1 : 固定端境界 (ディリクレ型), 2 : 自由端境界 (ノイマン型), 3 : 周期境界条件

という3種類の数字で設定することができる。ここで、別のオプション引数 `bound_opt` を設定しておけば、その値で境界を強制することができる (固定端の場合は、引数の値そのものが用いられ、自由端の場合は、境界を法線方向に流れるフラックスの値として引数の値が使用される。もちろん、周期境界ではこの値は設定しても反映されない)。この引数は4文字の文字型であり、それぞれの順番は図 5.1 右のような対応をしている。

- 境界条件は自由に設定できるが、周期境界条件を設定した場合、その境界に隣接する反対側の境界も同一の境界条件の値を設定しておかなければならない。例えば、 x 軸に平行な境界を周期境界とするのであれば、`boundary` の1, 3文字目は '3' でなければならない。そのようにされていない場合には、エラーを返す仕様になっている。
- 境界が固定端か自由端の場合、`bound_opt` で設定される値のうち、境界上に存在する配列要素^{*5}の値を参照して、固定端の場合はその値を直接固定端での値として、自由端の場合は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = h$$

という境界条件である場合、 f, g, h の値に相当する。つまり、このオプションにおいて、実際にルーチンではほとんどの配列が使用されないことになる。

^{*5}つまり、`bound_opt(1,:)`, `bound_opt(size(x),:)`, `bound_opt(:,1)`, `bound_opt(:,size(y))` に設定されている値のこと。

- 境界の隅における境界条件の優先順位は、固定境界 (1), 周期境界 (3), 自由境界 (2) の順番となっている。つまり、`bound(1:2)='12'` と設定されている場合、両方に属する点 $i = 1, j = 1$ は固定境界 (1) で計算される ('2' で設定される自由境界より優先度が高いため)。
- 偏微分方程式の各係数の値を表す `xa, ya, za, a, b, c, d, e, f, g` であるが、この値を省略すると、最高階の微分演算子に係る係数はすべて 1 に設定され、その他はすべてゼロに設定される (すなわち、純ポアソン方程式の計算となる)。これは、最高階の微分演算子までゼロに設定すると、方程式が特異系になり、この方法で処理すべき方程式の形ではなくなるための措置である。
- 偏微分方程式の係数は空間変化している場合でも計算することは可能であり、空間格子点が等間隔座標でない場合でも計算は可能である。
- 引数 `undef` は内部領域に未定義域を含む場合に、未定義域での応答に対して与えられる値。
- 引数 `inner_bound` は境界格子についてゼロでない値、また内部未定義域に対して 10 という値が与えられる。ユーザーはこの引数を設定することで、内部領域に任意の形の閉じた未定義域を与えて計算することができる。具体的にどのような境界でどのような値を与えるかについては、5.1 を参照。
- 引数 `init_flag` は引数 `psi` を最初にゼロに初期化するかどうかのフラグであり、`.true.` のとき、初期化を行う。デフォルトは `.true.` となる。これは、最初に `psi` の分布がある程度応答の場に類似していれば、反復計算する回数が少なくなることから高速化用のフラグである。ただし、応答の場がある程度予測される場合や既に応答の場がわかっている状態から少し遷移した状態の応答を求めるといった限定的な場合にしか、`.false.` は選ばないほうがよい。
- 引数 `ln` は収束判定条件 `eps` の値に関係なく、`ln` 回反復を繰り返したら、強制的に終了し、反復終了時点での応答の分布を返す。

3.4.4 Ellip_Jacobi_3d

機能

ヤコビ法を用いて、3次元の楕円型非斉次2階線形偏微分方程式を計算する。OpenMPによる並列処理が可能。本ルーチンは内部領域に任意の未定義領域を含む場合でも計算することが可能である。そのような計算を行う場合はオプション引数 `inner_bound` を設定すること。

書式

```
call Ellip_Jacobi_3d( x, y, z, rho, eps, boundary, psi, &  
& [bound_opt], [xa], [ya], [za], &  
& [a], [b], [c], [d], [e], [f], [g], &  
& [undef], [inner_bound], [init_flag], [ln] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
z	<R,DP(:)>	in	右手系第三座標.
rho	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	非斉次方程式の強制項 (後述).
eps	<R,DP>	in	反復法の収束条件 (後述).
boundary	<C(8)>	in	8面の境界条件を与える (後述).
psi	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	inout	ポアソン方程式の解.
bound_opt	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	境界での値 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
xa	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 1 (後述). デフォルト: すべて 1.
ya	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 2 (後述). デフォルト: すべて 1.
za	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 3 (後述). デフォルト: すべて 1.
a	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 4 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
b	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 5 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
c	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 6 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
d	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 7 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
e	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 8 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
f	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 9 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
g	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	係数 10 (後述). デフォルト: すべてゼロ.
undef	<R,DP>	in	内部領域の値 (後述). デフォルト: ゼロ.
inner_bound	<I(size(x),size(y),size(z))>	in	内部境界判別整数 (付録). デフォルト: すべてゼロ.
init_flag	<L>	in	応答をゼロで初期化するか (後)
ln	<I>	in	反復回数 (後述).

定義式

求める未知変数を ψ としたとき、以下の偏微分方程式を計算する。

$$X(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Y(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + Z(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + a(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + b(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + c(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + d(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + g(x, y, z) \psi(x, y, z) = \rho(x, y, z).$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x : x, \quad y : y, \quad z : z, \quad \rho : \text{rho}, \quad \psi : \text{psi},$$

$$X : \text{xa}, \quad Y : \text{ya}, \quad Z : \text{za},$$

$$a : \text{a}, \quad b : \text{b}, \quad c : \text{c}, \quad d : \text{d}, \quad e : \text{e}, \quad f : \text{f}, \quad g : \text{g}.$$

備考

- 非斉次強制項 ρ および、 g は計算領域すべてについてゼロと設定すると、ラプラス方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 g をゼロと設定すると、純ポアソン方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 ρ をゼロと設定すると、ヘルムホルツ方程式を計算することに相当する。
- 本ルーチンの収束条件は、反復の1ステップ前後での絶対誤差の最大値が閾値以下になったときに計算を終了するように設定しており、オプション引数 `eps` はその誤差の値を設定する。
- 本ルーチンでは、6面の境界条件を

1 : 固定端境界 (ディリクレ型), 2 : 自由端境界 (ノイマン型), 3 : 周期境界条件

という3種類の数字で設定することができる。ここで、別のオプション引数 `bound_opt` を設定しておけば、その値で境界を強制することができる (固定端の場合は、引数の値そのものが用いられ、自由端の場合は、境界を法線方向に流れるフラックスの値として引数の値が使用される。もちろん、周期境界ではこの値は設定しても反映されない)。この引数は4文字の文字型であり、それぞれの順番は図 5.1 右のような対応をしている。

- 境界条件は自由に設定できるが、周期境界条件を設定した場合、その境界に隣接する反対側の境界も同一の境界条件の値を設定しておかなければならない。例えば、 x 軸に平行な境界を周期境界とするのであれば、`boundary` の1, 3文字目は '3' でなければならない。そのようにされていない場合には、エラーを返す仕様になっている。

- 境界が固定端か自由端の場合、`bound_opt` で設定される値のうち、境界上に存在する配列要素^{*6}の値を参照して、固定端の場合はその値を直接固定端での値として、自由端の場合は、

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = g, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = h$$

という境界条件である場合、 f, g, h の値に相当する。つまり、このオプションにおいて、実際にルーチンではほとんどの配列が使用されないことになる。

- 境界の隅における境界条件の優先順位は、固定境界 (1), 周期境界 (3), 自由境界 (2) の順番となっている。つまり、`bound(1:2)='12'` と設定されている場合、両方に属する点 $i = 1, j = 1$ は固定境界 (1) で計算される ('2' で設定される自由境界より優先度が高いため)。
- 偏微分方程式の各係数の値を表す `xa, ya, za, a, b, c, d, e, f, g` であるが、この値を省略すると、最高階の微分演算子に係る係数はすべて 1 に設定され、その他はすべてゼロに設定される (すなわち、純ポアソン方程式の計算となる)。これは、最高階の微分演算子までゼロに設定すると、方程式が特異系になり、この方法で処理すべき方程式の形ではなくなるための措置である。
- 偏微分方程式の係数は空間変化している場合でも計算することは可能であり、空間格子点が等間隔座標でない場合でも計算は可能である。
- 引数 `undef` は内部領域に未定義域を含む場合に、未定義域での応答に対して与えられる値。
- 引数 `inner_bound` は境界格子についてゼロでない値、また内部未定義域に対して 10 という値が与えられる。ユーザーはこの引数を設定することで、内部領域に任意の形の閉じた未定義域を与えて計算することができる。具体的にどのような境界でどのような値を与えるかについては、5.1 を参照。
- 引数 `init_flag` は引数 `psi` を最初にゼロに初期化するかどうかのフラグであり、`.true.` のとき、初期化を行う。デフォルトは `.true.` となる。これは、最初に `psi` の分布がある程度応答の場に類似していれば、反復計算する回数が少なくなることから高速化用のフラグである。ただし、応答の場がある程度予測される場合や既に応答の場がわかっている状態から少し遷移した状態の応答を求めるといった限定的な場合にしか、`.false.` は選ばないほうがよい。
- 引数 `ln` は収束判定条件 `eps` の値に関係なく、`ln` 回反復を繰り返したら、強制的に終了し、反復終了時点での応答の分布を返す。

3.5 ffts

FFT (高速フーリエ変換) に関するルーチン集。FFT 計算の詳細については、?? 参照。

^{*6}つまり、`bound_opt(1,:)`, `bound_opt(size(x),:)`, `bound_opt(:,1)`, `bound_opt(:,size(y))` に設定されている値のこと。

3.5.1 c2r_ffttp_1d

機能

1次元実数データのFFT逆変換を行う。

書式

```
call c2r_ffttp_1d( nx, a, b, [prim], [prim_fact], [omega_fix], [omegan_fix]
 )
```

引数

nx	<I>	in	データの個数.
a	<CP,CDP(nx/2)>	in	複素数変換前データ.
b	<R,DP(nx)>	inout	実数変換後データ.
prim	<C(1)>	in	素因数分解判定 (後述). 'o' =分解する, 'x' =分解しない。
prim_fact	<I(5)>	in	素因数指数 (後述).
omega_fix	<CP,CDP(nx/2,nx/2)>	in	2,3,5,7 以外の素因数での 回転行列 (後述).
omegan_fix	<CP,CDP(nx/2,nx/2)>	in	全回転行列 (後述).

定義式

N 個のデータをもつ実数 $x(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$ を考える (N は偶数)。このデータの離散フーリエ正変換 $\hat{x}(l)$ は

$$\hat{x}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}, \quad l = 0, \dots, N - 1$$

で定義される。逆変換は

$$x(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}(l) e^{2\pi i \frac{lk}{N}}, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

で定義される。これを Temperton のアルゴリズムを用いて FFT 処理する。実数データの FFT 計算の詳細については、?? 参照。

備考

- 引数 `prim` はデータ数 N を素因数分解するものであり、このオプションが 'x' の場合はデータがそのままフーリエ変換処理に回されるので、単なる離散フーリエ変換を行うことになる。分解を行えば、データ数が $N = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$ ままで分解を行い、FFT 処理を行う。引数 `prim_fact` はこのときの素因数指数の数を指定する。つまり、

```
prim_fact(1:5)=(/a,b,c,d,e/)
```

という対応となる。

- 引数 `omegan_fix` はデータ数 `nx` における FFT で使用する回転行列^{*7}を指定する。引数 `omega_fix` はデータ数が 2,3,5,7 以外の素因数 (1 つめの備考を例にすると, `e` がそれにあたる) に対応する回転行列。これらの行列は専用ルーチン `rotate_calc` で行うことができる。
- 本ルーチンの仕様から、波数成分 $N/2$ は配列 `a(1)` の複素成分に格納しなければならない。

3.5.2 ffttp_1d

機能

1 次元複素数データから FFT を行う。

書式

```
call ffttp_1d( nx, a, b, csign, [prim], [prim_fact], [omega_fix], [omegan_fix]
 )
```

引数

<code>nx</code>	<I>	<code>in</code>	データの個数。
<code>a</code>	<CP,CDP(nx)>	<code>in</code>	複素数変換前データ。
<code>b</code>	<CP,CDP(nx)>	<code>inout</code>	複素数変換後データ。
<code>csign</code>	<C(1)>	<code>in</code>	正逆変換判定。 'r' = 正変換, 'i' = 逆変換。
<code>prim</code>	<C(1)>	<code>in</code>	素因数分解判定 (後述)。 'o' = 分解する, 'x' = 分解しない。
<code>prim_fact</code>	<I(5)>	<code>in</code>	素因数指数 (後述)。
<code>omega_fix</code>	<CP,CDP(nx,nx)>	<code>in</code>	2,3,5,7 以外の素因数での 回転行列 (後述)。
<code>omegan_fix</code>	<CP,CDP(nx,nx)>	<code>in</code>	全回転行列 (後述)。

定義式

N 個のデータをもつ複素数 $x(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ を考える。このデータの離散フーリエ正変換 $\hat{x}(l)$ は

$$\hat{x}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}, \quad l = 0, \dots, N-1$$

^{*7}回転行列の詳細な解説は付録??参照。

で定義される。逆変換は

$$x(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}(l) e^{2\pi i \frac{lk}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

で定義される。これを Temperton のアルゴリズムを用いて FFT 処理する。

備考

- 引数 `prim` はデータ数 N を素因数分解するものであり、このオプションが 'x' の場合はデータがそのままフーリエ変換処理に回されるので、単なる離散フーリエ変換を行うことになる。分解を行えば、データ数が $N = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$ ままで分解を行い、FFT 処理を行う。引数 `prim_fact` はこのときの素因数指数の数を指定する。つまり、

```
prim_fact(1:5)=(/a,b,c,d,e/)
```

という対応となる。

- 引数 `omegan_fix` はデータ数 `nx` における FFT で使用する回転行列^{*8}を指定する。引数 `omega_fix` はデータ数が 2,3,5,7 以外の素因数 (1 つめの備考を例にすると、`e` がそれにあたる) に対応する回転行列。これらの行列は専用ルーチン `rotate_calc` で行うことができる。

3.5.3 ffttp_2d

機能

2次元複素数データから FFT を行う。

書式

```
call ffttp_2d( nx, ny, a, b, csign, [prim], &
  [prim_factx], [prim_facty], &
  [omegax_fix], [omegaxn_fix], &
  [omegay_fix], [omegayn_fix] )
```

引数

^{*8}回転行列の詳細な解説は付録??参照.

nx	<I>	in	1 次データの個数.
ny	<I>	in	2 次データの個数.
a	<CP,CDP(nx,ny)>	in	複素数変換前データ.
b	<CP,CDP(nx,ny)>	inout	複素数変換後データ.
csign	<C(1)>	in	正逆変換判定. 'r' =正変換, 'i' =逆変換.
prim	<C(1)>	in	素因数分解判定 (後述). 'o' =分解する, 'x' =分解しない.
prim_factx	<I(5)>	in	1 次データ素因数指数 (後述).
prim_facty	<I(5)>	in	2 次データ素因数指数 (後述).
omegax_fix	<CP,CDP(nx,nx)>	in	2,3,5,7 以外の素因数での 1 次データ回転行列 (後述).
omegay_fix	<CP,CDP(ny,ny)>	in	2,3,5,7 以外の素因数での 2 次データ回転行列 (後述).
omegaxn_fix	<CP,CDP(nx,nx)>	in	1 次データ全回転行列 (後述).
omegayn_fix	<CP,CDP(ny,ny)>	in	2 次データ全回転行列 (後述).

定義式

(N, M) 個のデータをもつ複素数 $x(k, l)$, $k = 0, \dots, N-1, l = 0, \dots, M-1$ を考える。このデータの離散フーリエ正変換 $\hat{x}(m, n)$ は

$$\hat{x}(m, n) = \frac{1}{NM} \sum_{l=0}^{M-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(k, l) e^{-2\pi i \frac{km}{N}} \right] e^{-2\pi i \frac{ln}{M}}, \quad m = 0, \dots, N-1, n = 0, \dots, M-1$$

で定義される。逆変換は

$$\hat{x}(k, l) = \sum_{n=0}^{M-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m, n) e^{2\pi i \frac{km}{N}} \right] e^{2\pi i \frac{ln}{M}}, \quad k = 0, \dots, N-1, l = 0, \dots, M-1$$

で定義される。これを Temperton のアルゴリズムを用いて FFT 処理する。

備考

- 引数 `prim` はデータ数 N を素因数分解するものであり、このオプションが 'x' の場合はデータがそのままフーリエ変換処理に回されるので、単なる離散フーリエ変換を行うことになる。分解を行えば、データ数が $N = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$ まで分解を行い、FFT 処理を行う。引数 `prim_fact` はこのときの素因数指数の数を指定する。つまり、

```
prim_fact(1:5)=(/a,b,c,d,e/)
```

という対応となる。

- 引数 `omegan_fix` はデータ数 `nx` における FFT で使用する回転行列^{*9}を指定する。引数 `omega_fix` はデータ数が 2,3,5,7 以外の素因数 (1 つめの備考を例に

^{*9}回転行列の詳細な解説は付録??参照.

すると, e がそれにあたる) に対応する回転行列. これらの行列は専用ルーチン `rotate_calc` で行うことができる.

3.5.4 prim_calc

機能

任意の正数値について, 2,3,5,7 の素因数分解を行う.

書式

```
call prim_calc( n, factor, resid )
```

引数

<code>n</code>	<I>	<code>in</code>	分解する正整数値.
<code>factor</code>	<I(4)>	<code>inout</code>	2,3,5,7 の各素因数指数.
<code>resid</code>	<I>	<code>inout</code>	2,3,5,7 以外の素因数.

定義式

任意の正整数値 n が

$$n = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$$

であった場合, 上の各変数は以下のような対応となる.

$$n \rightarrow n, (a, b, c, d) \rightarrow \text{factor}(1:4), e \rightarrow \text{resid}$$

備考

特になし.

3.5.5 r2c_ffttp_1d

機能

1次元実数データから FFT を行う.

書式

```
call r2c_ffttp_1d( nx, a, b, [prim], [prim_fact], [omega_fix], [omegan_fix] )
```

引数

nx	<I>	in	データの個数.
a	<R,DP(nx)>	in	実数変換前データ.
b	<CP,CDP(nx/2)>	inout	複素数変換後データ.
prim	<C(1)>	in	素因数分解判定 (後述). 'o' =分解する, 'x' =分解しない。
prim_fact	<I(5)>	in	素因数指数 (後述).
omega_fix	<CP,CDP(nx/2,nx/2)>	in	2,3,5,7 以外の素因数での 回転行列 (後述).
omegan_fix	<CP,CDP(nx/2,nx/2)>	in	全回転行列 (後述).

定義式

N 個のデータをもつ実数 $x(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$ を考える (N は偶数)。このデータの離散フーリエ正変換 $\hat{x}(l)$ は

$$\hat{x}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}, \quad l = 0, \dots, N - 1$$

で定義される。逆変換は

$$x(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}(l) e^{2\pi i \frac{lk}{N}}, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

で定義される。これを Temperton のアルゴリズムを用いて FFT 処理する。実数データの FFT 計算の詳細については、?? 参照。

備考

- 引数 `prim` はデータ数 N を素因数分解するものであり、このオプションが 'x' の場合はデータがそのままフーリエ変換処理に回されるので、単なる離散フーリエ変換を行うことになる。分解を行えば、データ数が $N = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$ まで分解を行い、FFT 処理を行う。引数 `prim_fact` はこのときの素因数指数の数を指定する。つまり、

`prim_fact(1:5)=(/a,b,c,d,e/)`

という対応となる。

- 引数 `omegan_fix` はデータ数 nx における FFT で使用する回転行列^{*10}を指定する。引数 `omega_fix` はデータ数が 2,3,5,7 以外の素因数 (1 つめの備考を例にすると、 e がそれにあたる) に対応する回転行列。これらの行列は専用ルーチン `rotate_calc` で行うことができる。
- 実数データのフーリエ変換は変換後のデータ数が変換前のデータ数の半分に圧縮されていることに注意。また、本ルーチンの仕様から、複素波数成分 $N/2$ は `b(1)` の虚部に格納される。

^{*10}回転行列の詳細な解説は付録??参照。

3.5.6 rotate_calc

機能

データ数 nx の回転行列を計算する。

書式

```
call rotate_calc( nx, csign, prim_fact, omega, omegan )
```

引数

<code>nx</code>	<I>	<code>in</code>	データの個数.
<code>csign</code>	<C(1)>	<code>in</code>	正逆変換判定。 'r' = 正変換, 'i' = 逆変換。
<code>prim_fact</code>	<I(5)>	<code>in</code>	素因数指数 (後述)。
<code>omega</code>	<CP,CDP(prim_fact(5),prim_fact(5))>	<code>inout</code>	2,3,5,7 以外の 素因数での回転行列。
<code>omegan</code>	<CP,CDP(nx,nx)>	<code>inout</code>	全回転行列。

定義式

N 個のデータの離散フーリエ変換に用いる回転行列 $W_{j,k}$ は

$$W_{j,k} = e^{\pm 2\pi i j k / N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

で定義される。正変換は負号, 逆変換は正号で定義される。また, 2,3,5,7 以外の素因数 α での回転行列は上式において,

$$N \rightarrow \alpha$$

とただけである。

備考

- 引数 `prim_fact` は

$$\text{prim_fact} = (/a, b, c, d, e/)$$

とすると, データ数 nx は

$$nx = 2^a 3^b 5^c 7^d e$$

という素因数で構成されていることを示している。

3.5.7 phase_velocity_binning

機能

分散関係に基づき定義される位相速度について, 2次元スペクトルデータを任意に定義される速度ビンに分割する。このとき, スペクトル強度で重みづけして分割が行われる。

書式

```
call phase_velocity_binning( km, freq, ival, vbin, bin_val, &
                             [undef], [mean_flag], [krange], [frange] )
```

引数

km	<R,DP(:)>	in	波数 [m-1].
freq	<R,DP(:)>	in	周波数 [s-1].
ival	<R,DP(size(km),size(freq))>	in	スペクトルデータ.
vbin	<R,DP(:)>	in	速度ビン [m/s].
bin_val	<R,DP(size(vbin)+1)>	inout	ビンで分割されたスペクトルデータ.
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
mean_flag	<L>	in	戻り値の処理方法 (後述).
krange	<R,DP>	in	ビン分け範囲の波数閾値 (後述).
frange	<R,DP>	in	ビン分け範囲の周波数閾値 (後述).

定義式

任意の波数 k と周波数 f のスペクトルがもつ位相速度 $c(k, f)$ は定義から

$$c \equiv \frac{f}{k}.$$

もし、 $k - f$ の 2 次元空間にスペクトルデータ $S(k, f)$ が定義されると、このスペクトルデータの各 (k, f) における位相速度は上式から一意に求めることができる。今、 v_n という位相速度の離散値を与えたとき、各位相速度の区間に入るスペクトルデータ $R_i = R(v_i \leq c < v_{i+1})$ は

$$R_i = \iint_{kv_i \leq f < v_{i+1}} \int S(k, f) dkdf$$

によって与えられる。また、 $c < v_1$ と $c < v_{n+1}$ についても計算が行われる。このとき、引数は以下の対応をする。

$$k : \text{km}, \quad f : \text{freq}, \quad S(k, f) : \text{ival}(i, j),$$

$$v_i : \text{vbin}(i), \quad R_i : \text{bin_val}(i).$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

- `mean_flag` はビン分けされた各速度範囲におけるスペクトル値の和 R_i を、ビン分けされた各波数・周波数の個数で平均値として返すかどうかのフラグ。 `.true.` なら、返り値は

$$R_i = \frac{1}{A} \iint_{kv_i \leq f < v_{i+1}} S(k, f) dkdf,$$

A は $(v_i \leq c < v_{i+1})$ に入る $k - f$ の領域面積である。デフォルトは `.false.`

- `krange` と `frange` は

$$\left(\frac{k}{K}\right)^2 + \left(\frac{f}{F}\right)^2 \leq 1$$

を満たす範囲でのみビン分けを行うフラグ。 `krange` と `frange` はそれぞれ上式の K, F に対応する。

3.6 file_operate

IO ルーチン集。現在対応しているファイルフォーマットは以下のとおりである。

- 4 バイトバイナリデータ。
- `mgdsst` データ。
- テキストカラムデータ。
- `gtool3` フォーマットデータ。

3.6.1 auto_read_file

機能

2次元, 3次元変数混在の4バイトバイナリファイルからデータを読み出す `read_file` の自動化ルーチン (CReSS 仕様)。

書式

```
call auto_read_file( file_name, d2n, d3n, d2val, d3val,
  ad2val, ad3val, nx, ny, nz, d2var,
  d3var, [specnz], [intvnz], [funit] )
```

引数

<code>file_name</code>	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
<code>d2n</code>	<I>	in	読み込む 2 次元変数の数.
<code>d3n</code>	<I>	in	読み込む 3 次元変数の数.
<code>d2val</code>	<C(*)>	in	読み込む 2 次元変数の順番 (後述).
<code>d3val</code>	<C(*)>	in	読み込む 3 次元変数の順番 (後述).
<code>ad2val</code>	<C(*)>	in	読み込む 2 次元変数の順番 (後述).
<code>ad3val</code>	<C(*)>	in	読み込む 3 次元変数の順番 (後述).
<code>nx</code>	<I>	in	x 方向の要素数.
<code>ny</code>	<I>	in	y 方向の要素数.
<code>nz</code>	<I>	in	z 方向の要素数.
<code>d2var</code>	<R(nx,ny,d2n)>	inout	2 次元データ.
<code>d3var</code>	<R(nx,ny,nz,d3n)>	inout	3 次元データ.
<code>specnz</code>	<I>	in	z 方向のある 1 層 (後述).
<code>intvnz</code>	<I(2)>	in	z 方向のある部分連続層 (後述).
<code>funit</code>	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

`call read_file` 参照.

備考

- 4 バイトバイナリデータが 2, 3, 2, 3 次元という順番で 1 ファイルに格納されているようなファイルに用いられる.
- `d2val`, `d3val`, `ad2val`, `ad3val` はそれぞれ読み込む変数を示すフラグであり, 2, 3, 2, 3 の順番に 4, 3, 4, 5 個の変数が格納されている場合,

```
d2val = '0001', d3val = '000', ad2val = '0000', ad3val =
'10000'
```

となり, この場合, 最初の 2 次元データの 4 番目, 最後の 3 次元データの 1 番目のみ読まれるので, `d2n = 1`, `d3n = 1` で読み込めばよい.

- `specnz` が設定されている場合, 3 次元データは `nz` 個の中で, `specnz` 番目のデータのみが格納される.
- `intvnz` が設定されている場合, 3 次元データは `nz` 個の中で, `intvnz(1)` から `intvnz(2)` 番目までが格納される.

3.6.2 line_number_counter

機能

テキストカラムデータで格納されているファイルの行数を計算する.

書式

```
result = line_number_counter( file_name, [funit] )
```

引数

file_name	<C(*)>	in	行数を計算するファイル名.
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).
戻り値	<I>	inout	行数.

定義式

特になし.

備考

特になし.

3.6.3 read_file_grads

機能

grads のコントロールファイルから指定の変数を読み込むルーチン.

書式

```
call read_file_grads( fname, val_name, dim_len, intvz, intvt, val, [funit] )
```

引数

fname	<C(*)>	in	読み出すコントロールファイル名.
val_name	<C(*)>	in	変数名.
dim_len	<I(4)>	in	各次元の要素数 (後述) .
intvz	<I(2)>	in	高度方向の読み出す要素数 (後述) .
intvt	<I(2)>	in	時間方向の読み出す要素区間 (後述) .
val	<R(後述)>	inout	読み出した値が格納される変数.
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし.

備考

- x, y, z, t の座標要素数がこの順番で dim_len(1:4) の順で格納される.

- `intvz`, `intvt` は読み出す高度, 時間範囲であり, 全て読み出す場合は `intvz(1)=1`, `intvz(2)=nz`, `intvt(1)=1`, `intvt(2)=nt` で設定しなければならない.
- 読み出す用の配列は

```
R(dim_len(1), dim_len(2), intvz(1):intvz(2), intvt(1):intvt(2))
```

で引数として与える.

3.6.4 request_axis_grads

機能

`grads` のコントロールファイルから各空間座標軸の座標値を取得するルーチン.

書式

```
call request_axis_grads( fname, axis_name, x, [y], [stime], [funit] )
```

引数

<code>fname</code>	<C(*)>	in	読み出すコントロールファイル名.
<code>axis_name</code>	<C(*)>	in	取得する軸の名前 (後述).
<code>x</code>	<R(:)>	inout	取得する軸の座標値 (後述).
<code>y</code>	<R(:)>	inout	<code>pdef</code> のときの軸の座標値 (後述).
<code>stime</code>	<C(:)>	inout	<code>tdef</code> のときの初期時刻 (後述).
<code>funit</code>	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし.

備考

- `x`, `y`, `z` のそれぞれの値を求める場合は `xdef`, `ydef`, `zdef` のそれぞれを `axis_name` に代入すればよい.
- `x(:)` として引数を与えるときの配列数は事前に `request_dim_grads` で要素数を取得しておかなければならない.
- GrADS のコントロールファイルにおけるパラメータの中に `pdef` というパラメータがあるため, そのパラメータを読み取るときのオプション. この場合, 東西方向の座標軸データが引数 `x` に入り, 南北座標軸データが引数 `y` に入る.
- GrADS のコントロールファイルにおける初期時刻の文字がそのまま代入される.

3.6.5 request_dim_grads

機能

grads のコントロールファイルから変数の空間次元の要素数を取得するルーチン.

書式

```
call request_dim_grads( fname, dim_len, [funit] )
```

引数

fname	<C(*)>	in	読み出すコントロールファイル名.
dim_len	<I(4)>	inout	各次元の要素数 (後述).
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし.

備考

- x, y, z, t の座標要素数がこの順番で dim_len(1:4) の順で格納される.

3.6.6 request_vardim_grads

機能

grads のコントロールファイルから任意の変数の高度方向の要素数を取得するルーチン.

書式

```
call request_vardim_grads( fname, var_name, nz, [funit] )
```

引数

fname	<C(*)>	in	読み出すコントロールファイル名.
var_name	<C(*)>	in	高度要素を取得したい変数の名前.
nz	<I>	inout	取得する高度要素数.
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし.

備考

特になし.

3.6.7 read_file

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルから 2 次元データを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file( file_name, nx, ny, rec_num, var, [offset], [funit] )
```

引数

file_name	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
nx	<I>	in	第一要素配列数.
ny	<I>	in	第二要素配列数.
rec_num	<I>	in	nx×ny 分読み出すデータのレコード番号 (後述).
var	<AI,R,DP(nx,ny)>	inout	読み出すデータ.
offset	<I>	in	オフセット (後述).
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

```
1 open(unit=11, file=file_name, access='direct', recl=4*nx*ny, status='old')
2   read(11,rec=rec_num) ((var(i,j),i=1,nx),j=1,ny)
3   close(unit=11, status='keep')
```

備考

- `offset` が指定された場合, その指定された数字 x 4 byte 分, 先頭を読み飛ばす. 例として, `offset = 10` の場合, 40 byte 分の先頭が読み飛ばされる. この指定がされた場合, `rec_num` は無視される.

3.6.8 read_file_3d

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルから 3 次元データを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file_3d( file_name, nx, ny, nz, rec_num, var, [offset], [funit]
)
```

引数

file_name	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
nx	<I>	in	第一要素配列数.
ny	<I>	in	第二要素配列数.
nz	<I>	in	第三要素配列数.
rec_num	<I>	in	読み出しを開始するデータのレコード番号 (後述)
var	<AI,R,DP(nx,ny,nz)>	inout	読み出すデータ.
offset	<I>	in	オフセット (後述).
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

```
1 open(unit=11, file=file_name, access='direct', recl=4*nx*ny, status='old')
2   read(11,rec=rec_num) ((var(i,j),i=1,nx),j=1,ny)
3   close(unit=11, status='keep')
```

備考

- offset が指定された場合, その指定された数字 x 4 byte 分, 先頭を読み飛ばす. 例として, offset = 10 の場合, 40 byte 分の先頭が読み飛ばされる. この指定がされた場合, rec_num は無視される.

3.6.9 read_file_part

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルから 2 次元データを部分的に読み出すルーチン.

書式

```
call read_file( file_name, nx, ny, nnx, nny, rec_num, var, [funit] )
```

引数

file_name	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
nx	<I>	in	第一要素配列数.
ny	<I>	in	第二要素配列数.
nnx	<I(2)>	in	第一要素読み出し間隔 (後述).
nny	<I(2)>	in	第二要素読み出し間隔 (後述).
rec_num	<I>	in	nx×ny 分読み出すデータのレコード番号 (後述).
var	<AI,R,DP(Lx,Ly)>	inout	読み出すデータ (後述).
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

読み出し方法はダイレクトアクセスで 1,2,4,8 バイトずつカウントして読み出す。このとき、アクセスするファイル位置 (1) は以下のような関係式で指定される。

```

l = nx * ny * (rec\_num - 1)
do j = 1, ny
  do i = 1, nx
    l = l + 1
    if (( i >= nnx(1) ).and.( i <= nnx(2) ).and. &
&      ( j >= nny(1) ).and.( j <= nny(2) ))then
      read ...
    end if
  end do
end do

```

備考

- Lx, Ly はそれぞれ $Lx = nnx(2) - nnx(1) + 1$, $Ly = nny(2) - nny(1) + 1$ で与えられる。

3.6.10 read_file_gtool3

機能

gtool3 形式のデータを読み込むルーチン。

書式

```
call read_file_gtool3( file_name, nx, ny, nz, tstr, tstep, tnum, var,
[funit] )
```

引数

<code>file_name</code>	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
<code>nx</code>	<I>	in	第一要素配列数.
<code>ny</code>	<I>	in	第二要素配列数.
<code>nz</code>	<I>	in	第三要素配列数.
<code>tstr</code>	<I>	in	読み始める時刻 (後述).
<code>tstep</code>	<I>	in	読み飛ばす時間間隔 (後述).
<code>tnum</code>	<I>	in	読み込む時間数 (後述).
<code>var</code>	<R(nx,ny,nz,tnum)>	inout	読み出すデータ.
<code>funit</code>	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし.

備考

- `tstr`, `tstep`, `tnum` の関係は, 1 つのデータファイルに `tmax` 個分の時刻データが格納されている場合,

$$tstr + tstep * (tnum - 1) \leq tmax$$

という関係が満たされればよい. ここで, `tstr = 1` なら, 初期時刻が読み込まれることになる. 実際の計算時刻や出力時間ステップは関係ない.

3.6.11 read_file_gtool3_header_c

機能

gtool3 形式のヘッダーデータのうち, 文字形式のデータを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file_gtool3_header_c( file_name, header, var, [funit] )
```

引数

<code>file_name</code>	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
<code>header</code>	<C(*)(:)>	in	ヘッダーの名前.
<code>var</code>	<C(16)(size(header))>	inout	<code>header</code> に対応するデータ.
<code>funit</code>	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし.

備考

- ヘッダーの名称は,
<http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/taikai/lab/others/Gtool/node111.html>
と同じ名称で与える. ただし, Fortran の予約語である `unit`, `size` については, `uni`, `siz` と入力すること.

3.6.12 read_file_gtool3_header_i

機能

gtool3 形式のヘッダーデータのうち, 整数形式のデータを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file_gtool3_header_i( file_name, header, var, [funit] )
```

引数

<code>file_name</code>	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
<code>header</code>	<C(*)(:)>	in	ヘッダーの名前.
<code>var</code>	<I(size(header))>	inout	<code>header</code> に対応するデータ.
<code>funit</code>	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし.

備考

- ヘッダーの名称は,
<http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/taikai/lab/others/Gtool/node111.html>
と同じ名称で与える. ただし, Fortran の予約語である `unit`, `size` については, `uni`, `siz` と入力すること.

3.6.13 read_file_gtool3_header_r

機能

gtool3 形式のヘッダーデータのうち, 実数形式のデータを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file_gtool3_header_r( file_name, header, var, [funit] )
```

引数

<code>file_name</code>	<code><C(*)></code>	in	読み出すファイル名.
<code>header</code>	<code><C(*)(<:)></code>	in	ヘッダーの名前.
<code>var</code>	<code><R(size(header))></code>	inout	<code>header</code> に対応するデータ.
<code>funit</code>	<code><I></code>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし.

備考

- ヘッダーの名称は,
<http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/taikai/lab/others/Gtool/node111.html>
と同じ名称で与える. ただし, Fortran の予約語である `unit`, `size` については, `uni`, `siz` と入力すること.

3.6.14 read_file_text

機能

テキストカラム形式のデータを読み込むルーチン.

書式

```
call read_file_text( file_name, nx, ny, var, [skip], [forma], [funit]
)
```

引数

<code>file_name</code>	<code><C(*)></code>	in	読み出すファイル名.
<code>nx</code>	<code><I></code>	in	列数.
<code>ny</code>	<code><I></code>	in	行数.
<code>var</code>	<code><C(nx,ny)></code>	inout	読み出すデータ.
<code>skip</code>	<code><I></code>	in	先頭読み飛ばす行数.
<code>forma</code>	<code><C(*)></code>	in	読み込むフォーマット (後述).
<code>funit</code>	<code><I></code>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

コンマ, スペース区切りのテキストデータを読み込む. `nx` は 1 行に格納されているデータの列数, `ny` は先頭から読み取る行数. ただし, `skip` が設定されている場合は, `skip` 行だけ読み飛ばして読み始める.

備考

- デフォルトでは, 読み飛ばし変数 `skip` はゼロに設定されている.

3.6.15 `read_himsst`

機能

気象庁 HIMSST データを読み込むためのルーチン.

書式

```
call read_himsst( fname, var, [funit] )
```

引数

<code>fname</code>	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
<code>var</code>	<R(800,600)>	inout	sst データ.
<code>funit</code>	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし. (HIMSST データのフォーマットについては,

https://ds.data.jma.go.jp/gmd/goos/data/pub/JMA-product/him_sst_pac_D/Readme_him_sst.jp
参照.)

備考

- 要素番号の小さいものが地球の南西端 (経度 100.5°, 緯度 -59.95°) に入り, 配列第一要素は東向き, 第二要素は北向きに格子データが格納されて出力される.
- 未定義値は 999.0, 海水データは 888.0 という値で格納される.

3.6.16 `read_mgdsst`

機能

気象庁 MGDSST データを読み込むためのルーチン. 任意の領域ではなく, 全球のみ対応.

書式

```
call read_mgdsst( fname, var, [funit] )
```

引数

fname	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
var	<R(1440,720)>	inout	sst データ.
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

特になし. (MGDSST データのフォーマットについては,
<http://near-goos1.jodc.go.jp/rmdb/format/JMA/mgdsst.txt>
 参照.)

備考

- 要素番号の小さいものが地球の南西端 (経度 0°, 緯度 -89.875°) に入り, 配列第一要素は東向き, 第二要素は北向きに格子データが格納されて出力される.
- 未定義値は 999.0, 海水データは 888.0 という値で格納される.

3.6.17 write_file

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルに 2 次元データを書き出すルーチン.

書式

```
call write_file( file_name, nx, ny, rec_num, var, [mode], [funit] )
```

引数

file_name	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
nx	<I>	in	第一要素配列数.
ny	<I>	in	第二要素配列数.
rec_num	<I>	in	nx×ny 分読み出すデータのレコード番号.
var	<AI,R,DP(nx,ny)>	inout	読み出すデータ.
mode	<C(*)>	in	ファイルの書き出しオプション (後述).
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

```

1  open(unit=11, file=file_name, access='direct', recl=4*nx*ny, status=mode)
2  write(11,rec=rec_num) ((var(i,j),i=1,nx),j=1,ny)
3  close(unit=11, status='keep')
```

備考

- mode は Fortran の書き出し status= に設定される値を代入.

3.6.18 write_file_3d

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルに 3 次元データを書き出すルーチン.

書式

```
call write_file_3d( file_name, nx, ny, nz, rec_num, var, [mode], [funit]
)
```

引数

file_name	<C(*)>	in	読み出すファイル名.
nx	<I>	in	第一要素配列数.
ny	<I>	in	第二要素配列数.
nz	<I>	in	第三要素配列数.
rec_num	<I>	in	読み出しを開始するデータのレコード番号.
var	<AI,R,DP(nx,ny,nz)>	inout	読み出すデータ.
mode	<C(*)>	in	ファイルの書き出しオプション.
funit	<I>	in	Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11).

定義式

```

1  open(unit=11, file=file_name, access='direct', recl=4*nx*ny, status=mode)
2  write(11,rec=rec_num) ((var(i,j),i=1,nx),j=1,ny)
3  close(unit=11, status='keep')
```

備考

- mode は Fortran の書き出し status= に設定される値を代入.

3.7 Geometry

座標変換に関する関数・サブルーチン集.

3.7.1 `rt_2_xy`

機能

平面極座標からデカルト座標への変換を行うルーチン.

書式

```
call rt_2_xy( r, t, x, y )
```

引数

<code>r</code>	<R,DP>	in	点 1 の距離 [m].
<code>t</code>	<R,DP>	in	点 1 の同位角 [rad].
<code>x</code>	<R,DP>	inout	点 1 の x 座標 [m].
<code>y</code>	<R,DP>	inout	点 1 の y 座標 [m].

定義式

ある 1 点が平面極座標において (r, t) と表現できるとき, 平面極座標の原点と同じ位置に原点をもつデカルト座標において, この点は (x, y) と表現できる. このときの極座標とデカルト座標の関係は

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

で与えられる.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$r, t = r, t, \quad x, y = x, y.$$

備考

特になし.

3.7.2 `xy_2_rt`

機能

デカルト座標から平面極座標への変換を行うルーチン.

書式

```
call xy_2_rt( x, y, xc, yc, r, t )
```

引数

x	<R,DP>	in	点 1 の x 座標 [m].
y	<R,DP>	in	点 1 の y 座標 [m].
xc	<R,DP>	in	平面極座標系の原点 x 座標 [m].
yc	<R,DP>	in	平面極座標系の原点 y 座標 [m].
r	<R,DP>	inout	点 1 の距離 [m].
t	<R,DP>	inout	点 1 の同位角 [rad].

定義式

ある 1 点がデカルト極座標において (x, y) と表現できるとき, 平面極座標の原点がデカルト座標 (x_c, y_c) に存在する場合, この点は (r, t) と表現できる. このときの極座標とデカルト座標の関係は

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}, \quad t = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

で与えられる.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\mathbf{r, t} = r, t, \quad \mathbf{x, y} = x, y.$$

備考

特になし.

3.8 Map_Function

地図投影に関する関数・サブルーチン集.

3.8.1 check_close

機能

2 次元格子点上で与えられた任意点が, 指定された閉曲線内に存在するかを判別する関数.

書式

```
result=check_close( xp, yp, ival )
```

引数

xp	<I,R,DP(:)>	in	閉曲線の頂点 x 座標番号 (後述).
yp	<I,R,DP(size(xp))>	in	閉曲線の頂点 y 座標番号 (後述).
ival	<I,R,DP(2)>	in	判別する格子点座標番号 (後述).
戻り値	<L>	out	xp, yp の閉曲線領域内外判定 (後述).

定義式

複素平面上に張られる閉曲線 C についての周積分を考える. ある複素平面上の点 z_0 について, 複素関数 $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ の周積分はコーシーの積分定理から,

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 0, & (z_0 \text{ が } C \text{ の外}), \\ 2\pi i, & (z_0 \text{ が } C \text{ の内}), \end{cases}$$

と得られる. 今 2 次元上に 3 点以上の格子点番号の組 $\{x_j, y_j\} (j = 1, \dots, N)$ が張られる. この組によって指定される格子点位置を頂点とする閉曲線 C_j で囲まれる多角形領域を考える. このとき, ある格子点番号 $A(X, Y)$ がこの多角形領域の内側に存在するか, 外側に存在するかを判定する. 上の周積分から,

$$I = \sum_{j=1}^N [\theta_2 - \theta_1]_j = \begin{cases} 0, & (A \text{ が } C_j \text{ の外}), \\ 2\pi, & (A \text{ が } C_j \text{ の内}), \end{cases}$$

によって判定される. ここで, θ_2, θ_1 は複素平面上で判別点 A を原点としたときの x_j, y_j の偏角を表す. 周積分を反時計回りが正であると定義すると, 添字 2 は添字 1 から反時計回りに進む方向を表す. 総和の各セグメントにおいて, 閉曲線の隣接頂点 2 点間の偏角の差 $\theta_2 - \theta_1$ は

$$|\theta_2 - \theta_1|_j = \arccos \left[\frac{\mathbf{r}_{1j} \cdot \mathbf{r}_{2j}}{|\mathbf{r}_{1j}| |\mathbf{r}_{2j}|} \right]$$

から求められる. このとき,

$$\mathbf{r}_{1j} = (x_{j-1} - X, y_{j-1} - Y),$$

$$\mathbf{r}_{2j} = (x_j - X, y_j - Y),$$

であり, 積分の方向はこれらの 2 次元ベクトルのベクトル積を用いて

$$\mathbf{r}_{1j} \times \mathbf{r}_{2j} = \begin{cases} > 0, & (\text{反時計回りに積分}), \\ < 0, & (\text{時計回りに積分}), \end{cases}$$

と判別される. このとき, 関数の引数は以下の対応をする:

$$x_j : \text{xp}, \quad y_j : \text{yp}, \quad (X, Y) : \text{ival}(1:2), \quad N : \text{size}(\text{xp}).$$

戻り値は, 指定点が閉曲線領域内なら, `.true.`, 領域外なら `.false.` となる.

備考

- 定義の証明は??参照.
- 引数 xp, yp は始点と終点が一致した状態で渡されなければならない. すなわち, $\text{xp}(1)=\text{xp}(N)$, $\text{yp}(1)=\text{yp}(N)$ として引数を用意する. ここで, $N=\text{size}(\text{xp})$.

3.8.2 check_intersect

機能

2次元直交直線座標上で与えられた任意の2本の線分が、交差するかを判別する関数.

書式

```
result=check_intersect( x1, y1, x2, y2 )
```

引数

x1	<I,R,DP(2)>	in	線分 1 の x 座標.
y1	<I,R,DP(2)>	in	線分 1 の y 座標.
x2	<I,R,DP(2)>	in	線分 2 の x 座標.
y2	<I,R,DP(2)>	in	線分 2 の y 座標.
戻り値	<L>	out	線分 1 と 2 の交差判定 (交差していれば.true.).

定義式

直交直線座標系 (x, y) 上で定義される点 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ を結ぶ線分 AB と点 $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$ を結ぶ線分 CD の交差を判定する. 以下で定義される4つのパラメータ

$$r_1 = -(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A),$$

$$r_2 = -(y_D - y_C)(x_C - x_B) + (x_D - x_C)(y_C - y_B),$$

$$r_3 = -(y_B - y_A)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A),$$

$$r_4 = -(y_B - y_A)(x_D - x_A) + (x_B - x_A)(y_D - y_A),$$

について,

$$r_1 r_2 < 0$$

かつ

$$r_3 r_4 < 0$$

であるとき、2つの線分は交差している. 各引数との対応は以下のとおり.

$$(x_A, y_A) : x1(1), y1(1), \quad (x_B, y_B) : x1(2), y1(2),$$

$$(x_C, y_C) : x2(1), y2(1), \quad (x_D, y_D) : x2(2), y2(2).$$

備考

- この条件で判定できることは??にて証明している.

3.8.3 check_triclose

機能

2次元直交直線座標上で与えられた任意の1点が、与えられた三角形の内部に存在するかを判別する関数。

書式

```
result=check_triclose( xposi, yposi, ival )
```

引数

xposi	<I,R,DP(3)>	in	三角形の各頂点の x 座標.
yposi	<I,R,DP(3)>	in	三角形の各頂点の y 座標.
ival	<I,R,DP(2)>	in	与えられた判別点の x, y 座標.
戻り値	<L>	out	与えられた点が三角形内に存在していれば <code>.true..</code>

定義式

直交直線座標系 (x, y) 上の任意の点 $P(x_P, y_P)$ について、3点 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ を頂点とする三角形の内外判定を行う。三角形の重心 $G(x_G, y_G)$ と点 P のなす線分が三角形の各辺と交差するかを個別に判別し、3辺全てと交差しなければ、点 P は三角形内に存在すると判別する。判別方法は 3.8.2 と同じ。各引数との対応は以下のとおり。

$$(x_A, x_B, x_C) : \text{xposi}(1:3), \quad (y_A, y_B, y_C) : \text{yposi}(1:3), \quad (x_P, y_P) : \text{ival}(1), \text{ival}(2).$$

備考

- 具体的な判別式は 5.3.6 参照。

3.8.4 lat2mery

機能

地球球面上のある緯度、経度を原点としたメルカトル投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき、与えられた緯度が投影される投影座標 y を求める。

書式

```
result=lat2mery( phi, phi0 )
```

引数

`phi` <R,DP> in メルカトル投影される緯度 [rad].
`phi0` <R,DP> in メルカトル投影の基準緯度 [rad].
 戻り値 <R,DP> out 経度 `phi` が投影された座標 `y` [m].

定義式

球面上における緯度 ϕ をある緯度 (ϕ_0) を原点としたメルカトル投影座標 (x, y) に投影したとき, その y 座標は

$$y = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}$$

ここで, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.
 これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$y = y, \text{ phi0} = \phi_0, \text{ lat2mery} = \phi.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.5 ll2lamdis

機能

球面上のある 2 点間のランベルト投影座標での距離をそれぞれの点の緯度, 経度から計算する.

書式

```
result=ll2lamdis( lambda1, phi1, lambda2, phi2, lambda0, &
  phi0, phit1, phit2, [nopt], [uopt], [ropt]
```

引数

`lambda1` <R,DP> in 点 1 の経度 [rad].
`phi1` <R,DP> in 点 1 の緯度 [rad].
`lambda2` <R,DP> in 点 2 の経度 [rad].
`phi2` <R,DP> in 点 2 の緯度 [rad].
`lambda0` <R,DP> in 投影座標原点経度 [rad].
`phi0` <R,DP> in 投影座標原点緯度 [rad].
`phit1` <R,DP> in ランベルト投影基準緯度 1 [rad].
`phit2` <R,DP> in ランベルト投影基準緯度 2 [rad].
`nopt` <R,DP> in Lambert_coe の ncoe.
`uopt` <R,DP(0:2)> in Lambert_coe の uphi(0:2).
`ropt` <R,DP> in Lambert_coe の rhophi0.
 戻り値 <R,DP> in 2 点間の距離 [m].

定義式

球面上の 2 点 (ϕ_1, λ_1) , (ϕ_2, λ_2) が、ある緯度経度 (ϕ_0, λ_0) を原点としたランベルト投影座標 (x, y) に投影されたとする。このときの、投影先の座標をそれぞれ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) とすると、

$$\begin{aligned} x_1 &= a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_1)} \right]^n \sin [n(\lambda_1 - \lambda_0)] \\ y_1 &= w'_0 - a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_1)} \right]^n \cos [n(\lambda_1 - \lambda_0)] \\ x_2 &= a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_2)} \right]^n \sin [n(\lambda_2 - \lambda_0)] \\ y_2 &= w'_0 - a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_2)} \right]^n \cos [n(\lambda_2 - \lambda_0)] \\ U(\phi) &\equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\ n &\equiv \ln \left[\frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \\ w'_0 &\equiv w'(\lambda = \lambda_0, \phi = \phi_0) = a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_0)} \right]^n \end{aligned}$$

が得られるので、これよりこの 2 点間の距離 L は

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

で与えられる。 a は地球の半径である。

これらの式について、実際の引数は以下のような対応関係となる。

$$\begin{aligned} \text{phi1, lambda1} &= \phi_1, \lambda_1, & \text{phi2, lambda2} &= \phi_2, \lambda_2, & \text{phi0, phit1, phit2, lambda0} &= \phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \lambda_0, \\ \text{nopt} &= n, & \text{uopt(0:2)} &= U(\phi_0), U(\Phi_1), U(\Phi_2), & \text{rhophi0} &= w'_0. \end{aligned}$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.6 ll2lamxy

機能

球面上のある緯度、経度を原点としたランベルト投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき、球面上の任意の緯度経度が投影される x, y 座標を求める。

書式

```
call ll2lamxy( lambda, phi, x, y, lambda0, phi0, phi1, phi2, &
              [nopt], [uopt], [ropt] )
```

引数

lambda	<R,DP>	in	座標 (x, y) に投影される経度 [rad].
phi	<R,DP>	in	座標 (x, y) に投影される緯度 [rad].
x	<R,DP>	inout	ランベルト投影座標での x 座標 [m].
y	<R,DP>	inout	ランベルト投影座標での y 座標 [m].
lambda0	<R,DP>	in	座標 (x, y) の原点に投影される経度 [rad].
phi0	<R,DP>	in	座標 (x, y) の原点に投影される緯度 [rad].
phi1	<R,DP>	in	ランベルト投影基準緯度 1 [rad].
phi2	<R,DP>	in	ランベルト投影基準緯度 2 [rad].
nopt	<R,DP>	in	Lambert_coe の ncoe.
uopt	<R,DP(0:2)>	in	Lambert_coe の uphi(0:2).
ropt	<R,DP>	in	Lambert_coe の rhophi0.

定義式

ある緯度経度 (ϕ_0, λ_0) を原点としたランベルト投影座標 (x, y) の x, y 座標は球面上における経度 ϕ, λ が一意に投影される. このときの球面上の緯度経度 ϕ, λ と投影座標 x, y には以下の関係がある:

$$x = a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)]$$

$$y = w'_0 - a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)]$$

$$U(\phi) \equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$n \equiv \ln \left[\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1}$$

$$w'_0 \equiv w'(\lambda = \lambda_0, \phi = \phi_0) = a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi_0)} \right]^n$$

である. ここで, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, $-\pi/2 < \phi < \phi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{phi, lambda} = \phi, \lambda, \quad \text{x, y} = x, y, \quad \text{phi0, phi1, phi2, lambda0} = \phi_0, \phi_1, \phi_2, \lambda_0,$$

$$\text{nopt} = n, \quad \text{uopt}(0:2) = U(\phi_0), U(\phi_1), U(\phi_2), \quad \text{rhophi0} = w'_0.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.7 ll2merdis

機能

地球球面上のある 2 点間のメルカトル投影座標での距離をそれぞれの点の緯度, 経度から計算する.

書式

```
result=ll2merdis( lambda1, phi1, lambda2, phi2, lambda0, phi0 )
```

引数

lambda1 <R,DP> in 点 1 の経度 [rad].
 phi1 <R,DP> in 点 1 の緯度 [rad].
 lambda2 <R,DP> in 点 2 の経度 [rad].
 phi2 <R,DP> in 点 2 の緯度 [rad].
 lambda0 <R,DP> in 投影座標原点経度 [rad].
 phi0 <R,DP> in 投影座標原点緯度 [rad].
 戻り値 <R,DP> in 2 点間の距離 [m].

定義式

ある 2 点の緯度, 経度がそれぞれ (ϕ_1, λ_1) , (ϕ_2, λ_2) で与えられているとき, その間のメルカトル投影座標上での座標 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) はそれぞれ

$$x_1 = a(\lambda_1 - \lambda_0), \quad x_2 = a(\lambda_2 - \lambda_0),$$

$$y_1 = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\},$$

$$y_2 = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}$$

で与えられる. a は地球の半径である. したがって, これら 2 点間の距離 L は

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{phi1, lambda1} = \phi_1, \lambda_1, \quad \text{phi2, lambda2} = \phi_2, \lambda_2, \quad \text{phi0, lambda0} = \phi_0, \lambda_0.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.8 ll2radi

機能

地球球面上のある 2 点間の球面上での距離をそれぞれの点の緯度, 経度から計算する.

書式

```
result=ll2radi( lon1, lat1, lon2, lat2, [forcef] )
```

引数

lon0	<R,DP>	in	点 1 の経度 [rad].
lat0	<R,DP>	in	点 1 の緯度 [rad].
lon0	<R,DP>	in	点 2 の経度 [rad].
lat0	<R,DP>	in	点 2 の緯度 [rad].
forcef	<L>	in	数値誤差を丸めるオプション (後述).
戻り値	<R,DP>	in	2 点間の距離 [m].

定義式

ある 2 点の緯度, 経度がそれぞれ (ϕ_1, λ_1) , (ϕ_2, λ_2) で与えられているとき, その間の球面上の距離 L は

$$L = R \arccos [\sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)]$$

で与えられる. R は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{lat1, lon1} = \phi_1, \lambda_1, \quad \text{lat2, lon2} = \phi_2, \lambda_2.$$

備考

- 定義式の証明は [5.3.1](#) 参照.
- `forcef` は上式の計算において, 引数で与えられた緯度経度の差が小さい場合, 数値誤差で `arccos` 関数の引数が -1 から 1 より大きな絶対値となることがある. その場合, `forcef = .true.` を設定すると絶対値が 1 となるように調節される. デフォルトは `forcef = .false.` で調節せずにエラーとして関数が終了するようになっている.

3.8.9 ll2rt

機能

地球球面上のある緯度, 経度を原点とした極座標系を考えたとき, そこから離れた任意の別の点の緯度経度を極座標系の平面に投影させる (正距方位図法の変換).

書式

```
call ll2rt( lon0, lat0, lon1, lat1, r, theta )
```

引数

lon0	<R,DP>	in	極座標系原点での経度 [rad].
lat0	<R,DP>	in	極座標系原点での緯度 [rad].
lon1	<R,DP>	in	極座標系点での経度 [rad].
lat1	<R,DP>	in	極座標系点での緯度 [rad].
r	<R,DP>	inout	極座標系の動径方向距離 [m].
theta	<R,DP>	inout	極座標系の同位角方向角度 [rad].

定義式

ある緯度, 経度 (ϕ_0, λ_0) を原点とした極座標系 (r, θ) を考える. このとき, 緯度, 経度 (ϕ_1, λ_1) に対応する極座標上の点 (r, θ) は

$$r = R \arccos [\sin \phi_1 \sin \phi_0 + \cos \phi_1 \cos \phi_0 \cos (\lambda_1 - \lambda_0)],$$

$$\theta = \arctan \left[\frac{\sin \phi_1 \cos \phi_0 - \cos \phi_1 \sin \phi_0 \cos (\lambda_1 - \lambda_0)}{\cos \phi_1 \sin (\lambda_1 - \lambda_0)} \right]$$

である. ここで, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲をとる. また, R は地球の半径である. これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$r, \theta = r, \theta, \quad \text{lat0, lon0} = \phi_0, \lambda_0, \quad \text{lat1, lon1} = \phi_1, \lambda_1.$$

備考

- 定義式の証明は [5.3.1](#) 参照.
- 定義される極座標系は動径方向について直線ではなく, 球面上の円弧の距離として定義される. また, 同位角方向については, 原点を球の接平面とした平面上に投影したときの角度で定義され, 極座標の原点を通る, 球の子午面上の点が $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ となるように定義されている. いわゆる, 正距方位図法による平面への投影を行っている.

3.8.10 lon2merx

機能

地球球面上のある緯度, 経度を原点としたメルカトル投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき, 与えられた経度が投影される投影座標 x を求める.

書式

```
result=lon2merx( lam, lam0 )
```

引数

lam	<R,DP>	in	メルカトル投影される経度 [rad].
lam0	<R,DP>	in	メルカトル投影の基準経度 [rad].
戻り値	<R,DP>	out	経度 lam が投影された座標 x [m].

定義式

球面上における経度 λ をある経度 (λ_0) を原点としたメルカトル投影座標 (x, y) に投影したとき, その x 座標は

$$x = a(\lambda - \lambda_0).$$

ここで, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$x = x, \quad \text{lam0} = \lambda_0, \quad \text{lon2merx} = \lambda.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.11 rt2ll

機能

地球球面上のある緯度, 経度を原点とした極座標系を考えたとき, その極座標系で表される点の緯度と経度を計算する.

書式

```
call rt2ll( r, theta, lon0, lat0, lon, lat )
```

引数

r	<R,DP>	in	極座標系の動径方向距離 [m].
theta	<R,DP>	in	極座標系の同位角方向角度 [rad].
lon0	<R,DP>	in	極座標系原点での経度 [rad].
lat0	<R,DP>	in	極座標系原点での緯度 [rad].
lon	<R,DP>	inout	極座標系点での経度 [rad].
lat	<R,DP>	inout	極座標系点での緯度 [rad].

定義式

ある緯度, 経度 (ϕ_0, λ_0) を原点とした極座標系 (r, θ) を考える. このとき, 極座標上の点 (r_0, θ_0) に対応する緯度, 経度 (ϕ_x, λ_x) は

$$\phi_x = \arcsin \left[\sin \phi_0 \cos \frac{r_0}{R} + \cos \phi_0 \sin \frac{r_0}{R} \sin \theta_0 \right], \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_x = \lambda_0 \pm \arcsin \left[\pm \frac{\cos \theta_0}{\cos \phi_x} \sin \frac{r_0}{R} \right]$$

である。ここで、2 つ目の式は $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta_0 \leq 2\pi$ のとき正号, それ以外では負号となる。また, R は地球の半径である。

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる。

$$r, \text{theta} = r_0, \theta_0, \quad \text{lat0}, \text{lon0} = \phi_0, \lambda_0, \quad \text{lat}, \text{lon} = \phi_x, \lambda_x.$$

備考

- 定義式の証明は [5.3.1](#) 参照。
- 定義される極座標系は動径方向について直線ではなく, 球面上の円弧の距離として定義される。また, 同位角方向については, 原点を球の接平面とした平面上に投影したときの角度で定義され, 極座標の原点を通る, 球の子午面上の点が $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ となるように定義されている。いわゆる正距方位図法による平面への投影を行っている。

3.8.12 sph_ll2rt

機能

地球球面上のある緯度, 経度を極とした球座標系を考えたとき, その極軸からの距離と方位角を計算する。

書式

```
call sph_ll2rt( lonc, latc, lon, lat, r, theta )
```

引数

lonc	<R,DP>	in	球座標系原点での経度 [rad].
latc	<R,DP>	in	球座標系原点での緯度 [rad].
lon	<R,DP>	in	球座標系の点での経度 [rad].
lat	<R,DP>	in	球座標系の点での緯度 [rad].
r	<R,DP>	out	球座標系の極軸からの距離 [m].
theta	<R,DP>	out	球座標系の方位角 [rad].

定義式

ある緯度, 経度 (ϕ_c, λ_c) を原点とした球座標系上の極軸からの距離 r および方位角 θ を考える。このとき, 緯度, 経度 (ϕ, λ) に対応する球座標上の点 (r, θ) は

$$r = R \sqrt{1 - [\cos(\lambda - \lambda_c) \cos \phi_c \cos \phi + \sin \phi_c \sin \phi]^2},$$

$$\theta = \arctan \left[\frac{\cos \phi_c \sin \phi - \cos (\lambda - \lambda_c) \sin \phi_c \cos \phi}{\sin (\lambda - \lambda_c) \cos \phi} \right].$$

である。ここで、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲をとる。また、 R は地球の半径である。
これらの式について、実際の引数は以下のような対応関係となる。

$$r, \text{theta} = r, \theta, \quad \text{latc}, \text{lonc} = \phi_c, \lambda_c, \quad \text{lat}, \text{lon} = \phi, \lambda.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.
- 方位角は北極方向が $\pi/2$ となるように計算される.

3.8.13 sph_rt2ll

機能

地球球面上のある緯度、経度を極とした球座標系を考えたとき、その極軸からの距離と方位角からその位置の緯度経度を計算する。

書式

```
call sph_rt2ll( r, theta, lonc, latc, lon, lat )
```

引数

r	<R,DP>	in	球座標系の極軸からの距離 [m].
theta	<R,DP>	in	球座標系の方位角 [rad].
lonc	<R,DP>	in	球座標系原点での経度 [rad].
latc	<R,DP>	in	球座標系原点での緯度 [rad].
lon	<R,DP>	out	球座標系の点での経度 [rad].
lat	<R,DP>	out	球座標系の点での緯度 [rad].

定義式

ある緯度、経度 (ϕ_c, λ_c) を原点とした球座標系上の極軸からの距離 r および方位角 θ を考える。このとき、点 (r, θ) に対応する緯度、経度 (ϕ, λ) は

$$\phi = \arcsin \left[\frac{r}{\rho} \cos \phi_c \sin \theta + \sin \phi_c \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\rho} \right)^2} \right],$$

$$\lambda = \arcsin \left\{ \frac{1}{\cos \phi} \left[\frac{r}{\rho} (\cos \lambda_c \cos \theta - \sin \lambda_c \sin \phi_c \sin \theta) + \sin \lambda_c \cos \phi_c \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\rho} \right)^2} \right] \right\},$$

かつ

$$\lambda = \arccos \left\{ \frac{1}{\cos \phi} \left[\frac{r}{\rho} (-\sin \lambda_c \cos \theta - \cos \lambda_c \sin \phi_c \sin \theta) + \cos \lambda_c \cos \phi_c \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \right] \right\}.$$

ここで, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲をとる. また, R は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$r, \text{theta} = r, \theta, \quad \text{latc}, \text{lonc} = \phi_c, \lambda_c, \quad \text{lat}, \text{lon} = \phi, \lambda.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.
- 方位角は北極方向が $\pi/2$ となるように計算される.

3.8.14 sph_vec_ll2rt

機能

地球球面上の緯度経度座標で定義されたベクトル成分を, ある緯度, 経度を極とした球座標系の極軸からの距離, 方位角, 鉛直方向のベクトル成分に変換する.

書式

```
call sph_vec_ll2rt( lambda_c, phi_c, lambda, phi, ulambda, vphi, wrho,
& & ur, vt, wz, r_opt, theta_opt )
```

引数

lambda_c	<R,DP>	in	球座標系原点での経度 [rad].
phi_c	<R,DP>	in	球座標系原点での緯度 [rad].
r	<R,DP>	in	(r, theta) での経度 [rad].
theta	<R,DP>	in	(r, theta) での緯度 [rad].
ulambda	<R,DP>	in	経度 (東西) 方向のベクトル成分 [任意].
vphi	<R,DP>	in	緯度 (南北) 方向のベクトル成分 [任意].
wrho	<R,DP>	in	鉛直方向のベクトル成分 [任意].
ur	<R,DP>	out	r 方向のベクトル成分 [任意].
vt	<R,DP>	out	theta 方向のベクトル成分 [任意].
wz	<R,DP>	out	r-theta の右手系直交方向のベクトル成分 [任意].
[lambda_opt]	<R,DP>	in	球座標系の極軸からの距離 [m].
[phi_opt]	<R,DP>	in	球座標系の方位角 [rad].

定義式

ある緯度, 経度 (ϕ_c, λ_c) を極とした球座標系上の極軸からの距離 r および方位角 θ を考える. このとき, 点 (r, θ) の位置座標の関数である基底ベクトル (e_r, e_θ, e_z) 方向のベクトル成分 (u_r, v_θ, w_z) を, その点の緯度, 経度 (ϕ, λ) で定義される東西, 南北, 鉛直ベクトル成分 $(u_\lambda, v_\phi, w_\rho)$ に変換する. その定義式は

$$\begin{aligned}
u_\lambda &= u_\lambda [-\sin \theta \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \theta \sin \phi_c \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad + v_\phi [\sin \phi \sin \theta \sin (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \cos \theta \sin \phi_c \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \phi \cos \phi_c \cos \theta] \\
&\quad + w_\rho [-\cos \phi \sin \theta \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi \cos \theta \sin \phi_c \cos (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \cos \phi_c \cos \theta], \\
v_\phi &= u_\lambda [\cos \theta \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi_c \sin \theta \cos \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) + \cos \phi_c \sin \Phi \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad + v_\phi [-\sin \phi \cos \theta \cos \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \sin \phi_c \sin \theta \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + \cos \phi \cos \phi_c \sin \theta \cos \Phi + \sin \phi \cos \phi_c \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi \sin \phi_c \sin \Phi] \\
&\quad + w_\rho [\cos \phi \cos \theta \cos \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi \sin \phi_c \sin \theta \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + \sin \phi \cos \phi_c \sin \theta \cos \Phi - \cos \phi \cos \phi_c \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) - \sin \phi \sin \phi_c \sin \Phi], \\
w_z &= u_\lambda [\cos \theta \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi_c \sin \theta \sin \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi_c \cos \Phi \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad + v_\phi [-\sin \phi \cos \theta \sin \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \sin \phi_c \sin \theta \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + \cos \phi \cos \phi_c \sin \theta \sin \Phi - \sin \phi \cos \phi_c \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \phi \sin \phi_c \cos \Phi] \\
&\quad + w_\rho [\cos \phi \cos \theta \sin \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi \sin \phi_c \sin \theta \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + \sin \phi \cos \phi_c \sin \theta \sin \Phi + \cos \phi \cos \phi_c \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \sin \phi_c \cos \Phi].
\end{aligned}$$

ここで, $\sin \Phi \equiv r/R$, R は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\begin{aligned}
r, \theta &= r, \theta, \quad \lambda_c, \phi_c = \lambda_c, \phi_c, \quad \lambda, \phi = \lambda, \phi, \\
u_\lambda, v_\phi, w_\rho &= u_\lambda, v_\phi, w_\rho, \quad u_r, v_\theta, w_z = u_r, v_\theta, w_z.
\end{aligned}$$

備考

- 定義式の証明は??参照.
- 方位角は北極方向が $\pi/2$ となるように計算される.

3.8.15 sph_vec_rt2ll

機能

ある緯度, 経度を極とした球座標系の極軸からの距離, 方位角, 鉛直方向のベクトル成分を, 地球球面上の緯度経度座標で定義されたベクトル成分に変換する.

書式

```
call sph_vec_rt2ll( lambda_c, phi_c, r, theta, ur, vt, wz, && ulambda,
vphi, wrho, lambda_opt, phi_opt )
```

引数

<code>lambda_c</code>	<R,DP>	in	球座標系原点での経度 [rad].
<code>phi_c</code>	<R,DP>	in	球座標系原点での緯度 [rad].
<code>r</code>	<R,DP>	in	球座標系の極軸からの距離 [m].
<code>theta</code>	<R,DP>	in	球座標系の方位角 [rad].
<code>ur</code>	<R,DP>	in	<code>r</code> 方向のベクトル成分 [任意].
<code>vt</code>	<R,DP>	in	<code>theta</code> 方向のベクトル成分 [任意].
<code>wz</code>	<R,DP>	in	<code>r-theta</code> の右手系直交方向のベクトル成分 [任意].
<code>ulambda</code>	<R,DP>	out	経度 (東西) 方向のベクトル成分 [任意].
<code>vphi</code>	<R,DP>	out	緯度 (南北) 方向のベクトル成分 [任意].
<code>wrho</code>	<R,DP>	out	鉛直方向のベクトル成分 [任意].
<code>[lambda_opt]</code>	<R,DP>	in	(<code>r</code> , <code>theta</code>) での経度 [rad].
<code>[phi_opt]</code>	<R,DP>	in	(<code>r</code> , <code>theta</code>) での緯度 [rad].

定義式

ある緯度, 経度 (ϕ_c, λ_c) を極とした球座標系上の極軸からの距離 r および方位角 θ を考える. このとき, 点 (r, θ) の位置座標の関数である基底ベクトル (e_r, e_θ, e_z) 方向のベクトル成分 (u_r, v_θ, w_z) を, その点の緯度, 経度 (ϕ, λ) で定義される東西, 南北, 鉛直ベクトル成分 ($u_\lambda, v_\phi, w_\rho$) に変換する. その定義式は

$$\begin{aligned}
u_\lambda &= -v_\theta [\sin \theta \cos (\lambda - \lambda_c) - \cos \theta \sin \phi_c \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad + u_r [\cos \Phi \cos \theta \cos (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \sin \theta \sin \phi_c + \sin \Phi \cos \phi_c) \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad - w_R [-\sin \Phi \cos \theta \cos (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \cos \phi_c - \sin \Phi \sin \theta \sin \phi_c) \sin (\lambda - \lambda_c)], \\
v_\phi &= v_\theta [\sin \theta \sin \phi \sin (\lambda - \lambda_c) + \cos \theta \sin \phi_c \sin \phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \theta \cos \phi_c \cos \phi] \\
&\quad - u_r [\cos \Phi \cos \theta \sin \phi \sin (\lambda - \lambda_c) - (\cos \Phi \sin \theta \sin \phi_c + \sin \Phi \cos \phi_c) \sin \phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \theta \cos \phi_c) \cos \phi] \\
&\quad - w_R [\sin \Phi \cos \theta \sin \phi \sin (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \cos \phi_c - \sin \Phi \sin \theta \sin \phi_c) \sin \phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad - (\sin \Phi \sin \theta \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c) \cos \phi], \\
w_\rho &= v_\theta [-\sin \theta \cos \phi \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \theta \sin \phi_c \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \theta \cos \phi_c \sin \phi] \\
&\quad - u_r [-\cos \Phi \cos \theta \cos \phi \sin (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \sin \theta \sin \phi_c + \sin \Phi \cos \phi_c) \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \theta \cos \phi_c) \sin \phi] \\
&\quad + w_R [\sin \Phi \cos \theta \cos \phi \sin (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \cos \phi_c - \sin \Phi \sin \theta \sin \phi_c) \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + (\sin \Phi \sin \theta \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c) \sin \phi].
\end{aligned}$$

ここで, $\sin \Phi \equiv r/R$, R は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\mathbf{r}, \mathbf{theta} = r, \theta, \quad \mathbf{lambda_c}, \mathbf{phi_c} = \phi_c, \lambda_c, \quad \mathbf{lambda_opt}, \mathbf{phi_opt} = \lambda, \phi,$$

$$\mathbf{ulambda}, \mathbf{vphi}, \mathbf{wrho} = u_\lambda, v_\phi, w_\rho, \quad \mathbf{ur}, \mathbf{vt}, \mathbf{wz} = u_r, v_\theta, w_z.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.
- 方位角は北極方向が $\pi/2$ となるように計算される.

3.8.16 vec2lam

機能

球面上での緯度経度座標で定義された任意の水平ベクトル 2 成分をランベルト投影座標 (x, y) 上での水平ベクトル 2 成分に正変換あるいは逆変換する.

書式

```
call vec2lam( lambda0, phi1, phi2, lambda, phi, &
  ui, vi, uo, vo, conv_flag, [undef] )
```

引数

lambda0	<R,DP>	in	座標 (x, y) の原点に投影される経度
phi1	<R,DP>	in	ランベルト投影基準緯度 1 [rad].
phi2	<R,DP>	in	ランベルト投影基準緯度 2 [rad].
phi	<R,DP(:, :)>	in	ベクトルが定義されている緯度 [rad].
lambda	<R,DP(size(phi,1),size(phi,2))>	in	ベクトルが定義されている経度 [rad].
ui	<R,DP(size(phi,1),size(phi,2))>	in	ベクトルの変換前の東西あるいは投影座標 x 方向成分.
vi	<R,DP(size(phi,1),size(phi,2))>	in	ベクトルの変換前の南北あるいは投影座標 y 方向成分.
uo	<R,DP(size(phi,1),size(phi,2))>	inout	ベクトルの変換後の東西あるいは投影座標 x 方向成分.
vo	<R,DP(size(phi,1),size(phi,2))>	inout	ベクトルの変換後の南北あるいは投影座標 y 方向成分.
conv_flag	<C(5)>	in	変換の方向 (後述).
undef	<R,DP>	in	未定義値.

定義式

ある緯度, 経度がそれぞれ (ϕ, λ) で与えられているとき, その点において水平ベクトルが定義されているとする. このベクトルの緯度経度方向のベクトル成分 (v_ϕ, u_λ)

とランベルト投影座標上 (x, y) での同じベクトルの (x, y) 成分 (u_L, v_L) は

$$\begin{aligned} u_L &= u_\lambda \cos [n(\lambda - \lambda_0)] - v_\phi \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v_L &= u_\lambda \sin [n(\lambda - \lambda_0)] + v_\phi \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\ u_\lambda &= u_L \cos [n(\lambda - \lambda_0)] + v_L \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v_\phi &= -u_L \sin [n(\lambda - \lambda_0)] + v_L \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ の範囲をとる。また、 a は地球の半径である。

これらの式について、実際の引数は以下のような対応関係となる。

$$\text{phi} = \phi, \quad \text{ui}, \text{vi} = u, v (u_\lambda, v_\phi), \quad \text{uo}, \text{vo} = u_\lambda, v_\phi (u, v).$$

$$\text{phi1}, \text{phi2}, \text{lambda0} = \phi_1, \phi_2, \lambda_0.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.
- 引数 `conv_flag` は変換の方向を表し、'112xy' と指定されると、球面で定義されたベクトル成分を投影面で定義されたベクトル成分に変換する。'xy211' と指定されると、投影面で定義されたベクトル成分を球面で定義されたベクトル成分に変換する。
- 本ルーチンは全て緯度経度を独立変数として変換処理を行う。つまり、投影面上で定義されている場合でも、その座標は緯度経度で表現されなければならないということである。もし、投影面上でデカルト座標で表現されている場合は、`xy2lam11` を用いて、緯度経度に変換しておく必要がある。
- 本ルーチンの処理前後でベクトルの絶対値は不変である。また、ベクトルの単位は任意である。

3.8.17 x2merlon

機能

地球球面上のある緯度、経度を原点としたメルカトル投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき、与えられた x 座標に投影される経度を求める。

書式

```
result=x2merlon( x, lam0 )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP>	in	メルカトル投影座標での x 座標 [m].
<code>lam0</code>	<R,DP>	in	メルカトル投影の基準経度 [rad].
戻り値	<R,DP>	out	座標 x に投影される経度 [rad].

定義式

ある経度 (λ_0) を原点としたメルカトル投影座標 (x, y) の x 座標は球面上における経度 λ が一意に投影される. このときの投影座標 x と球面上の経度 λ には以下の関係がある:

$$\lambda = \frac{x}{a} + \lambda_0.$$

ここで, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$x = x, \quad lam0 = \lambda_0, \quad x2merlon = \lambda.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.18 xy2lamll

機能

球面上のある緯度, 経度を原点としたランベルト投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき, 与えられた x, y 座標に投影される経度, 緯度を求める.

書式

```
call xy2lamll( x, y, lambda, phi, lambda0, phi0, phi1, phi2, &
  [nopt], [uopt], [ropt] )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP>	in	ランベルト投影座標での x 座標 [m].
<code>y</code>	<R,DP>	in	ランベルト投影座標での y 座標 [m].
<code>lambda</code>	<R,DP>	inout	座標 (x, y) に投影される経度 [rad].
<code>phi</code>	<R,DP>	inout	座標 (x, y) に投影される緯度 [rad].
<code>lambda0</code>	<R,DP>	in	座標 (x, y) の原点に投影される経度 [rad].
<code>phi0</code>	<R,DP>	in	座標 (x, y) の原点に投影される緯度 [rad].
<code>phi1</code>	<R,DP>	in	ランベルト投影基準緯度 1 [rad].
<code>phi2</code>	<R,DP>	in	ランベルト投影基準緯度 2 [rad].
<code>nopt</code>	<R,DP>	in	Lambert_coe の ncoe.
<code>uopt</code>	<R,DP(0:2)>	in	Lambert_coe の uphi(0:2).
<code>ropt</code>	<R,DP>	in	Lambert_coe の rhophi0.

定義式

ある緯度経度 (ϕ_0, λ_0) を原点としたランベルト投影座標 (x, y) の x, y 座標は球面上における経度 ϕ, λ が一意に投影される. このときの投影座標 x, y と球面上の緯度経度 ϕ, λ には以下の関係がある:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{n} \arctan \left(\frac{-x'}{y' - w'_0} \right)$$

$$\phi = 2 \arctan \left\{ \left[\frac{a \cos \phi_1}{n \sqrt{x'^2 + (y' - w'_0)^2}} \right]^{1/n} U(\phi_1) \right\} - \frac{\pi}{2}$$

$$U(\phi) \equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$n \equiv \ln \left[\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1}$$

$$w'_0 \equiv w'(\lambda = \lambda_0, \phi = \phi_0) = a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi_0)} \right]^n$$

である. ここで, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{phi, lambda} = \phi, \lambda, \quad \text{x, y} = x, y, \quad \text{phi0, phi1, phi2, lambda0} = \phi_0, \phi_1, \phi_2, \lambda_0,$$

$$\text{nopt} = n, \quad \text{uopt}(0:2) = U(\phi_0), U(\phi_1), U(\phi_2), \quad \text{rhopi0} = w'_0.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.19 y2merlat

機能

地球球面上のある緯度, 経度を原点としたメルカトル投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき, 与えられた y 座標に投影される経度を求める.

書式

```
result=y2merlat( y, phi0 )
```

引数

y	<R,DP>	in	メルカトル投影座標での y 座標 [m].
phi0	<R,DP>	in	メルカトル投影の基準緯度 [rad].
戻り値	<R,DP>	out	座標 x に投影される経度 [rad].

定義式

ある緯度 (ϕ_0) を原点としたメルカトル投影座標 (x, y) の y 座標は球面上における経度 ϕ が一意に投影される. このときの投影座標 y と球面上の緯度 ϕ には以下の関係がある:

$$\phi = 2 \arctan \left\{ \left[\exp \left(\frac{y}{a} \right) \right] \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\} - \frac{\pi}{2}.$$

ここで, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である. これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$y = y, \text{ phi0} = \phi_0, \text{ y2merlat} = \phi.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.9 math_const

数学的普遍定数集. 現在は以下の表のように与えられている.

変数名	型	設定値	変数の意味
pi	<R>	3.14159265	円周率
img	<CP>	(0.0,1.0)	虚数単位
pi_dp	<DP>	3.14159265	円周率
img_cdp	<CDP>	(0.0,1.0)	虚数単位

以下は `parameter` 属性のついていない準定数である.

3.9.1 rotate_array

機能

データ数 2,3,5,7 の回転行列を計算する。

書式

```
call rotate_array( )
```

引数

なし. `math_const` において設定されている準定数 `omega2`, `omega3`, `omega5`, `omega7` が更新される.

変数名	型	属性	変数の意味
romega2	<CP(0:1,0:1)>	save	データ 2 の FFT 用回転行列 (正変換用)
romega3	<CP(0:2,0:2)>	save	データ 3 の FFT 用回転行列 (正変換用)
romega5	<CP(0:4,0:4)>	save	データ 5 の FFT 用回転行列 (正変換用)
romega7	<CP(0:6,0:6)>	save	データ 7 の FFT 用回転行列 (正変換用)
iomega2	<CP(0:1,0:1)>	save	データ 2 の FFT 用回転行列 (逆変換用)
iomega3	<CP(0:2,0:2)>	save	データ 3 の FFT 用回転行列 (逆変換用)
iomega5	<CP(0:4,0:4)>	save	データ 5 の FFT 用回転行列 (逆変換用)
iomega7	<CP(0:6,0:6)>	save	データ 7 の FFT 用回転行列 (逆変換用)
romega2_cdp	<CDP(0:1,0:1)>	save	データ 2 の FFT 用回転行列 (正変換用)
romega3_cdp	<CDP(0:2,0:2)>	save	データ 3 の FFT 用回転行列 (正変換用)
romega5_cdp	<CDP(0:4,0:4)>	save	データ 5 の FFT 用回転行列 (正変換用)
romega7_cdp	<CDP(0:6,0:6)>	save	データ 7 の FFT 用回転行列 (正変換用)
iomega2_cdp	<CDP(0:1,0:1)>	save	データ 2 の FFT 用回転行列 (逆変換用)
iomega3_cdp	<CDP(0:2,0:2)>	save	データ 3 の FFT 用回転行列 (逆変換用)
iomega5_cdp	<CDP(0:4,0:4)>	save	データ 5 の FFT 用回転行列 (逆変換用)
iomega7_cdp	<CDP(0:6,0:6)>	save	データ 7 の FFT 用回転行列 (逆変換用)

定義式

3.5.6 の定義式において、 $N = 2, 3, 5, 7$ で計算している。

備考

特になし。

3.10 matrix_calc

単純な行列演算, 連立代数方程式の求解, 固有値・固有ベクトル計算用のルーチン集. 各ルーチンの詳細な計算方法については, ?? 参照.

3.10.1 Gau_Se

機能

ガウスザイデル法による連立 1 次方程式の求解を行うルーチン.

書式

```
call Gau_Se( a, b, eps, x )
```

引数

b	<R(:)>	inout	ベクトルの成分 (後述).
a	<R(size(b),size(b))>	inout	行列 (後述).
eps	<R>	in	収束条件値 (後述).
x	<R(size(b))>	inout	求めたいベクトル (後述).

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(i,j), \quad x_j : \mathbf{x}(j), \quad b_i : \mathbf{b}(i)$$

である. ガウスザイデル法による計算方法の詳細は??参照.

備考

- 引数 eps は各配列の反復前後の相対誤差を表し, この値の最大値が eps 以下になったときに反復計算を終了する.

3.10.2 Jacobi_algebra

機能

ヤコビ法による連立 1 次方程式の求解を行うルーチン.

書式

```
call Jacobi_algebra( a, b, eps, x )
```

引数

b	<R(:)>	inout	ベクトルの成分 (後述).
a	<R(size(b),size(b))>	inout	行列 (後述).
eps	<R>	in	収束条件値 (後述).
x	<R(size(b))>	inout	求めたいベクトル (後述).

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(i,j), \quad x_j : \mathbf{x}(j), \quad b_i : \mathbf{b}(i)$$

である. ヤコビ法による計算方法の詳細は??参照.

備考

- 引数 `eps` は各配列の反復前後の相対誤差を表し, この値の最大値が `eps` 以下になったときに反復計算を終了する.

3.10.3 Jacobi_eigen

機能

ヤコビ法を用いて任意の実対称行列の全固有値を求めるルーチン.

書式

```
call Jacobi_eigen( a, lambda, [eps] )
```

引数

a	<R(:, :)>	in	固有値を求める行列 (後述).
lambda	<R(size(a,1))>	inout	固有値 (後述).
eps	<R>	in	反復の収束判条件 (後述).

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル x_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

という関係を満たす未知数 λ を求める. ここで, λ の値は行列の次元数個ある. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : a(i, j), \quad \lambda : \text{lambda}(k)$$

である. k 番目の固有値をここでは $\text{lambda}(k)$ とした. ヤコビ法による計算方法の詳細は??を参照.

備考

- `eps` は反復計算の収束判定条件であり, 1 回の反復計算前後での絶対誤差の最大値が `eps` 以下になったときに計算を終了する.

3.10.4 LU_devs

機能

部分ピボットつき LU 分解を行うルーチン.

書式

```
call LU_devs( a, b, x, itermax )
```

引数

<code>b</code>	<R(:)>	<code>inout</code>	ベクトルの成分 (後述).
<code>a</code>	<R(size(b),size(b))>	<code>inout</code>	行列 (後述).
<code>x</code>	<R(size(b))>	<code>inout</code>	求めたいベクトル (後述).
<code>itermax</code>	<I>	<code>in</code>	反復改良の回数.

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : a(i, j), \quad x_j : x(j), \quad b_i : b(i)$$

である. 詳細な計算は??参照.

備考

特になし.

3.10.5 SOR_Gau_Sei

機能

SOR を用いてガウスザイデル法による連立 1 次方程式の求解を行うルーチン.

書式

```
call SOR_Gau_Sei( a, b, eps, accel, x )
```

引数

b	<R(:)>	inout	ベクトルの成分 (後述).
a	<R(size(b),size(b))>	inout	行列 (後述).
eps	<R>	in	収束条件値 (後述).
accel	<R>	in	SOR の加速係数 (後述).
x	<R(size(b))>	inout	求めたいベクトル (後述).

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : a(i,j), \quad x_j : x(j), \quad b_i : b(i)$$

である. SOR つきガウスザイデル法による計算方法の詳細は??参照.

備考

- 引数 eps は各配列の反復前後の相対誤差を表し, この値の最大値が eps 以下になったときに反復計算を終了する.
- 数学上, 加速係数は 2 未満にしなければ安定計算ができない. 本ルーチンでは, 2 以上の値が設定された場合, エラーとなるようにしている.

3.10.6 SOR_Jacobi_algebra

機能

SOR を用いてヤコビ法による連立 1 次方程式の求解を行うルーチン.

書式

```
call SOR_Jacobi_algebra( a, b, eps, accel, x )
```

引数

b	<R(:)>	inout	ベクトルの成分 (後述).
a	<R(size(b),size(b))>	inout	行列 (後述).
eps	<R>	in	収束条件値 (後述).
accel	<R>	in	SOR の加速係数 (後述).
x	<R(size(b))>	inout	求めたいベクトル (後述).

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(i,j), \quad x_j : \mathbf{x}(j), \quad b_i : \mathbf{b}(i)$$

である. SOR つきヤコビ法による計算方法の詳細は??参照.

備考

- 引数 eps は各配列の反復前後の相対誤差を表し, この値の最大値が eps 以下になったときに反復計算を終了する.
- 数学上, 加速係数は 2 未満にしなければ安定計算ができない. 本ルーチンでは, 2 以上の値が設定された場合, エラーとなるようにしている.

3.10.7 determ_2d

機能

2 次行列の行列式を返す.

書式

```
result = determ_2d( a )
```

引数

a <I,R(2,2)> in 計算する行列.

定義式

2 次元行列 A の行列式 $|A|$ は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

である.

備考

特になし.

3.10.8 eigenvalue_power

機能

べき乗法を用いて行列の最大固有値とその固有値に対応する固有ベクトルを求めるルーチン.

書式

```
call eigenvalue_power( a, eps, lambda, lv )
```

引数

lv	<R(:)>	inout	固有ベクトル (後述).
a	<R(size(lv),size(lv))>	inout	固有値を求める行列 (後述).
eps	<R>	in	反復の収束判条件 (後述).
lambda	<R>	inout	固有値 (後述).

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル x_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

という関係を満たす未知数 λ を求める. ここで, λ の値は (縮退している場合を除いて,) 行列の次元数個あるので, そのうちの絶対値が最大となる固有値に対応する. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : a(i, j), \quad \lambda : \text{lambda}, \quad x_i : \text{lv}(i)$$

である. べき乗法による計算方法の詳細は??を参照.

備考

特になし.

3.10.9 fp_gauss

機能

完全ピボットつきガウスの消去法を行うルーチン.

書式

```
call fp_gauss( a, b, x )
```

引数

b	<R,DP(:)>	inout	ベクトルの成分.
a	<R,DP(size(b),size(b))>	inout	行列.
x	<R,DP(size(b))>	inout	求めたいベクトル.

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(i,j), \quad x_j : \mathbf{x}(j), \quad b_i : \mathbf{b}(i)$$

である. ガウスの消去法の詳細な計算方法は?? 参照.

備考

特になし.

3.10.10 gauss

機能

部分ピボットつきガウスの消去法を行うルーチン.

書式

```
call gauss( a, b, x )
```

引数

b	<R,DP(:)>	inout	ベクトルの成分.
a	<R,DP(size(b),size(b))>	inout	行列.
x	<R,DP(size(b))>	inout	求めたいベクトル.

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(i,j), \quad x_j : \mathbf{x}(j), \quad b_i : \mathbf{b}(i)$$

である. ガウスの消去法の詳細な計算方法は?? 参照.

備考

特になし.

3.10.11 tri_gauss

機能

三重対角行列版ガウスの消去法ルーチン.

書式

```
call tri_gauss( a, b, x )
```

引数

b	<R,DP(:)>	inout	ベクトルの成分.
a	<R,DP(size(b),size(b))>	inout	行列.
x	<R,DP(size(b))>	inout	求めたいベクトル.

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i, \quad \begin{cases} a_{ij} \neq 0, & (j = i - 1, i, i + 1) \\ a_{ij} = 0, & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(i, j), \quad x_j : \mathbf{x}(j), \quad b_i : \mathbf{b}(i)$$

である. 三重対角行列の場合, 3 重ループ内の 2 ループ処理が対角成分とその隣接 2 成分のみの処理で計算できるため, 内側 2 つのループが省略でき, 計算速度が向上する. 単純な見積りでは, 解くべき正方行列が N 次であった場合, ガウスの消去法で必要な計算回数は $O(N^3)$ であったのに対し, 本ルーチンでは $O(N)$ の計算回数で済む. ガウスの消去法の詳細な計算方法は?? 参照.

備考

特になし.

3.10.12 Householder

機能

ハウスホルダー変換 (?? 参照) を用いて, 任意実正方行列をハッセンベルグ行列に変換する.

書式

```
call invert_mat( a, b, [p], [sym_opt] )
```

引数

a	<R(:, :)>	in	任意の実 n 次正方行列.
b	<R(size(a,1),size(a,2))>	inout	得られるヘッセンベルグ行列.
p	<R(size(a,1),size(a,2))>	inout	変換に用いた直交行列 (後述).
sym_opt	<L>	in	対称行列かどうか (後述).

定義式

任意の実行列 A を直交行列 P によるハウスホルダー変換によって、ヘッセンベルグ行列 B に変換する :

$$PAP^{-1} = B.$$

ここで、ヘッセンベルグ行列は上 (下) 三角行列の副対角成分までゼロでない行列 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

である.

備考

- `sym_opt` は変換する行列 `a` が対称行列の場合、`.true.` で指定すると、計算時間が短くなる。このとき、返される行列 `b` は三重対角行列になっている。
- `p` はハウスホルダー変換に用いた直交行列まで出力する。ただし、このオプションを指定すると、直交行列用に別計算を行うので少し計算時間が長くなる。

3.10.13 invert_mat

機能

任意正方行列の逆行列を返す。

書式

```
call invert_mat( a, b )
```

引数

a	<I,R(:, :)>	in	求める行列.
b	<I,R(size(a,1),size(a,1))>	inout	a の逆行列.

定義式

ガウスの消去法を用いて逆行列を計算する。詳細な計算方法は??参照。

備考

特になし。

3.10.14 fp_invert_mat

機能

任意正方行列の逆行列を返す.

書式

```
call fp_invert_mat( a, b )
```

引数

a <I,R(:, :)> in 求める行列.
 b <I,R(size(a,1),size(a,1))> inout a の逆行列.

定義式

完全ピボット付きガウスの消去法を用いて逆行列を計算する.

備考

特になし.

3.10.15 mat_dot

機能

任意行列 (正方でなくてもよい) の行列積を返す.

書式

```
call invert_mat( a, b, c )
```

引数

a <R(:, :)> in $m \times n$ 行列.
 b <R(size(a,2),size(a,1))> in $n \times m$ 行列.
 c <R(size(a,1),size(a,1))> inout 得られる正方行列.

定義式

$m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B の各成分を a_{ij} , b_{ij} とすると, これらの行列積は m 次の正方行列 C (成分, c_{ij}) となる :

$$AB = C : \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = c_{ij}.$$

それぞれ, 引数との対応は以下 :

$$a_{ij} : \mathbf{a}(i, j), \quad b_{ij} : \mathbf{b}(i, j), \quad c_{ij} : \mathbf{c}(i, j).$$

備考

特になし.

3.10.16 QR_method

機能

QR 分解 (?? 参照) を用いて, 任意実正方行列の全固有値と全固有ベクトルを計算する.

書式

```
call invert_mat( a, lam, [p], [eps], [sym_opt] )
```

引数

a	<R(:, :)>	in	任意の実 n 次正方行列.
lam	<R(size(a,1))>	inout	得られる固有値 (後述).
p	<R(size(a,1),size(a,2))>	inout	固有ベクトル (後述).
eps	<R>	in	QR 法における収束判定. デフォルトは 10^{-5} .
sym_opt	<L>	in	対称行列かどうか (後述).

定義式

任意の実行列 A を直交行列 Q と三角行列 R に分解し :

$$A = QR,$$

得られる三角行列の対角成分から固有値を計算する. このとき, 固有ベクトルは変換行列 Q の各列に配置されている. 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると^{*11},

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

という形で得られる. このとき, n は行列 A のランクである. このとき, 変換に用いた直交行列 Q から各固有ベクトルは

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$$

となる. これらは実際のルーチンにおける各引数に関して, 以下のような対応関係になっている.

$$A : a(i, j), \quad \lambda_i : lam(i), \quad \mathbf{q}_i : p(1:n, i).$$

備考

^{*11} 現行のルーチンでは, 固有値が縮退している場合は扱えないことに注意.

引数

a <I,R(:, :)> inout 転置にしたい.

定義式

行列 A_{ij} の転置 $^T A$ は A_{ji} である.

備考

- 引数は `inout` 属性がついているので、引数の結果は転置された値で返される.

3.11 max_min

配列の最大値, 最小値を検索するルーチン集.

3.11.1 max_val_1d

機能

1次元配列の最大値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call max_val_1d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

var	<I,R,DP(:)>	in	1次元の探索配列.
mamn	<I>	inout	最大値が格納されている要素番号.
mamv	<I,R,DP>	inout	varの最大値.
undef	<I,R,DP>	in	未定義値(後述).

定義式

単純に1番目から配列の値を比較する。最大値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.2 max_val_2d

機能

2次元配列の最大値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call max_val_2d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

var	<I,R,DP(:, :)>	in	2次元の探索配列.
mamx	<I>	inout	配列内の最大値に該当する第1配列要素番号.
mamy	<I>	inout	配列内の最大値に該当する第2配列要素番号.
mamv	<I,R,DP>	inout	varの最大値.
undef	<I,R,DP>	in	未定義値(後述).

定義式

単純に1番目から配列の値を比較する。最大値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.3 max_val_3d

機能

3次元配列の最大値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call max_val_3d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

var	<I,R,DP(:,:)>	in	3次元の探索配列.
mamx	<I>	inout	配列内の最大値に該当する第1配列要素番号.
mamy	<I>	inout	配列内の最大値に該当する第2配列要素番号.
mamz	<I>	inout	配列内の最大値に該当する第3配列要素番号.
mamv	<I,R,DP>	inout	varの最大値.
undef	<I,R,DP>	in	未定義値(後述).

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最大値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.4 min_val_1d**機能**

1 次元配列の最小値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call min_val_1d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

var	<I,R,DP(>>	in	1 次元の探索配列.
mamn	<I>	inout	最小値が格納されている要素番号.
mamv	<I,R,DP>	inout	var の最小値 .
undef	<I,R,DP>	in	未定義値 (後述) .

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最小値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.5 min_val_2d**機能**

2 次元配列の最小値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call min_val_2d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

<code>var</code>	<code><I,R,DP(:, :)></code>	<code>in</code>	2次元の探索配列.
<code>mamnx</code>	<code><I></code>	<code>inout</code>	配列内の最小値に該当する第 1 配列要素番号.
<code>mamny</code>	<code><I></code>	<code>inout</code>	配列内の最小値に該当する第 2 配列要素番号.
<code>mamv</code>	<code><I,R,DP></code>	<code>inout</code>	<code>var</code> の最小値 .
<code>undef</code>	<code><I,R,DP></code>	<code>in</code>	未定義値 (後述) .

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最小値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.6 min_val_3d**機能**

3次元配列の最小値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call min_val_3d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

<code>var</code>	<code><I,R,DP(:)></code>	<code>in</code>	3次元の探索配列.
<code>mamnx</code>	<code><I></code>	<code>inout</code>	配列内の最小値に該当する第 1 配列要素番号.
<code>mamny</code>	<code><I></code>	<code>inout</code>	配列内の最小値に該当する第 2 配列要素番号.
<code>mamnz</code>	<code><I></code>	<code>inout</code>	配列内の最小値に該当する第 3 配列要素番号.
<code>mamv</code>	<code><I,R,DP></code>	<code>inout</code>	<code>var</code> の最小値 .
<code>undef</code>	<code><I,R,DP></code>	<code>in</code>	未定義値 (後述) .

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最小値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.12 phys_const

物理学的定数集. 物理学における普遍定数を以下の表のように与える. 出典は理科年表(2008) より^{*12}.

変数名	型	設定値	変数の意味	単位
Me	<R>	5.9736e24	地球の質量	[kg]
g	<R>	9.80665	地球の標準重力加速度	[m s ⁻²]
omega	<R>	7.291893328e-5	地球の自転角速度	[s ⁻¹]
radius	<R>	6.371e6	地球の極半径	[m]
kB	<R>	1.380658e-23	ボルツマン定数	[J K ⁻¹]
Me	<R>	5.9736e24	地球の質量	[kg]
g_dp	<DP>	9.80665	地球の標準重力加速度	[m s ⁻²]
omega_dp	<DP>	7.2918933286303412732d-5	地球の自転角速度	[s ⁻¹]
radius_dp	<DP>	6.371d6	地球の極半径	[m]
kB_dp	<DP>	1.380658d-23	ボルツマン定数	[J K ⁻¹]

3.13 poly_function

直交多項式を計算するルーチン集. ここで定義される直交多項式ルーチンは, 引数の値に応じて interface 宣言されているので, 単精度の引数を与えれば単精度で, 倍精度の引数を与えれば倍精度で計算した結果を返す. また, ここで用いられている多項式の計算定義式の証明は??参照.

3.13.1 chebyshev

機能

0 - n 次のチェビシェフ多項式を計算する.

書式

```
call chebyshev( n, x, che )
```

引数

^{*12}ただし, 地球半径のみ, Tsuboki and Sakakibara (2007) から出典.

n	<I>	in	計算する最高次数.
x	<R,DP(:)>	in	求めたい引数.
che	<R,DP(0:n,size(x))>	inout	チェビシエフ多項式.

定義式

n 次チェビシエフ多項式を $T_n(x)$ とすると,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{(2k)! (n-2k)!} x^{n-2k} (1-x^2)^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.2 gegenbauer

機能

0 - n 次のゲーゲンバウアー多項式を計算する.

書式

```
call gegenbauer( n, x, p, lambda )
```

引数

n	<I>	in	計算する最高次数.
x	<R,DP(:)>	in	求めたい引数.
p	<R,DP(0:n,size(x))>	inout	ゲーゲンバウアー多項式.
lambda	<R>	in	ゲーゲンバウアー係数.

定義式

n 次ゲーゲンバウアー多項式を $C_n^\lambda(x)$ とすると,

$$C_n^\lambda(x) = \frac{2^n \Gamma(n+\lambda)}{n! \Gamma(\lambda)} x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-n-\lambda; \frac{1}{x^2}\right).$$

ここで, F はガウスの超幾何級数である.

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.3 hermite

機能

0 - n 次のエルミート多項式を計算する.

書式

```
call hermite( n, x, p )
```

引数

n	<I>	in	計算する最高次数.
x	<R,DP(:)>	in	求めたい引数.
p	<R,DP(0:n,size(x))>	inout	エルミート多項式.

定義式

n 次エルミート多項式を $H_n(x)$ とすると,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2k-1)!! n!}{(2k)! (n-2k)!} x^{n-2k}.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.4 jacobi_poly

機能

0 - n 次のヤコビ多項式を計算する.

書式

```
call jacobi_poly( n, x, p, alpha, beta )
```

引数

n	<I>	in	計算する最高次数.
x	<R,DP(:)>	in	求めたい引数.
p	<R,DP(0:n,size(x))>	inout	ヤコビ多項式.
alpha	<R>	in	ヤコビ係数 1.
beta	<R>	in	ヤコビ係数 2.

定義式

n 次ヤコビ多項式を $G_n(\alpha, \beta; x)$ とすると,

$$G_n(\alpha, \beta; x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k n!}{r! (n-r)!} \frac{\Gamma(\alpha+n+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+k)} x^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.5 laguerre

機能

$0-n$ 次のラゲール多項式を計算する.

書式

```
call laguerre( n, x, p )
```

引数

n	<I>	in	計算する最高次数.
x	<R,DP(:)>	in	求めたい引数.
p	<R,DP(0:n,size(x))>	inout	ラゲール多項式.

定義式

n 次ラゲール多項式を $L_n(x)$ とすると,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)! k!} x^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.6 legendre

機能

$0-n$ 次のルジャンドル多項式を計算する.

書式

```
call legendre( n, x, p )
```

引数

n	<I>	in	計算する最高次数.
x	<R,DP(:)>	in	求めたい引数.
p	<R,DP(0:n,size(x))>	inout	ルジャンドル多項式.

定義式

n 次ルジャンドル多項式を $P_n(x)$ とすると,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n(n+1)\cdots(n+k)}{k!k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.7 sonine

機能

$0-n$ 次のソニン多項式を計算する.

書式

```
call sonine( n, x, p, lambda )
```

引数

n	<I>	in	計算する最高次数.
x	<R,DP(:)>	in	求めたい引数.
p	<R,DP(0:n,size(x))>	inout	ソニン多項式.
lambda	<R>	in	ソニン係数.

定義式

n 次ソニン多項式を $S_n^\lambda(x)$ とすると,

$$S_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+\lambda)!}{k! (n+\lambda-k)! k!} x^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.14 pv_analy

渦位解析に関する処理を集めたモジュール.

3.14.1 Ertel_PV

機能

エルテルのポテンシャル渦度を計算する.

書式

```
call Ertel_PV( x, y, z, u, v, w, rho, pt, cor, PV, [undef], [sx], [sy],
             [sz] )
```

引数

x	<R(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R(:)>	in	右手系第二座標.
z	<R(:)>	in	右手系第三座標.
u	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	x 方向の速度.
v	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	y 方向の速度.
w	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	z 方向の速度.
rho	<R(size(z))>	in	密度 [kg/m ³].
pt	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	温位 [K].
cor	<R(size(x),size(y))>	in	コリオリパラメータ [/s].
PV	<R(size(x),size(y),size(z))>	inout	エルテルの PV [K/kg s m ²].
undef	<R>	in	未定義値.

定義式

エルテルのポテンシャル渦度を P とすると、その定義は

$$P = \frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho}$$

となる。ここで、 ω_a, θ, ρ はそれぞれ絶対渦度、温位、密度である。

備考

特になし.

3.14.2 HEPV

機能

静力学系における任意の高度座標に基づくエルテルのポテンシャル渦度を計算する。

書式

```
call HEPV( x, y, z, u, v, rhoc, pt, cor, PV, [undef], [sx], [sy] )
```

引数

x	<R(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R(:)>	in	右手系第二座標.
z	<R(:)>	in	右手系第三座標.
u	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	x 方向の速度 [m/s].
v	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	y 方向の速度 [m/s].
rhoc	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	重み付き密度.
pt	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	スカラー保存量 (後述).
cor	<R(size(x),size(y))>	in	コリオリパラメータ [/s].
PV	<R(size(x),size(y),size(z))>	inout	エルテルの PV [K/kg s m ²].
undef	<R>	in	未定義値.
sx	<R(size(x),size(y))>	in	x 方向のスケール因子.
sy	<R(size(x),size(y))>	in	y 方向のスケール因子.

定義式

静力学系におけるエルテルのポテンシャル渦度を P とすると、その定義は幾何座標 z 系での定義から任意の鉛直座標 ζ に変換することで

$$P = \left[\omega_{x,\zeta} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)_{\zeta} + \omega_{y,\zeta} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)_{\zeta} + (\omega_{\zeta} + f) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right) \right] \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)$$

となる。ここで、

$$\omega_{x,\zeta} \equiv -\frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad \omega_{y,\zeta} \equiv \frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

である。添字 ζ はその鉛直座標面で評価される空間勾配であることを意味している。また、 λ は流れについて保存する量であり、一般的には温位が採用される。この物理量に依存して、得られる PV の単位は異なることに注意。これらを各引数と対応させると、

$$x, y, \zeta = x, y, z, \quad u, v = u, v, \quad \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \text{rhoc}, \quad \lambda = \text{pt}, \quad f = \text{cor}, \quad P = \text{PV}$$

である。

備考

- 各引数 $x, y, z, \text{rhoc}, \text{pt}$ の単位はどのような次元でも構わないが、それは PV の次元に影響を与えることに注意する。慣例のエルテル PV の次元を出力したい場合は、下の備考にあるスケール因子と合わせて、 $\text{sx} * x, \text{sy} * y$ が [m] の単位を、 pt が [K] の単位を、 rhoc が [m³/kg] の単位を持てばよい。
- スケール因子 sx, sy は水平方向の座標系を [m] 次元にするための係数である。今、このスケール因子を h_x, h_y とすると、定義されている水平空間座標系 x, y の微小変位 $\delta x, \delta y$ に対して、水平方向の幾何距離 $\delta L_x, \delta L_y$ は以下のような関係をもつ：

$$\delta L_x = h_x \delta x, \quad \delta L_y = h_y \delta y.$$

例えば、 x, y 座標が球面の経度、緯度 (ϕ_1, ϕ_2) であるとする、それぞれの微小幾何距離 $\delta L_x, \delta L_y$ はそれぞれ

$$\delta L_x = a \cos \phi_2 \delta \phi_1, \quad \delta L_y = a \delta \phi_2$$

となり、このときのスケール因子はそれぞれ

$$h_x = a \cos \phi_2, \quad h_y = a$$

となる。ここで、 a は地球の半径である。

- 重み付き密度 rhoc は上述のように $\text{rhoc} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ である。 ζ を幾何座標 z にすると、 rhoc は密度の逆数に一致する。また、圧力座標 p を ζ に採用すると、静力学の関係から rhoc は $-g$ に一致する。よって、使用する場合は事前にこの rhoc を求めておく必要がある。

3.14.3 HQGPV

機能

静力学系における圧力座標および幾何高度座標に基づく準地衡流ポテンシャル渦度を計算する。

書式

```
call HQGPV( x, y, z, phi, t_ref, cor, PV, [undef], [hx], [hy], [rhoc]
)
```

引数

高度座標 (z)	圧力	幾何
診断場 (phi)	ジオポテンシャル [J/kg]	圧力 [Pa]
基本場温度 (t_ref)	温度 [K]	温位 [K]

x	<R(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R(:)>	in	右手系第二座標.
z	<R(:)>	in	右手系第三座標.
phi	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	z に対応する場 (後述).
t_ref	<R(size(z))>	in	基本場温度 (位) [K] (後述).
cor	<R(size(x),size(y))>	in	コリオリパラメータ [/s].
PV	<R(size(x),size(y),size(z))>	inout	準地衡流 PV [s ⁻¹].
undef	<R>	in	未定義値.
hx	<R(size(x),size(y))>	in	x 方向のスケール因子.
hy	<R(size(x),size(y))>	in	y 方向のスケール因子.
rhoc	<R(size(z))>	in	基本場密度 [kg/m ³] (後述).

定義式

静力学系における準地衡流ポテンシャル渦度を P とすると、その定義は圧力座標 p 系での定義：

$$P \equiv \frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \Phi + f + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$$

および、幾何高度座標 z の定義：

$$P \equiv \frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla_z^2 p + f + f \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{d\theta_0}{dz} \right)^{-1} \theta \right\}$$

でそれぞれ計算される。

各座標系ごとに、引数に与えるべき物理量は異なる。以下にそれを表としてまとめた。

備考

- スケール因子 hx, hy は水平方向の座標系を [m] 次元にするための係数である。今、このスケール因子を h_x, h_y とすると、定義されている水平空間座標系 x, y の微小変位 $\delta x, \delta y$ に対して、水平方向の幾何距離 $\delta L_x, \delta L_y$ は以下のような関係をもつ：

$$\delta L_x = h_x \delta x, \quad \delta L_y = h_y \delta y.$$

例えば、 x, y 座標が球面の経度、緯度 (ϕ_1, ϕ_2) であるとする、それぞれの微小幾何距離 $\delta L_x, \delta L_y$ はそれぞれ

$$\delta L_x = a \cos \phi_2 \delta \phi_1, \quad \delta L_y = a \delta \phi_2$$

となり、このときのスケール因子はそれぞれ

$$h_x = a \cos \phi_2, \quad h_y = a$$

となる。ここで、 a は地球の半径である。

- 基本場密度 rhoc が引数としてとられるときに、鉛直座標は幾何高度がとられているとルーチン側で自動判断する。

3.15 special_function

特殊関数を計算する関数集。なお、以下の関数マニュアルには、関数の定義式のみ表記しており、実際の評価手順は??を参考にされたい。

3.15.1 Full_Ellip1_Func

機能

第一種完全楕円関数を計算する。

書式

```
result = Full_Ellip1_Func( k )
```

引数

k	<R>	in	波数.
戻り値	<R,DP>	inout	計算結果.

定義式

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

備考

特になし。

3.15.2 Full_Ellip2_Func

機能

第一種完全楕円関数を計算する。

書式

```
result = Full_Ellip2_Func( k )
```

引数

k <R> in 波数.
 戻り値 <R,DP> inout 計算結果.

定義式

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

備考

特になし.

3.15.3 bessj

機能

第一種ベッセル関数を計算する.

書式

result = bessj(m, t)

引数

m <I,R> in ベッセル関数の次数.
 t <R,DP> in 変数.
 戻り値 <R,DP> inout 計算結果.

定義式

m 次ベッセル関数を $J_m(t)$ とすると,

$$J_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m}.$$

ここで, $\Gamma(m)$ は m 次ガンマ関数である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.15.4 bessy

機能

第二種ベッセル関数を計算する.

書式

result = bessy(m, t)

引数

m	<I,R>	in	ベッセル関数の次数.
t	<R,DP>	in	変数.
戻り値	<R,DP>	inout	計算結果.

定義式

m 次ベッセル関数を $Y_m(t)$ とすると,

$$Y_m(t) = J_m(t) \ln t - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k}\right) \right] \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m}.$$

ここで, $\Gamma(m)$ は m 次ガンマ関数, $J_m(t)$ は m 次ベッセル関数である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.15.5 beszero

機能

第一種ベッセル関数のゼロ点を計算する.

書式

```
call beszero( nmax, mmax, k )
```

引数

nmax	<I>	in	ベッセル関数の最大次数.
mmax	<I>	in	求めるゼロ点の個数.
k	<R,DP(0:nmax,mmax)>	inout	ゼロ点での値 (備考参照).

定義式

第一種ベッセル関数の 0 次から n 次までの原点から m 個のゼロ点を計算する. このとき, 引数との対応関係は以下ようになる.

$$n : \text{nmax}, \quad m : \text{mmax}.$$

備考 ● 例えば, n 次の m 番目のゼロ点での変数の値を求めたい場合, `call beszero(n, m, k(0:n,m))` と指定すれば, `k(n,m)` にそのゼロ点の値が格納されている.

3.15.6 beta_func

機能

ベータ関数を計算する.

書式

```
result = beta_func( x, y )
```

引数

x	<R,DP>	in	第一要素.
y	<R,DP>	in	第二要素.
戻り値	<R,DP>	inout	計算結果.

定義式

ベータ関数を $B(x, y)$ とすると,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0$$

- 備考
- 実際の評価式は近似式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.
 - ベータ関数には変数対称性をもつため,

$$B(x, y) = B(y, x)$$

であるので, 引数の順序は問わない.

3.15.7 delta

機能

クロネッカーのデルタを計算する.

書式

```
result = delta( i, j )
```

引数

i	<I>	in	第一要素.
j	<I>	in	第二要素.
戻り値	<R>	inout	計算結果.

定義式

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

備考

特になし.

3.15.8 df_bessj

機能

第一種変形ベッセル関数を計算する.

書式

```
result = df_bessj( m, t )
```

引数

m	<I,R>	in	変形ベッセル関数の次数.
t	<R,DP>	in	変数.
戻り値	<R,DP>	inout	計算結果.

定義式

m 次変形ベッセル関数を $I_m(t)$ とすると,

$$I_m(t) = i^{-m} J_m(it).$$

ここで, $J_m(t)$ は m 次ベッセル関数, i は虚数単位である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.15.9 df_bessy

機能

第一種変形ノイマン関数を計算する.

書式

```
result = df_bessy( m, t )
```

引数

m	<I,R>	in	変形ノイマン関数の次数.
t	<R,DP>	in	変数.
戻り値	<R,DP>	inout	計算結果.

定義式

m 次変形ノイマン関数を $K_m(t)$ とすると,

$$K_m(t) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-m}(t) - I_m(t)}{\sin m\pi}.$$

ここで, $I_m(t)$ は m 次変形ベッセル関数である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.15.10 epsilon

機能

エディントンのイプシロンを計算する.

書式

```
result = epsilon( i, j, k )
```

引数

i	<I>	in	第一要素.
j	<I>	in	第二要素.
k	<I>	in	第三要素.
戻り値	<R>	inout	計算結果.

定義式

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{偶置換} \\ -1 & \text{奇置換} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

備考

特になし.

3.15.11 gamma_func

機能

ガンマ関数を計算する.

書式

```
result = gamma_func( x )
```

引数

x <I,R> in 要素.
戻り値 <R,DP> inout 計算結果.

定義式

ガンマ関数を $\Gamma(x)$ とすると,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

備考 ● 実際の評価式は近似式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.15.12 kaijo

機能

階乗を計算する.

書式

```
result = kaijo( i )
```

引数

i <I> in 要素.
戻り値 <I,R> inout 計算結果.

定義式

$$i! = i \times (i - 1) \times \dots \times 2 \times 1$$

備考

特になし.

3.15.13 sp_bessj

機能

第一種球ベッセル関数を計算する.

書式

```
result = sp_bessj( m, t )
```

引数

m <I,R> in 球ベッセル関数の次数.
t <R,DP> in 変数.
戻り値 <R,DP> inout 計算結果.

定義式

m 次球ベッセル関数を $j_m(t)$ とすると,

$$j_m(t) = \left(\frac{\pi}{2t}\right)^{1/2k} J_{m+1/2}(t).$$

ここで, $J_m(t)$ は m 次ベッセル関数である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.15.14 sp_bessy

機能

第一種球ノイマン関数を計算する.

書式

```
result = sp_bessy( m, t )
```

引数

m	<I,R>	in	球ノイマン関数の次数.
t	<R,DP>	in	変数.
戻り値	<R,DP>	inout	計算結果.

定義式

m 次球ノイマン関数を $y_m(t)$ とすると,

$$y_m(t) = \left(\frac{\pi}{2t}\right)^{1/2k} Y_{m+1/2}(t).$$

ここで, $Y_m(t)$ は m 次ノイマン関数である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.16 statistics

主要な統計処理に加え, 平均化, 内挿, フィッティング処理等を行うルーチン集.

3.16.1 Anomaly_1d

機能

1次元配列の平均値からのアノマリーを計算する。

書式

```
call Anomaly_1d( x, anor, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元データ.
anor	<R,DP(size(x))>	inout	各 x(i) に対応する偏差.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	平均のカウント数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_n が存在した場合、そのアノマリー a_n は以下のように計算される。

$$a_i = x_i - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n x_p$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。また、アノマリーとしても `error` で定義されている値を返す。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.2 Anomaly_2d

機能

2次元配列の平均値からのアノマリーを計算する。

書式

```
call Anomaly_2d( x, anor, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	1次元データ.
anor	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	inout	各 x(i,j) に対応する偏差.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	平均のカウント数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_{mn} が存在した場合、そのアノマリー a_{mn} は以下のように計

算される。

$$a_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{mn} \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^m x_{pq}$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。また、アノマリーとしても `error` で定義されている値を返す。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.3 Anomaly_3d

機能

3次元配列の平均値からのアノマリーを計算する。

書式

```
call Anomaly_3d( x, anor, [error], [nc] )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP(:)>	<code>in</code>	1次元データ.
<code>anor</code>	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	<code>inout</code>	各 <code>x(i,j,k)</code> に対応する偏差.
<code>error</code>	<R,DP>	<code>in</code>	欠損値 (後述).
<code>nc</code>	<I>	<code>inout</code>	平均のカウント数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_{lmn} が存在した場合、そのアノマリー a_{lmn} は以下のように計算される。

$$a_{ijk} = x_{ijk} - \frac{1}{lmn} \sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^m \sum_{p=1}^l x_{pqr}$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。また、アノマリーとしても `error` で定義されている値を返す。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.4 auto_interpo_search_1d

機能

1次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、point を越えない最大の要素番号を出力する（いわゆるガウス記号のような処理を行う）。

書式

```
call auto_interpo_search_1d( x, point, i, [undeff], [stdopt] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
point	<R,DP(:)>	in	調べたい点.
i	<I(size(point))>	inout	各 point を越えない最大の x(i) に相当する要素番号.
undeff	<I>	in	探索範囲外フラグ（後述）. デフォルトはゼロ.
stdopt	<L>	in	エラー出力フラグ（後述）. デフォルトは .false.

定義式

模式図は図??.

備考

- 使用方法は auto_interpo_search_1d と同じ。ただし、point 配列は漸増データであることが前提である。もし、漸増データでない場合は interpo_search_1d をループで回すしかない。

3.16.5 auto_interpo_search_2d

機能

2次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、pointx, pointy を越えない最大の要素番号を出力する（いわゆるガウス記号のような処理を行う）。

書式

```
call auto_interpo_search_2d( x, y, pointx, pointy, i, j, [undeff], [stdopt] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	1次元漸増配列.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	1次元漸増配列.
<code>pointx</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	<code>x</code> について調べたい点.
<code>pointy</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	<code>y</code> について調べたい点.
<code>i</code>	<code><I(size(pointx))></code>	<code>inout</code>	各 <code>pointx</code> を越えない最大の <code>x(i)</code> に相当する要素番号.
<code>j</code>	<code><I(size(pointy))></code>	<code>inout</code>	各 <code>pointy</code> を越えない最大の <code>y(j)</code> に相当する要素番号.
<code>undeff</code>	<code><I></code>	<code>in</code>	探索範囲外フラグ (後述). デフォルトはゼロ.
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> .

定義式

模式図は図??.

備考

- 使用方法は `auto_interpo_search_2d` と同じ. ただし, `pointx`, `pointy` 配列は漸増データであることが前提である. もし, 漸増データでない場合は `interpo_search_2d` をループで回すしかない.

3.16.6 auto_interpo_search_3d

機能

3次元の漸増配列 (要素数が増えるごとに値が大きくなる配列) の中で, `pointx`, `pointy`, `pointz` を越えない最大の要素番号を出力する (いわゆるガウス記号のような処理を行う)。

書式

```
call auto_interpo_search_3d( x, y, z, pointx, pointy, pointz, i, j, k,
&
& [stdopt], [undeff] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
y	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
z	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
pointx	<R,DP(:)>	in	xについて調べたい点.
pointy	<R,DP(:)>	in	yについて調べたい点.
pointz	<R,DP(:)>	in	zについて調べたい点.
i	<I(size(pointx))>	inout	各 pointx を越えない最大の x(i) に相当する要素番号.
j	<I(size(pointy))>	inout	各 pointy を越えない最大の y(j) に相当する要素番号.
k	<I(size(pointz))>	inout	各 pointz を越えない最大の z(k) に相当する要素番号.
undef	<I>	in	探索範囲外フラグ (後述). デフォルトはゼロ.
stdopt	<L>	in	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは .false.

定義式

模式図は図??.

備考

- 使用方法は `auto_interpo_search_3d` と同じ. ただし, `pointx`, `pointy`, `pointz` 配列は漸増データであることが前提である. もし, 漸増データでない場合は `interpo_search_3d` をループで回すしかない.

3.16.7 auto_interpolation_1d

機能

1次元の異なる座標系における自動線形内挿ルーチン。通常、`interpo_search` ルーチンと `interpolation` の組み合わせで行われる内挿処理を完全自動化したもの。

書式

```
call auto_interpolation_1d( x, r, u, v, [undef], [undefr], [stdopt] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	内挿の基準座標.
<code>r</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	実際に内挿を行う座標.
<code>u</code>	<code><R,DP(size(x))></code>	<code>in</code>	座標 <code>x</code> で定義される配列データ.
<code>v</code>	<code><R,DP(size(r))></code>	<code>inout</code>	座標 <code>r</code> で定義される配列データ.
<code>undef</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	未定義値 (後述).
<code>undefr</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	内挿隣接点未定義値 (後述).
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> .

定義式

座標 `x` の各格子点 `x(i)` で定義されている値 `u(i)` の値を参照値として、`x` と同次元に存在する格子点配置の異なる別の座標系 `r` の各点 `r(j)` で定義されている値 `v(j)` に内挿を行うものである。イメージは図??のようなものである。

備考

- 引数 `undef` は領域外での内挿を行おうとしたときに格納される値.
- 引数 `undefr` は内挿点の両端隣接参照点が存在するにも関わらず、その点のどちらかあるいは一方が未定義値 `undefr` の場合に、内挿点にはこの `undefr` で与えられた値が格納される.
- `undef` と `undefr` と合わせることで、内挿点が定義領域外にあるか、領域内で未定義かの判別が可能となる。なお、これらの値はデフォルトではどちらも `-999.0` で返される.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.

3.16.8 auto_interpolation_2d

機能

2次元の異なる座標系における自動線形内挿ルーチン。通常、`interpo_search` ルーチンと `interpolation` の組み合わせで行われる内挿処理を完全自動化したもの。

書式

```
call auto_interpolation_2d( x, y, r, p, u, v, [undef], [undefr], [stdopt]
)
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	内挿の基準座標 1.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	内挿の基準座標 2.
<code>r</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	実際に内挿を行う座標 1.
<code>p</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	実際に内挿を行う座標 2.
<code>u</code>	<code><R,DP(size(x),size(y))></code>	<code>in</code>	座標 <code>x,y</code> で定義される配列データ.
<code>v</code>	<code><R,DP(size(r),size(p))></code>	<code>inout</code>	座標 <code>r,p</code> で定義される配列データ.
<code>undef</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	未定義値 (後述).
<code>undefr</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	内挿隣接点未定義値 (後述).
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> .

定義式

座標 x,y の各格子点 $x(i),y(j)$ で定義されている値 $u(i,j)$ の値を参照値として、 x,y と同次元に存在する格子点配置の異なる別の座標系 r,p の各点 $r(1), p(m)$ で定義されている値 $v(1,m)$ に内挿を行うものである。イメージは図??のようなものである。

備考

- 引数 `undef` は領域外での内挿を行おうとしたときに格納される値.
- 引数 `undefr` は内挿点の両端隣接参照点が存在するにも関わらず、その点のどちらかあるいは一方が未定義値 `undefr` の場合に、内挿点にはこの `undefr` で与えられた値が格納される.
- `undef` と `undefr` と合わせることで、内挿点が定義領域外にあるか、領域内で未定義かの判別が可能となる。なお、これらの値はデフォルトではどちらも `-999.0` で返される。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。

3.16.9 auto_interpolation_3d

機能

3次元の異なる座標系における自動線形内挿ルーチン。通常、`interpo_search` ルーチンと `interpolation` の組み合わせで行われる内挿処理を完全自動化したもの。

書式

```
call auto_interpolation_3d( x, y, z, r, p, q, u, v, [undef], [undefr],
[stdopt] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	内挿の基準座標 1.
y	<R,DP(:)>	in	内挿の基準座標 2.
z	<R,DP(:)>	in	内挿の基準座標 3.
r	<R,DP(:)>	in	実際に内挿を行う座標 1.
p	<R,DP(:)>	in	実際に内挿を行う座標 2.
q	<R,DP(:)>	in	実際に内挿を行う座標 3.
u	<R,DP(size(x),size(y),size(z))>	in	座標 x,y,z で定義される配列データ.
v	<R,DP(size(r),size(y),size(z))>	inout	座標 r,p,q で定義される配列データ.
undef	<R,DP>	in	未定義値 (後述).
undefr	<R,DP>	in	内挿隣接点未定義値 (後述).
stdopt	<L>	in	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> .

定義式

座標 x,y,z の各格子点 $x(i),y(j),z(k)$ で定義されている値 $u(i,j,k)$ の値を参照値として、 x,y,z と同次元に存在する格子点配置の異なる別の座標系 r,p,q の各点 $r(1),p(m),q(n)$ で定義されている値 $v(1,m,n)$ に内挿を行うものである。イメージは図??のようなものである。

備考

- 引数 `undef` は領域外での内挿を行おうとしたときに格納される値.
- 引数 `undefr` は内挿点の両端隣接参照点が存在するにも関わらず、その点のどちらかあるいは一方が未定義値 `undefr` の場合に、内挿点にはこの `undefr` で与えられた値が格納される.
- `undef` と `undefr` と合わせることで、内挿点が定義領域外にあるか、領域内で未定義かの判別が可能となる。なお、これらの値はデフォルトではどちらも `-999.0` で返される.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.

3.16.10 Cor_Coe_1d

機能

2 データの相関係数を計算するルーチン.

書式

```
call Cor_Coe_1d( x, y, cc, [error] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元データ.
y	<R,DP(size(x))>	in	1次元データ.
cc	<R,DP>	inout	相関係数.
error	<R,DP>	in	欠損値.

定義式

任意の長さの 2 データ列 x_n, y_n が存在した場合、その相関係数 cc 以下のように計算される。

$$cc = \frac{cov}{stv(x) \times stv(y)}.$$

ただし、以下のような記号を用いた。

$$cov = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad stv(\phi) = \sum_{i=1}^n (\phi_i - \bar{\phi})^2$$

ここで、 cov は共分散、 $stv(\phi)$ は ϕ_n というデータ列の標準偏差となる。また、上線をついた変数は平均値を表す。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.16.11 Cor_Coe_2d

機能

2 データの相関係数を計算するルーチン (2次元配列版).

書式

```
call Cor_Coe_2d( x, y, cc, [error] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	2次元データ.
cc	<R,DP>	inout	相関係数.
error	<R,DP>	in	欠損値.

定義式

2次元配列を 1次元配列に並べ替え、Cor_Coe を用いている。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.16.12 Cor_Coe_3d

機能

2 データの相関係数を計算するルーチン (3 次元配列版).

書式

```
call Cor_Coe_3d( x, y, cc, [error] )
```

引数

x	<R,DP(:, :, :)>	in	3 次元データ.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	3 次元データ.
cc	<R,DP>	inout	相関係数.
error	<R,DP>	in	欠損値.

定義式

3 次元配列を 1 次元配列に並べ替え, Cor_Coe を用いている.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.

3.16.13 Freqbin_count_1d

機能

1 次元配列について, 指定されたビン幅内に存在するデータの個数をカウントする.

書式

```
call Freqbin_count_1d( qbot, qtop, x, opt, qua, [error], [nc] )
```

引数

qbot	<R,DP(:)>	in	ビン幅の下端閾値.
qtop	<R,DP(:)>	in	ビン幅の上端閾値.
x	<R,DP(:)>	in	1 次元データ.
opt	<C(1)>	in	閾値上に存在するデータの扱い (後述).
qua	<I>	inout	各ビンに含まれるデータの個数.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_n を昇べきにソートしたデータ列を y_n とする. この配列に対

して, $1 \leq j \leq N$ だけのビンが与えられているとする. あるビン (j) の下端値 $q_l(j)$, および上端値 $q_t(j)$ を用いてそのビン内に存在するデータの個数をカウントする.

`opt(1:1)=='1'` の場合 データが $q_t(j)$ と同じ値を有したとき, そのデータは j 番目のビンに含まれるとしてカウントされる.

`opt(1:1)=='u'` の場合 データが $q_t(j)$ と同じ値を有したとき, そのデータは j 番目のビンに含まれるとしてカウントされる.

このとき, $q_l(j)$, $q_t(j)$ がそれぞれ引数 `qbot(j)`, `qtot(j)` に対応し, ビンの個数 N が `size(qbot)` に対応する. 任意のデータ列 x_n が `x(:)` に対応する. カウントされた個数は `qua` に格納される.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, その値が入っているデータ点を計算に入れない.
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合, 用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す. ここで, 引数 `nc` は欠損値のみを除いた値であり, 各ビンにカウントされなかった欠損値以外のデータについても含んでいることに注意する. すなわち, 与えたビン幅 `qbot`, `qtot` がカウントするデータ `x` の全てを含んでいない限り, `qua` の総和と `nc` は一致しない. ビン内に含まれないデータが存在するためである.

3.16.14 Freqbin_count_2d

機能

2次元配列について, 指定されたビン幅内に存在するデータの個数をカウントする.

書式

```
call Freqbin_count_2d(qbot, qtop, x, opt, qua, [error], [nc] )
```

引数

<code>qbot</code>	<R,DP(:)>	in	ビン幅の下端閾値.
<code>qtop</code>	<R,DP(:)>	in	ビン幅の上端閾値.
<code>x</code>	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
<code>opt</code>	<C(1)>	in	閾値上に存在するデータの扱い (後述).
<code>qua</code>	<I>	inout	各ビンに含まれるデータの個数.
<code>error</code>	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
<code>nc</code>	<I>	inout	利用データのカウント数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 $x_{n,m}$ を昇べきにソートしたデータ列を y_M とする ($M = n \times m$). この配列に対して, $1 \leq j \leq N$ だけのビンが与えられているとする. あるビン (j) の下端値 $q_l(j)$, および上端値 $q_t(j)$ を用いてそのビン内に存在するデータの個数をカウントする.

`opt(1:1)=='1'` の場合 データが $q_t(j)$ と同じ値を有したとき, そのデータは j 番目のビンに含まれるとしてカウントされる.

`opt(1:1)=='u'` の場合 データが $q_t(j)$ と同じ値を有したとき, そのデータは j 番目のビンに含まれるとしてカウントされる.

このとき, $q_l(j)$, $q_t(j)$ がそれぞれ引数 `qbot(j)`, `qtot(j)` に対応し, ビンの個数 N が `size(qbot)` に対応する. 任意のデータ列 $x_{n,m}$ が `x(:, :)` に対応する. カウントされた個数は `qua` に格納される.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, その値が入っているデータ点を計算に入れない.
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合, 用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す. ここで, 引数 `nc` は欠損値のみを除いた値であり, 各ビンにカウントされなかった欠損値以外のデータについても含んでいることに注意する. すなわち, 与えたビン幅 `qbot`, `qtot` がカウントするデータ `x` の全てを含んでいない限り, `qua` の総和と `nc` は一致しない. ビン内に含まれないデータが存在するためである.

3.16.15 Freqbin_count_3d

機能

3次元配列について, 指定されたビン幅内に存在するデータの個数をカウントする.

書式

```
call Freqbin_count_3d( qbot, qtop, x, opt, qua, [error], [nc] )
```

引数

qbot	<R,DP(:)>	in	ビン幅の下端閾値.
qtop	<R,DP(:)>	in	ビン幅の上端閾値.
x	<R,DP(:,:,:)>	in	3次元データ.
opt	<C(1)>	in	閾値上に存在するデータの扱い(後述).
qua	<I>	inout	各ビンに含まれるデータの個数.
error	<R,DP>	in	欠損値(後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数(後述).

定義式

任意の長さのデータ列 $x_{n,m,l}$ を昇べきにソートしたデータ列を y_M とする ($M = n \times m \times l$). この配列に対して, $1 \leq j \leq N$ だけのビンが与えられているとする. あるビン (j) の下端値 $q_l(j)$, および上端値 $q_t(j)$ を用いてそのビン内に存在するデータの個数をカウントする.

opt(1:1)=='1' の場合 データが $q_l(j)$ と同じ値を有したとき, そのデータは j 番目のビンに含まれるとしてカウントされる.

opt(1:1)=='u' の場合 データが $q_t(j)$ と同じ値を有したとき, そのデータは j 番目のビンに含まれるとしてカウントされる.

このとき, $q_l(j)$, $q_t(j)$ がそれぞれ引数 qbot(j), qtot(j) に対応し, ビンの個数 N が size(qbot) に対応する. 任意のデータ列 $x_{n,m,;}$ が $x(:, :, :)$ に対応する. カウントされた個数は qua に格納される.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, その値が入っているデータ点を計算に入れない.
- 引数 nc は error 引数が設定されている場合, 用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す. ここで, 引数 nc は欠損値のみを除いた値であり, 各ビンにカウントされなかった欠損値以外のデータについても含んでいることに注意する. すなわち, 与えたビン幅 qbot, qtot がカウントするデータ x の全てを含んでいない限り, qua の総和と nc は一致しない. ビン内に含まれないデータが存在するためである.

3.16.16 LSM_1d

機能

あるデータ列に対して, 線形関数にフィッティングする際に, 最小二乗法によってその傾きと切片を計算するルーチン.

書式

```
call LSM_1d( x, y, slope, intercept, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	データ要素 1.
y	<R,DP(size(x))>	in	データ要素 2.
slope	<R,DP>	inout	求められる線形関数の傾き.
intercept	<R,DP>	inout	求められる線形関数の切片.
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列の組 x_n, y_n が存在した場合、そのデータを最小二乗法により以下のような線形関数 $F(x_n)$ にフィッティングする。

$$F(x_i) = a_1 x_i + a_0.$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}(i), \quad a_1 : \text{slope}, \quad a_0 : \text{intercept}.$$

なお、この最小二乗法による具体的な計算の証明は付録の [5.4.1](#) 参照。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.16.17 LSM_2d

機能

ある 2 次元データ列に対して、線形関数にフィッティングする際に、最小二乗法によってその傾きと切片を計算するルーチン。

書式

```
call LSM_2d( x, y, slope, intercept, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	データ要素 1.
y	<R,DP(size(x,1), size(x,2))>	in	データ要素 2.
slope	<R,DP>	inout	求められる線形関数の傾き.
intercept	<R,DP>	inout	求められる線形関数の切片.
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述).

定義式

2次元配列を1次元に置き換えて、LSM ルーチンを用いている。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.16.18 LSM_3d

機能

ある3次元データ列に対して、線形関数にフィッティングする際に、最小二乗法によってその傾きと切片を計算するルーチン。

書式

```
call LSM_3d( x, y, slope, intercept, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:, :, :)>	in	データ要素 1.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	データ要素 2.
slope	<R,DP>	inout	求められる線形関数の傾き
intercept	<R,DP>	inout	求められる線形関数の切片
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述) .

定義式

3次元配列を1次元に置き換えて、LSM ルーチンを用いている。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.16.19 LSM_poly_1d

機能

あるデータ列に対して、任意次数の多項式にフィッティングする際に、最小二乗法によってその各係数を計算するルーチン。

書式

```
call LSM_poly_1d( x, y, a, intercept, [undef] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	データ要素 1.
<code>y</code>	<code><R,DP(size(x))></code>	<code>in</code>	データ要素 2.
<code>a</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>inout</code>	求められる多項式の各係数 (後述).
<code>intercept</code>	<code><R,DP></code>	<code>inout</code>	求められる多項式の切片 (後述).
<code>undef</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	欠損値 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列の組 x_n, y_n が存在した場合、そのデータを最小二乗法により以下のような m 次多項式 $F(x_n)$ にフィッティングする。

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^m a_j x_i^j + a_0.$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}(i), \quad a_j : \mathbf{a}(j), \quad a_0 : \mathbf{intercept}.$$

引数の形から見て明らかのように、実引数として `a` を渡す際、その配列の要素数が多項式の最高次数となる。また、メインルーチン側で、`intercept` も配列 `a` に組み込みたい場合、実引数側で `intercept` の変数として、`a(0)` を代入すれば問題ない。なお、この最小二乗法による具体的な計算の証明は付録の??参照。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.16.20 LSM_poly_2d

機能

あるデータ列に対して、任意次数の多項式にフィッティングする際に、最小二乗法によってその各係数を計算するルーチン (2次元版).

書式

```
call LSM_poly_2d( x, y, a, intercept, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	データ要素 1.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	データ要素 2.
a	<R,DP(:)>	inout	求められる多項式の各係数 (後述).
intercept	<R,DP>	inout	求められる多項式の切片 (後述).
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述).

定義式

2次元データを1次元データに置き換えて、LSM_poly を用いている.

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.16.21 LSM_poly_3d

機能

あるデータ列に対して、任意次数の多項式にフィッティングする際に、最小二乗法によってその各係数を計算するルーチン (3次元版).

書式

```
call LSM_poly_3d( x, y, a, intercept, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:, :, :)>	in	データ要素 1.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	データ要素 2.
a	<R,DP(:)>	inout	求められる多項式の各係数
intercept	<R,DP>	inout	求められる多項式の切片 (
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述).

定義式

3次元データを1次元データに置き換えて、LSM_poly を用いている.

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.16.22 LSM_multi

機能

あるデータ列に対して、任意個数の多変数多項式にフィッティングする際に、最小二乗法によってその各係数を計算するルーチン。

書式

```
call LSM_multi( x, y, a, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	データ要素 1.
y	<R,DP(size(x,1))>	in	データ要素 2.
a	<R,DP(size(x,2))>	inout	求められる多項式の各係数 (後述) .
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述) .

定義式

任意の長さのデータ列の組 \mathbf{x}_n, y_n が存在した場合、そのデータを最小二乗法により以下のような m 次多項式 $F(\mathbf{x}_n)$ にフィッティングする。

$$F(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^m a_j x_{j,i}.$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_{j,i} : \mathbf{x}(i,j), \quad a_j : \mathbf{a}(j).$$

なお、この最小二乗法による具体的な計算の証明は付録の??参照。 \mathbf{x} は m 個の独立な変数で構成される集合を表す。この変数の種類が係数 a_j の数に等しい。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 上のフィッティング関数は

$$F(\mathbf{x}_i) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n$$

という形を仮定しているが、もし、フィッティング関数が

$$F(\mathbf{x}_i) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n$$

という切片を伴った形を仮定しなければならない場合でも、本ルーチンは使用可能である。具体的には、ルーチンの引数 $\mathbf{x}(:,1)$ に全て 1 を入れておけばよい。そうすると、

$$F(\mathbf{x}_i) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n, \quad x_0 = 1$$

と同意になるので、 $\mathbf{a}(1)$ に切片の値が返されることになる。

3.16.23 Mean_1d

機能

1次元配列の平均値を計算する。

書式

```
call Mean_1d( x, ave, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元データ.
ave	<R,DP>	inout	計算する平均値.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	平均のカウント数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_n が存在した場合、その平均 ave は以下のように計算される。

$$ave = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n x_p$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.24 Mean_2d

機能

2次元配列の平均値を計算する。

書式

```
call Mean_2d( x, ave, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
ave	<R,DP>	inout	計算する平均値.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	平均のカウント数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_{mn} が存在した場合、その平均 ave は以下のように計算される。

$$ave = \frac{1}{mn} \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^m x_{pq}$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.25 Mean_3d

機能

3次元配列の平均値を計算する。

書式

```
call Mean_3d( x, ave, [error], [nc] )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP(:, :, :)>	in	3次元データ.
<code>ave</code>	<R,DP>	inout	計算する平均値.
<code>error</code>	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
<code>nc</code>	<I>	inout	平均のカウント数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_{lmn} が存在した場合、その平均 ave は以下のように計算される。

$$ave = \frac{1}{lmn} \sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^m \sum_{p=1}^l x_{pqr}$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.26 Median_1d

機能

1次元配列の中央値を求める。

書式

```
call Median_1d( x, med, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元データ.
med	<R,DP>	inout	求める中央値.
error	<R,DP>	in	欠損値(後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数(後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_n が存在した場合、昇べきにソートし、データ数の半分に位置する配列要素の値を出力する。このとき、ソートしたデータが偶数の場合はデータ数の半分の値(実数)を挟む隣接2整数点での配列要素を平均した値が返される。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 nc は error 引数が設定されている場合、用いたデータ数の総数(欠損値を除いた数)を返す。

3.16.27 Median_2d

機能

2次元配列の中央値を求める。

書式

```
call Median_2d( x, med, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
med	<R,DP>	inout	求める中央値.
error	<R,DP>	in	欠損値(後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数(後述).

定義式

任意の長さのデータ列 $x_{n,m}$ が存在した場合、昇べきにソートし、データ数の半分に位置する配列要素の値を出力する。このとき、ソートしたデータが偶数の場合はデータ数の半分の値 (実数) を挟む隣接 2 整数点での配列要素を平均した値が返される。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.28 Median_3d

機能

3次元配列の中央値を求める。

書式

```
call Median_3d( x, med, [error], [nc] )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP(:, :, :)>	<code>in</code>	3次元データ.
<code>med</code>	<R,DP>	<code>inout</code>	求める中央値.
<code>error</code>	<R,DP>	<code>in</code>	欠損値 (後述).
<code>nc</code>	<I>	<code>inout</code>	利用データのカウンタ数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 $x_{n,m,l}$ が存在した場合、昇べきにソートし、データ数の半分に位置する配列要素の値を出力する。このとき、ソートしたデータが偶数の場合はデータ数の半分の値 (実数) を挟む隣接 2 整数点での配列要素を平均した値が返される。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.29 Quantile_1d

機能

1次元配列の q 分位値を求める。

書式

```
call Quantile_1d( q, x, qua, [error], [nc], [opt] )
```

引数

q	<R,DP>	in	分位点 ($0 \leq q \leq 1$).
x	<R,DP(:)>	in	1次元データ.
qua	<R,DP>	inout	求める q 分位値.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数 (後述).
opt	<C(1)>	in	分位点の扱い (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_n を昇べきにソートしたデータ列を y_n とする. この配列に対して, 以下の定義式で q 分位値 Q_q を計算する.

$$Q_q = y_t, \quad t = 1 - q + qn.$$

ここで得られた Q_q が返り値 qua に格納される. t がデータ列における q 分位点に対応する配列要素番号である. もし, t が整数ではなく実数である場合, オプション引数 opt によって Q_q の返し方を以下から選択できる:

opt(1:1)=='i' の場合 (線形補間)

$$Q_q = (t - [t])y_{[t]} + ([t] + 1 - t)y_{[t]+1}.$$

ブラケットはガウス記号を表す.

opt(1:1)=='l' の場合 (下側データ)

$$Q_q = y_{[t]}.$$

opt(1:1)=='u' の場合 (上側データ)

$$Q_q = y_{[t]+1}.$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は, その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 nc は error 引数が設定されている場合, 用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。
- 引数 opt のデフォルト値は 'i' である。

3.16.30 Quantile_2d

機能

2次元配列の q 分位値を求める。

書式

```
call Quantile_2d( q, x, qua, [error], [nc], [opt] )
```

引数

q	<R,DP>	in	分位点 ($0 \leq q \leq 1$).
x	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
qua	<R,DP>	inout	求める q 分位値.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数 (後述).
opt	<C(1)>	in	分位点の扱い (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 $x_{n,m}$ を昇べきにソートしたデータ列を y_N とする ($N = n \times m$). この配列に対して, 以下の定義式で q 分位値 Q_q を計算する.

$$Q_q = y_t, \quad t = 1 - q + qN.$$

ここで得られた Q_q が返り値 qua に格納される. t がデータ列における q 分位点に対応する配列要素番号である. もし, t が整数ではなく実数である場合, オプション引数 opt によって Q_q の返し方を以下から選択できる:

opt(1:1)=='i' の場合 (線形補間)

$$Q_q = (t - [t])y_{[t]} + ([t] + 1 - t)y_{[t]+1}.$$

ブラケットはガウス記号を表す.

opt(1:1)=='l' の場合 (下側データ)

$$Q_q = y_{[t]}.$$

opt(1:1)=='u' の場合 (上側データ)

$$Q_q = y_{[t]+1}.$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は, その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 nc は error 引数が設定されている場合, 用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。
- 引数 opt のデフォルト値は 'i' である。

3.16.31 Quantile_3d

機能

3次元配列の q 分位値を求める。

書式

```
call Quantile_3d( q, x, qua, [error], [nc], [opt] )
```

引数

q	<R,DP>	in	分位点 ($0 \leq q \leq 1$).
x	<R,DP(:, :, :)>	in	3次元データ.
qua	<R,DP>	inout	求める q 分位値.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数 (後述).
opt	<C(1)>	in	分位点の扱い (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 $x_{n,m,l}$ を昇べきにソートしたデータ列を y_N とする ($N = n \times m \times l$). この配列に対して, 以下の定義式で q 分位値 Q_q を計算する.

$$Q_q = y_t, \quad t = 1 - q + qN.$$

ここで得られた Q_q が返り値 qua に格納される. t がデータ列における q 分位点に対応する配列要素番号である. もし, t が整数ではなく実数である場合, オプション引数 opt によって Q_q の返し方を以下から選択できる:

opt(1:1)=='i' の場合 (線形補間)

$$Q_q = (t - [t])y_{[t]} + ([t] + 1 - t)y_{[t]+1}.$$

ブラケットはガウス記号を表す.

opt(1:1)=='l' の場合 (下側データ)

$$Q_q = y_{[t]}.$$

opt(1:1)=='u' の場合 (上側データ)

$$Q_q = y_{[t]+1}.$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は, その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 nc は error 引数が設定されている場合, 用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。
- 引数 opt のデフォルト値は 'i' である。

3.16.32 Quartile_1d

機能

1次元配列の四分位値を求める。

書式

```
call Quartile_1d( x, qua, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(>>	in	1次元データ.
qua	<R,DP(3)>	inout	求める四分位値.
error	<R,DP>	in	欠損値(後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数(後述).

定義式

任意の長さのデータ列 x_n が存在した場合、昇べきにソートし、データ数の半分に位置する配列要素の値を出力する。このとき、ソートしたデータが偶数の場合はデータ数の半分の値(実数)を挟む隣接2整数点での配列要素を平均した値が返される。さらに、ここで得られた中央の要素それぞれについてさらに半分の位置における配列要素値を出力する。qua(1:3)はそれぞれ qua(1)は25パーセンタイル値, qua(2)は50パーセンタイル値, qua(3)は75パーセンタイル値に一致する。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 nc は error 引数が設定されている場合、用いたデータ数の総数(欠損値を除いた数)を返す。

3.16.33 Quartile_2d

機能

2次元配列の四分位値を求める。

書式

```
call Quartile_2d( x, qua, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
qua	<R,DP(3)>	inout	求める四分位値.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 $x_{n,m}$ が存在した場合、昇べきにソートし、データ数の半分に位置する配列要素の値を出力する。このとき、ソートしたデータが偶数の場合はデータ数の半分の値 (実数) を挟む隣接 2 整数点での配列要素を平均した値が返される。さらに、ここで得られた中央の要素それぞれについてさらに半分の位置における配列要素値を出力する。qua(1:3) はそれぞれ qua(1) は 25 パーセンタイル値, qua(2) は 50 パーセンタイル値, qua(3) は 75 パーセンタイル値に一致する。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 nc は error 引数が設定されている場合、用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.34 Quartile_3d

機能

3次元配列の四分位値を求める。

書式

```
call Quartile_3d( x, qua, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:,:,:)>	in	3次元データ.
qua	<R,DP(3)>	inout	求める四分位値.
error	<R,DP>	in	欠損値 (後述).
nc	<I>	inout	利用データのカウンタ数 (後述).

定義式

任意の長さのデータ列 $x_{n,m,l}$ が存在した場合、昇べきにソートし、データ数の半分に位置する配列要素の値を出力する。このとき、ソートしたデータが偶数の場合はデータ数の半分の値 (実数) を挟む隣接 2 整数点での配列要素を平均した値が返される。さらに、ここで得られた中央の要素それぞれについてさらに半分の位置における配列要素値を出力する。qua(1:3) はそれぞれ qua(1) は 25 パーセンタイル値, qua(2) は 50 パーセンタイル値, qua(3) は 75 パーセンタイル値に一致する。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.35 Reg_Line_1d

機能

回帰直線の傾きと切片を計算するルーチン。

書式

```
call Reg_Line_1d( x, y, slope, intercept, [error] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(>)></code>	<code>in</code>	1次元データ.
<code>y</code>	<code><R,DP(size(x))></code>	<code>in</code>	1次元データ.
<code>slope</code>	<code><R,DP></code>	<code>inout</code>	回帰直線の傾き.
<code>intercept</code>	<code><R,DP></code>	<code>inout</code>	回帰直線の切片.
<code>error</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	欠損値.

定義式

任意の長さの2データ列 x_n, y_n が存在した場合、その回帰直線 $y_n = \alpha x_n + \beta$ における傾き α と切片 β を LSM ルーチンを用いて計算する。

正確な計算方法は付録??参照.

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.16.36 Reg_Line_2d

機能

2次元データについて回帰直線の傾きと切片を計算するルーチン。

書式

```
call Reg_Line_2d( x, y, slope, intercept, [error] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	2次元データ.
slope	<R,DP>	inout	回帰直線の傾き.
intercept	<R,DP>	inout	回帰直線の切片.
error	<R,DP>	in	欠損値.

定義式

2次元データを1次元データに置き換えて, Reg_Line ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.

3.16.37 Reg_Line_3d

機能

3次元データについて回帰直線の傾きと切片を計算するルーチン.

書式

```
call Reg_Line_3d( x, y, slope, intercept, [error] )
```

引数

x	<R,DP(:, :, :)>	in	3次元データ.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	3次元データ.
slope	<R,DP>	inout	回帰直線の傾き.
intercept	<R,DP>	inout	回帰直線の切片.
error	<R,DP>	in	欠損値.

定義式

3次元データを1次元データに置き換えて, Reg_Line ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.

3.16.38 covariance_1d

機能

2 データの共分散を計算するルーチン.

書式

```
call covariance_1d( x, y, cov, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1 次元データ.
y	<R,DP(size(x))>	in	1 次元データ.
cov	<R,DP>	inout	共分散.
error	<R,DP>	in	欠損値.
nc	<I>	inout	平均のカウント数 (後述).

定義式

任意の長さの 2 データ列 x_n, y_n が存在した場合、その共分散 cov 以下のように計算される。

$$cov = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

ここで、上線のついた変数は平均値を表す。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.16.39 covariance_2d

機能

2 データの共分散を計算するルーチン (2 次元配列版).

書式

```
call covariance_2d( x, y, cov, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2))>	in	2次元データ.
cov	<R,DP>	inout	共分散.
error	<R,DP>	in	欠損値.
nc	<I>	inout	平均のカウント数 (後述).

定義式

2次元データを1次元データに置き換えて、`covariance` ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない.
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す.

3.16.40 `covariance_3d`

機能

2データの共分散を計算するルーチン (3次元配列版).

書式

```
call covariance_3d( x, y, cov, [error], [nc] )
```

引数

x	<R,DP(:, :, :)>	in	3次元データ.
y	<R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))>	in	3次元データ.
cov	<R,DP>	inout	共分散.
error	<R,DP>	in	欠損値.
nc	<I>	inout	平均のカウント数 (後述).

定義式

3次元データを1次元データに置き換えて、`covariance` ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない.
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す.

3.16.41 interpo_search_1d

機能

1次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、`point` を越えない最大の要素番号を出力する（いわゆるガウス記号のような処理を行う）。

書式

```
call interpo_search_1d( x, point, i, [undef], [stdopt] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(></code>	<code>in</code>	1次元漸増配列.
<code>point</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	調べたい点.
<code>i</code>	<code><I></code>	<code>inout</code>	<code>point</code> を越えない最大の <code>x(i)</code> に相当する要素番号.
<code>undef</code>	<code><I></code>	<code>in</code>	探索範囲外フラグ（後述）. デフォルトはゼロ.
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ（後述）. デフォルトは <code>.false</code> .

定義式

模式図は図??.

備考

- 探索範囲の配列要素値より小さい値を探索しようとした際に `undef` を返す。この値が設定されずに探索範囲外になった場合は 0 を返す。探索範囲より大きい場合はどのような値をとっても、`x` の最大値に相当する配列要素番号を返す。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。

3.16.42 interpo_search_2d

機能

2次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、`pointx`, `pointy` を越えない最大の要素番号を出力する（いわゆるガウス記号のような処理を行う）。

書式

```
call interpo_search_2d( x, y, pointx, pointy, i, j, [undef], [stdopt] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	1次元漸増配列.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	1次元漸増配列.
<code>pointx</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	<code>x</code> について調べたい点.
<code>pointy</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	<code>y</code> について調べたい点.
<code>i</code>	<code><I></code>	<code>inout</code>	<code>pointx</code> を越えない最大の <code>x(i)</code> に相当する要素番号.
<code>j</code>	<code><I></code>	<code>inout</code>	<code>pointy</code> を越えない最大の <code>y(j)</code> に相当する要素番号.
<code>undeff</code>	<code><I></code>	<code>in</code>	探索範囲外フラグ (後述). デフォルトはゼロ.
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code>

定義式

模式図は図??.

備考

- 探索範囲の配列要素値より小さい値を探索しようとした際に `undeff` を返す。この値が設定されずに探索範囲外になった場合は 0 を返す。探索範囲より大きい場合はどのような値をとっても、`x` の最大値に相当する配列要素番号を返す。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。

3.16.43 `interpo_search_3d`

機能

3次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、`pointx`, `pointy`, `pointz` を越えない最大の要素番号を出力する（いわゆるガウス記号のような処理を行う）。

書式

```
call interpo_search_3d( x, y, z, pointx, pointy, pointz, i, j, k, &
& [stdopt], [undeff] )
```

引数

x	<R,DP(<:>>	in	1次元漸増配列.
y	<R,DP(<:>>	in	1次元漸増配列.
z	<R,DP(<:>>	in	1次元漸増配列.
pointx	<R,DP>	in	xについて調べたい点.
pointy	<R,DP>	in	yについて調べたい点.
pointz	<R,DP>	in	zについて調べたい点.
i	<I>	inout	pointxを越えない最大のx(i)に相当する要素番号.
j	<I>	inout	pointyを越えない最大のy(j)に相当する要素番号.
k	<I>	inout	pointzを越えない最大のz(k)に相当する要素番号.
undeff	<I>	in	探索範囲外フラグ(後述). デフォルトはゼロ.
stdopt	<L>	in	エラー出力フラグ(後述). デフォルトは.false.

定義式

モード図は図??.

備考

- 探索範囲の配列要素値より小さい値を探索しようとした際に `undeff` を返す。この値が設定されずに探索範囲外になった場合は 0 を返す。探索範囲より大きい場合はどのような値をとっても、x の最大値に相当する配列要素番号を返す。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。

3.16.44 interpolation_1d

機能

1次元の線形内挿ルーチン。内挿点と内挿の際に参照する点および、その点における値をもとに、内挿点での値を線形内挿によって計算する。

書式

```
call interpolation_1d( x, y, point, val )
```

引数

x	<R,DP(2)>	in	内挿点の左右端（後述）.
y	<R,DP(2)>	in	x で定義される値（後述）.
point	<R,DP>	in	内挿点.
val	<R,DP>	inout	内挿点での値.

定義式

模式図は図???. ある座標配列 x_n の各点に対して定義されている値 y_n をもとに、ある 2 点 x_i, x_{i+1} の間の点 x_{ip} における線形内挿値を計算したいとする。このとき、内挿値 y_{ip} は近傍 2 点の値を参照して、以下のように計算される。

$$y_{ip} = y_i + dx * (x_{ip} - x_i), \quad dx = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}(1), \quad x_{i+1} : \mathbf{x}(2), \quad y_i : \mathbf{y}(1), \quad y_{i+1} : \mathbf{y}(2),$$

$$x_{ip} : \mathbf{point}, \quad y_{ip} : \mathbf{val}$$

備考

- 最初に、 $\mathbf{x}(1:2)$ の点がわからない場合は、 \mathbf{point} の値をもとに、`interpo_search_1d` ルーチンを用い、これらの点をあらかじめ求めておけばよい。

3.16.45 interpolation_2d

機能

2 次元の線形内挿ルーチン。内挿点と内挿の際に参照する点および、その点における値をもとに、内挿点での値を線形内挿によって計算する。

書式

```
call interpolation_2d( x, y, z, point, val )
```

引数

x	<R,DP(2)>	in	x 方向内挿点の左右端（後述）.
y	<R,DP(2)>	in	y 方向内挿点の左右端（後述）.
z	<R,DP(2,2)>	in	x, y で定義される値（後述）.
point	<R,DP(2)>	in	x, y での内挿点. point(1) が x, point(2) が y に対応.
val	<R,DP>	inout	内挿点での値.

定義式

模式図は図??。ある座標配列 x_n, y_m の各点に対して定義されている値 z_{nm} をもとに、ある 4 点 $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1})$ で囲まれる点 (x_p, y_q) における双線形内挿値を計算したいとする。このとき、内挿値 z_{pq} は近傍 4 点の値を参照して、

$$z_{pq} = z_{ij} + \frac{z_{i+1j} - z_{ij}}{x_{i+1} - x_i}(x_p - x_i) + \frac{z_{ij+1} - z_{ij}}{y_{j+1} - y_j}(y_q - y_j) \\ + \frac{[z_{i+1j+1} - z_{ij+1} - z_{i+1j} + z_{ij}](x_p - x_i)(y_q - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

と計算される^{*13}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}(1), \quad x_{i+1} : \mathbf{x}(2), \quad y_j : \mathbf{y}(1), \quad y_{j+1} : \mathbf{y}(2), \\ z_{ij} : \mathbf{z}(1,1), \quad z_{i+1j} : \mathbf{z}(2,1), \quad z_{ij+1} : \mathbf{z}(1,2), \quad z_{i+1j+1} : \mathbf{z}(2,2), \\ x_p : \mathbf{point}(1), \quad y_q : \mathbf{point}(2), \quad z_{pq} : \mathbf{val}$$

備考

- 最初に、 $\mathbf{x}(1:2)$, $\mathbf{y}(1:2)$ の点がわからない場合は、 \mathbf{point} の値をもとに、`interpo_search_2d` ルーチンを用い、これらの点をあらかじめ求めておけばよい。

3.16.46 interpolation_3d

機能

3 次元の線形内挿ルーチン。内挿点と内挿の際に参照する点および、その点における値をもとに、内挿点での値を線形内挿によって計算する。

書式

```
call interpolation_3d( x, y, z, u, point, val )
```

引数

x	<R,DP(2)>	in	x 方向内挿点の左右端 (後述) .
y	<R,DP(2)>	in	y 方向内挿点の左右端 (後述) .
z	<R,DP(2)>	in	z 方向内挿点の左右端 (後述) .
u	<R,DP(2,2,2)>	in	x, y, z で定義される値 (後述) .
\mathbf{point}	<R,DP(3)>	in	x, y, z での内挿点. $\mathbf{point}(1)$ が x , $\mathbf{point}(2)$ が y に, $\mathbf{point}(3)$ が z に対応.
\mathbf{val}	<R,DP>	inout	内挿点での値.

^{*13}この式の導出は??参照.

定義式

模式図は図??。ある座標配列 x_n, y_m, z_l の各点に対して定義されている値 u_{nml} をもとに、ある 8 点で囲まれる点 (x_p, y_q, z_r) における双線形内挿値を計算したいとする。このとき、内挿値 z_{pqr} は近傍 8 点の値を参照して、

$$\begin{aligned}
 u_{pqr} = & u_{ijk} + (u_{i+1jk} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + (u_{ij+1k} - u_{ijk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
 & + (u_{ijk+1} - u_{ijk}) \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
 & + (u_{i+1j+1k} - u_{ij+1k} - u_{i+1jk} + u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
 & + (u_{i+1jk+1} - u_{ik+1} - u_{i+1jk} + u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
 & + (u_{ij+1k+1} - u_{ijk+1} - u_{ij+1k} + u_{ijk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
 & + (u_{i+1j+1k+1} - u_{ij+1k+1} - u_{i+1jk+1} + u_{ijk+1} - u_{i+1j+1k} + u_{ij+1k} + u_{i+1jk} - u_{ijk}) \\
 & \times \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j}
 \end{aligned}$$

と計算される^{*14}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}(1), \quad x_{i+1} : \mathbf{x}(2), \quad y_j : \mathbf{y}(1), \quad y_{j+1} : \mathbf{y}(2),$$

$$z_k : \mathbf{z}(1), \quad z_{k+1} : \mathbf{z}(2),$$

$$z_{ijk} : \mathbf{z}(1,1,1), \quad z_{i+1jk} : \mathbf{z}(2,1,1), \quad z_{ij+1k} : \mathbf{z}(1,2,1), \quad z_{ijk+1} : \mathbf{z}(1,1,2),$$

$$z_{i+1j+1k} : \mathbf{z}(2,2,1), \quad z_{i+1jk+1} : \mathbf{z}(2,1,2), \quad z_{ij+1k+1} : \mathbf{z}(1,2,2), \quad z_{i+1j+1k+1} : \mathbf{z}(2,2,2),$$

$$x_p : \mathbf{point}(1), \quad y_q : \mathbf{point}(2), \quad z_r : \mathbf{point}(3), \quad u_{pqr} : \mathbf{val}$$

備考

- 最初に、 $\mathbf{x}(1:2)$, $\mathbf{y}(1:2)$, $\mathbf{z}(1:2)$ の点がわからない場合は、 \mathbf{point} の値をもとに、 $\mathbf{interpo_search_3d}$ ルーチンを用い、これらの点をあらかじめ求めておけばよい。

3.16.47 nearest_search_1d

機能

1 次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、 \mathbf{point} に最も近い要素番号を出力する。

^{*14}この式の導出は??参照。

書式

```
call nearest_search_1d( x, point, i )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
point	<R,DP>	in	調べたい点.
i	<I>	inout	point に最も近い x(i) に相当する要素番号.

定義式

モード図は図??.

備考

なし。

3.16.48 nearest_search_2d

機能

2次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、pointx, pointy に最も近い要素番号を出力する。

書式

```
call nearest_search_2d( x, y, pointx, pointy, i, j )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
y	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
pointx	<R,DP>	in	x について調べたい点.
pointy	<R,DP>	in	y について調べたい点.
i	<I>	inout	pointx に最も近い x(i) に相当する要素番号.
j	<I>	inout	pointy に最も近い y(j) に相当する要素番号.

定義式

モード図は図??.

備考

なし。

3.16.49 nearest_search_3d

機能

3次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、pointx, pointy, pointz に最も近い要素番号を出力する。

書式

```
call nearest_search_3d( x, y, z, pointx, pointy, pointz, i, j, k )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
y	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
z	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
pointx	<R,DP>	in	xについて調べたい点.
pointy	<R,DP>	in	yについて調べたい点.
pointz	<R,DP>	in	zについて調べたい点.
i	<I>	inout	pointxに最も近いx(i)に相当する要素番号.
j	<I>	inout	pointyに最も近いy(j)に相当する要素番号.
k	<I>	inout	pointzに最も近いz(k)に相当する要素番号.

定義式

模式図は図??.

備考

なし。

3.16.50 nearest_neighbor_search_1d

機能

1次元の任意配列の中で、point に最も近い要素番号を出力する。

書式

```
call nearest_neighbor_search_1d( x, point, i, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
point	<R,DP>	in	調べたい点.
i	<I>	inout	point に最も近い x(i) に相当する要素番号.
undef	<R,DP>	in	未定義値.

定義式

nearest_search_1d と同じ.

備考

なし.

3.16.51 nearest_neighbor_search_2d

機能

2次元の任意配列の中で、pointx, pointy に最も近い要素番号を出力する.

書式

call nearest_neighbor_search_2d(x, y, pointx, pointy, i, j, [undef])

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
y	<R,DP(:)>	in	1次元漸増配列.
pointx	<R,DP>	in	x について調べたい点.
pointy	<R,DP>	in	y について調べたい点.
i	<I>	inout	pointx に最も近い x(i) に相当する要素番号.
j	<I>	inout	pointy に最も近い y(j) に相当する要素番号.
undef	<R,DP>	in	未定義値.

定義式

nearest_search_2d と同じ.

備考

なし.

3.16.52 nearest_neighbor_search_3d

機能

3次元の任意配列の中で、pointx, pointy, pointz に最も近い要素番号を出力

する。

書式

```
call nearest_neighbor_search_3d( x, y, z, pointx, pointy, pointz, &
i, j, k, [undef] )
```

引数

x	<R,DP(<:>>	in	1次元漸増配列.
y	<R,DP(<:>>	in	1次元漸増配列.
z	<R,DP(<:>>	in	1次元漸増配列.
pointx	<R,DP>	in	xについて調べたい点.
pointy	<R,DP>	in	yについて調べたい点.
pointz	<R,DP>	in	zについて調べたい点.
i	<I>	inout	pointxに最も近いx(i)に相当する要素番号.
j	<I>	inout	pointyに最も近いy(j)に相当する要素番号.
k	<I>	inout	pointzに最も近いz(k)に相当する要素番号.
undef	<R,DP>	in	未定義値.

定義式

nearest_search_3dと同じ.

備考

なし.

3.16.53 spline_3

機能

1次元の3次スプライン関数内挿ルーチン。内挿点と内挿の際に参照する点および、その点における値をもとに、3次スプライン関数による補間によって計算する。

書式

```
call spline_3( xi, xo, yi, yo, [itype], [t1], [tn] )
```

引数

<code>xi</code>	<code><R,DP(:)></code>	in	定義されているデータ点.
<code>xo</code>	<code><R,DP(:)></code>	in	内挿するデータ点.
<code>yi</code>	<code><R,DP(size(xi))></code>	in	<code>xi</code> で定義される値.
<code>yo</code>	<code><R,DP(size(xo))></code>	in	<code>xo</code> で内挿される値.
<code>itype</code>	<code><I></code>	in	両端条件の種類 (後述). デフォルト値は 2.
<code>t1</code>	<code><R,DP></code>	in	<code>xi(1)</code> での端条件 (後述). デフォルト値は 0.0.
<code>tn</code>	<code><R,DP></code>	in	<code>xi(size(xi))</code> での端条件 (後述). デフォルト値は 0.0.

定義式

模式図は図???. ある座標配列 $X_i; i = 1, \dots, N$ の各点に対して定義されている値 Y_i をもとに、座標配列領域内に存在する任意の点 x における内挿値を計算したいとする。このとき、内挿値 $S(x)$ は 3 次スプライン関数を用いて以下のように計算される:

$$S_i(x) = a_i(x - X_i)^3 + b_i(x - X_i)^2 + c_i(x - X_i) + d_i, \quad (X_i \leq x \leq X_{i+1})$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$X_i : xi(i), \quad S_i(X_i) : yi(i), \quad x : xo(j), \quad S(x) : yo(j).$$

計算方法の詳細は付録 5.4.3 参照.

備考

- 引数 `xo` は必ず、`xi` と同じ単位で `xi` の範囲内に存在しなければならない。
- 引数 `itype` はスプライン関数の係数を求めるときに必要な両端での微分追加条件の種類を設定する。 `itype = 1` の場合は 1 回微分で計算を行い、 `itype = 2` の場合は 2 回微分で計算を行う。
- 引数 `t1`, `tn` はそれぞれ `itype` で指定された微分条件における具体的な微分の値であり、 `t1` が `xi(1)` での微分値、 `tn` が `xi(size(xi))` での微分値に対応する。
- 引数 `itype`, `t1`, `tn` の適切な設定で任意の両端条件を設定することができる。なお、これらがまったく指定されていない場合は、両端条件を 2 回微分で指定し、その微分値はゼロという自然スプラインで内挿を行う。

3.16.54 stand_dev_1d

機能

2 データの標準偏差を計算するルーチン。

書式

```
call stand_devi_1d( x, anor, [error] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	1次元データ.
anor	<R,DP>	inout	標準偏差.
error	<R,DP>	in	欠損値.

定義式

任意の長さのデータ列 x_n が存在した場合、その標準偏差 stv 以下のように計算される。

$$stv = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

ここで、上線のついた変数は平均値を表す。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.16.55 stand_devi_2d

機能

2 データの標準偏差を計算するルーチン (2次元配列版).

書式

```
call stand_devi_2d( x, anor, [error] )
```

引数

x	<R,DP(:, :)>	in	2次元データ.
anor	<R,DP>	inout	標準偏差.
error	<R,DP>	in	欠損値.

定義式

2次元データを1次元データに置き換え、stand_devi ルーチンを用いる。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.16.56 stand_devi_3d

機能

2 データの標準偏差を計算するルーチン (3 次元配列版).

書式

```
call stand_devi_3d( x, anor, [error] )
```

引数

x	<R,DP(:, :, :)>	in	3 次元データ.
anor	<R,DP>	inout	標準偏差.
error	<R,DP>	in	欠損値.

定義式

3 次元データを 1 次元データに置き換え, stand_devi ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.

3.16.57 tri_interpolation

機能

2 次元の線形内挿ルーチン。内挿点と内挿の際に参照する点および、その点における値をもとに、内挿点での値を線形内挿によって計算する。

書式

```
call tri_interpolation( x, y, val, point, oval )
```

引数

x	<R,DP(3)>	in	x 方向内挿点の左右端 (後述) .
y	<R,DP(3)>	in	y 方向内挿点の左右端 (後述) .
val	<R,DP(3)>	in	x, y で定義される値 (後述) .
point	<R,DP(2)>	in	x, y での内挿点. point(1) が x, point(2) が y に対応.
oval	<R,DP>	inout	内挿点での値.

定義式

直交直線座標系 (x, y) 上の 3 点 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ を頂点とする三

角形の要素内の点 $P(x_P, y_P)$ への補間は,

$$u_P = \frac{u_A S_A + u_B S_B + u_C S_C}{S}.$$

ただし,

$$\begin{aligned} S &= (x_A - x_C)(y_B - y_A) - (y_A - y_C)(x_B - x_A), \\ S_A &= (x_C - x_B)(y_P - y_C) - (y_C - y_B)(x_P - x_C), \\ S_B &= (x_A - x_C)(y_P - y_A) - (y_A - y_C)(x_P - x_A), \\ S_C &= (x_B - x_A)(y_P - y_B) - (y_B - y_A)(x_P - x_B). \end{aligned}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$(x_A, x_B, x_C) : \mathbf{x}(1:3)$, $(y_A, y_B, y_C) : \mathbf{y}(1:3)$, $(x_P, y_P) : \mathbf{point}(1:2)$.

$(u_A, u_B, u_C) : \mathbf{val}(1:3)$, $u_P : \mathbf{oval}$.

備考

- 本ルーチンでは内挿点の三角形内外判定を行わない。したがって、このルーチン呼び出す前に、`check.triclose` 関数呼んで内外判定を行っておく。
- 数学的な説明は [5.4.4](#) 参照。

3.16.58 Move_ave

機能

1次元配列の移動平均値を計算する。

書式

```
call Move_ave( x, n, y, [error], [offset] )
```

引数

<code>x</code>	<R(:)>	in	1次元データ.
<code>n</code>	<I>	in	平均をとる要素数.
<code>y</code>	<R(size(x))>	inout	平均した結果.
<code>error</code>	<R>	in	欠損値 (後述).
<code>offset</code>	<I>	in	移動平均を開始する要素番号 (後述). デフォルトは <code>n</code> .

定義式

任意の長さのデータ列 x_i が存在した場合、その移動平均 y_i は以下のように計算される。ただし、 n が移動平均する要素数である。

$$y_i = \frac{1}{n} \sum_{p=i}^{i+n-1} x_p$$

備考

- 移動平均の計算は定義式では上のように記述してあるが、実装は最初の n 個について平均を計算し、以降は最古値を引き、最新値を足すという作業を行っている。
- 引数 `offset` は移動平均値の代入を開始する要素番号を指定する。 `offset=m` とすると、上の定義式において、全要素数が N のとき、移動平均は以下のように計算される。

$$y_i = \frac{1}{n} \sum_{p=i}^{i+n-1} x_p (i = m, N - n + m)$$

ここで、 $n \geq m$ でなければならない。このとき、上の要素範囲外に相当する配列には `error` が代入される。デフォルトはゼロ。

3.16.59 Move_anom

機能

1次元配列の移動平均値からの偏差を計算する。

書式

```
call Move_anom( x, n, y, [error], [offset] )
```

引数

<code>x</code>	<R(:)>	in	1次元データ。
<code>n</code>	<I>	in	平均をとる要素数。
<code>y</code>	<R(size(x))>	inout	得られるアノマリ。
<code>error</code>	<R>	in	欠損値（後述）。
<code>offset</code>	<I>	in	移動平均を開始する要素番号（後述）。 デフォルトは <code>n</code> 。

定義式

任意の長さのデータ列 x_i が存在した場合、その移動平均アノマリ y_i は以下のように

計算される。ただし、 n が移動平均する要素数である。

$$y_i = x_i - \frac{1}{n} \sum_{p=i}^{i+n-1} x_p$$

備考

- 移動平均の計算は定義式では上のように記述してあるが、実装は最初の n 個について平均を計算し、以降は最古値を引き、最新値を足すという作業を行っている。
- 引数 `offset` は移動平均値の代入を開始する要素番号を指定する。 `offset=m` とすると、上の定義式において、全要素数が N のとき、移動平均からの偏差は以下のように計算される。

$$y_i = x_i - \frac{1}{n} \sum_{p=i}^{i+n-1} x_p (i = m, N - n + m)$$

ここで、 $n \geq m$ でなければならない。このとき、上の要素範囲外に相当する配列には `error` が代入される。デフォルトはゼロ。

3.16.60 Bubble_Sort

機能

1次元配列のデータをバブルソートアルゴリズムによってソートする。

書式

```
call Bubble_Sort( a, b, sig )
```

引数

<code>a</code>	<I,R,DP(:)>	in	1次元データ.
<code>b</code>	<I,R,DP(size(a))>	inout	ソートした結果.
<code>sig</code>	<C(1)>	in	昇順 (i) か降順 (r) か.

定義式

なし。バブルソートアルゴリズムによって実装。

備考

なし。

3.16.61 Quick_Sort

機能

1次元配列のデータをクイックソートアルゴリズムによってソートする。

書式

```
call Quick_Sort( a, b, sig )
```

引数

a	<I,R,DP(:)>	in	1次元データ.
b	<I,R,DP(size(a))>	inout	ソートした結果.
sig	<C(1)>	in	昇順 (i) か降順 (r) か.

定義式

なし. クイックソートアルゴリズムによって実装. ソート時の基準データは各パーティションの先頭配列のデータを用いる.

備考

なし.

3.16.62 detrend_1d

機能

あるデータ列に対して、トレンド除去を行うルーチン.

書式

```
call detrend_1d( tax, ival, oval, [undef] )
```

引数

tax	<R,DP(size(ival))>	in	ival の定義されている座標.
ival	<R,DP(:)>	in	トレンド除去を行うデータ.
oval	<R,DP(size(ival))>	in	トレンド除去されたデータ.
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述) .

定義式

任意の長さのデータ列の組 x_n, y_n が存在した場合、そのデータの線形トレンドは線形回帰 (LSM ルーチン使用) から、

$$F(x_i) = a_1 x_i + a_0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

よって、オリジナルデータからこのトレンド分を除去したデータ x_n, z_n は

$$z_i = y_i - F(x_i).$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \text{tax}(i), \quad y_i : \text{ival}(i), \quad z_i : \text{oval}(i).$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.16.63 detrend_2d

機能

あるデータ列に対して、トレンド除去を行うルーチン。

書式

```
call detrend_2d( tax, ival, oval, [undef] )
```

引数

tax	<R,DP(:)>	in	ival のトレンドを求める座標 (後述).
ival	<R,DP(:, :)>	in	トレンド除去を行うデータ.
oval	<R,DP(size(ival,1),size(ival,2))>	in	トレンド除去されたデータ.
undef	<R,DP>	in	欠損値 (後述).

定義式

2次元の任意の長さのデータ w_{mn} のうち、 n 方向についてトレンド除去を行うことを考える。このとき、トレンドを除去しない方向 m についてはその平均値 y_n とする。すると、トレンド除去を行う座標については、任意の長さのデータ列の組 x_n, y_n となるので、そのデータの線形トレンドは線形回帰 (LSM ルーチン使用) から、

$$F(x_i) = a_1 x_i + a_0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

よって、オリジナルデータからこのトレンド分を除去したデータ x_n, z_n は

$$z_i = y_i - F(x_i).$$

トレンド除去を行わなかった方向については、この除去済みのデータは平均値となっているので、各 m について一様に $F(x_i)$ を引く:

$$z_{ji} = w_{ji} - F(x_i), \quad (j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n).$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \text{tax}(i), \quad w_{ji} : \text{ival}(j,i), \quad z_{ji} : \text{oval}(j,i).$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- トレンド除去を行う座標は必ず `ival` の第二要素となる。すなわち、`size(tax)=size(ival,2)` である。

3.17 Thermo_Advanced_Function

熱力学変数の処理を行う関数のうち、他のモジュールに依存した計算を行う関数集。

3.17.1 SSIndex

機能

Showalter (1953) に基づく安定度指数 SSI を計算するルーチン。

書式

```
result = SSIndex( p, z, qv, temp, [p_ref], [p_com], [undeff], [dl] )
```

引数

<code>p</code>	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
<code>z</code>	<R(size(p))>	in	高度 [m].
<code>qv</code>	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
<code>temp</code>	<R(size(p))>	in	温度 [K].
<code>p_ref</code>	<R>	in	基準高度 (後述) [Pa]. デフォルト値は 850 hPa.
<code>p_com</code>	<R>	in	計算高度 (後述) [Pa]. デフォルト値は 500 hPa.
戻り値	<R>	inout	SSIndex [J/kg].
<code>undeff</code>	<R>	in	未定義値.

定義式

$$\text{SSIndex} = (T_{500} - T_{p500}).$$

ここで、 T_{500} , T_{p500} は 500 hPa 高度での環境場の温度 (つまり、ゾンデで観測される温度)、 T_{p500} は断熱減率に従って、基準高度 $p = 850$ hPa から上昇させたパーセルの温度。

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- オプション引数 `p_ref`, `p_com` はそれぞれ持ち上げる基準気圧高度面、および計算する気圧高度面に対応する。

3.17.2 CAPE

機能

対流有効位置エネルギー (Convective Available Potential Energy) を計算するルーチン。

書式

```
result = CAPE( p, z, qv, temp, z_ref, [undef], [opt], [copt] )
```

引数

<code>p</code>	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
<code>z</code>	<R(size(p))>	in	高度 [m].
<code>qv</code>	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
<code>temp</code>	<R(size(p))>	in	温度 [K].
<code>z_ref</code>	<R>	in	基準高度 [m].
戻り値	<R>	inout	CAPE [J/kg].
<code>undef</code>	<R>	in	未定義値.
<code>opt</code>	<I>	in	LNB 計算の際のオプション (後述).
<code>copt</code>	<I>	in	LNB 未定義の際のオプション (後述).

定義式

$$\int_{p_{LNB}}^{p_{LFC}} R(T_p - T_a) d \ln p.$$

ここで、 p は気圧、 T_a は環境場の温度 (つまり、ゾンデで観測される温度)、 T_p は断熱減率に従って、基準高度 z_{ref} から上昇させたパーセルの温度、 R は気体定数、LFC は自由対流高度 (Level of Free Convection)、LNB は中立浮力高度 (Level of Neutral Buoyancy).

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- 高度データは LFC, LNB の値を計算するためにのみ使用している。
- `undeff` が設定されている高度の値は積算されない。
- もし、基準高度を気圧基準で与える場合は、この関数を呼び出す前に基準気圧での高度を計算し、その値を引数として入れれば OK。
- `opt` 変数については、関数 `z_LNB` でのオプション指定と同じ。
- `copt` 変数は、LFC が値をもち、LNB が未定義となる場合の処理を指定する。`copt` が 1 の場合 (デフォルト) は LNB が未定義である時点で CAPE は未定義を返す。一方、`copt` が 2 の場合は、LFC からデータの上端要素 `nx` までを積分した値に、“負号”をつけた値を CAPE として返す。これは LNB がデータの上端要素高度より上に存在するような場合を想定しており、もちろん正しい CAPE の値ではないことに注意する。少なくとも、与えられた高度データで確実に存在する CAPE の値と考えるべきである。

3.17.3 CIN

機能

対流抑制エネルギー (Convective INhibition) を計算するルーチン。

書式

```
result = CIN( p, z, qv, temp, z_ref, [undeff], [nega_force] )
```

引数

<code>p</code>	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
<code>z</code>	<R(size(p))>	in	高度 [m].
<code>qv</code>	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
<code>temp</code>	<R(size(p))>	in	温度 [K].
<code>z_ref</code>	<R>	in	基準高度 [m].
戻り値	<R>	inout	CIN [J/kg].
<code>undeff</code>	<R>	in	未定義値.
<code>nega_force</code>	<L>	in	正の浮力の取り扱い (後述).

定義式

$$\int_{p_{LFC}}^{p_{ref}} R(T_p - T_a) d \ln p.$$

ここで、 p は気圧、 T_a は環境場の温度 (つまり、ゾンデで観測される温度)、 T_p は断熱減率に従って、基準高度 z_{ref} から上昇させたパーセルの温度、 R は気体定数、LFC は自由対流高度 (Level of Free Convection)、 p_{ref} は z_{ref} での気圧。

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- 高度データは LFC, LNB の値を計算するためにのみ使用している。
- `undeff` が設定されている高度の値は積算されない。
- もし、基準高度を気圧基準で与える場合は、この関数を呼び出す前に基準気圧での高度を計算し、その値を引数として入れれば OK。
- パーセル持ち上げ温度の計算に際する、数値誤差によって、基準高度から LFC までに浮力が正となる層が存在する可能性がある。その場合、オプション引数 `nega_force = .true.` によって、あらかじめ積分範囲内の浮力が正となる高度の浮力をゼロに強制することができる。このオプションが指定されていれば、標準出力に指定メッセージを出力する。デフォルトは `.false.` が指定されている。

3.17.4 T_LFC

機能

LFC (Level of Free Convection) での温度を計算する関数。

書式

```
result = T_LFC( z_ref, z, temp, p, qv )
```

引数

<code>z_ref</code>	<R>	in	基準高度 [m].
<code>z</code>	<R(size(p))>	in	高度 [m].
<code>temp</code>	<R(size(p))>	in	温度 [K].
<code>p</code>	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
<code>qv</code>	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
戻り値	<R>	inout	LFC での温度 [K].

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- ある基準高度での相当温位を上昇させたとき、周囲の飽和相当温位と一致する高度が LFC である。ここでは、周囲の飽和相当温位と交差する 2 点を求め、そこから高度方向に内挿することで高度を決定する。

3.17.5 T_LNB

機能

LNB (Level of Neutral Buoyancy) での温度を計算する関数。

書式

```
result = T_LNB( z_ref, z, temp, p, qv, [option] )
```

引数

T_ref	<R>	in	基準高度 [m].
z	<R(size(p))>	in	高度 [m].
temp	<R(size(p))>	in	温度 [K].
p	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
qv	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
戻り値	<R>	inout	LNB での温度 [K].
option	<R>	in	計算方法 (備考参照).

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- option には数字が入る。本関数では、LNB を計算するために、2 種類の方法をとることができる。1 つめは LFC 高度での飽和相当温位が LFC より上空で再び環境場の飽和相当温位と交わる点を計算し、その高度を LNB とする方法である。しかし、実際の高分解能な高層気象観測データでは、湿度のデータが大きく変動する場合があるため、LFC のすぐ上で LNB を迎えてしまい、正確に計算されない場合がある。そこで、2 つめは高層気象観測データの上端から下向きに飽和相当温位を計算し、最初に LFC での飽和相当温位と同じ値を迎えた高度を LNB とする方法で計算を行う。飽和相当温位は上層では漸増関数となるため、この手法をとっても問題はない。デフォルトでは option = 1 であり、これは 1 つめの手法による計算である。

3.17.6 precip_water

機能

可降水量を計算する関数.

書式

```
result = precip_water( p, qv, [undef] )
```

引数

p	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
qv	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
戻り値	<R>	inout	可降水量 [kg/m ²].
undef	<R>	in	未定義値.

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。

3.17.7 qrsg_2_dbz

機能

凝結物混合比から擬似的なレーダ反射強度を計算する関数.

書式

```
result = z_LFC( rho, qr, [qs], [qg], [nr], [ns], [ng] )
```

引数

rho	<R>	in	基準高度 [kg/m ³].
qr	<R>	in	雨水混合比 [kg/kg].
qs	<R>	in	雪混合比 [kg/kg].
qg	<R>	in	霰混合比 [kg/kg].
ns	<R>	in	雨数濃度 [1/m ³].
ns	<R>	in	雪数濃度 [1/m ³].
ng	<R>	in	霰数濃度 [1/m ³].
戻り値	<R>	inout	レーダ反射強度 [dBZ].

定義式

レーダ反射強度 dBZ は

$$\text{dBZ} \equiv 10 \log_{10} Z$$

で定義されている。本関数では、この Z の計算に Murakami (1990) の (54) 式：

$$\begin{aligned} Z = & \Gamma(7) N_{R0} \left(\frac{\bar{\rho} Q_R}{\pi \rho_W N_{R0}} \right)^{1.75} 10^{18} \\ & + \Gamma(7) \left[\left| \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2} \right|^2 \middle/ \left| \frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w + 2} \right|^2 \right] \left(\frac{\rho_s}{\rho_W} \right)^2 N_{s0} \left(\frac{\bar{\rho} Q_s}{\pi \rho_s N_{s0}} \right)^{1.75} 10^{18} \\ & + \Gamma(7) \left[\left| \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2} \right|^2 \middle/ \left| \frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w + 2} \right|^2 \right] \left(\frac{\rho_g}{\rho_W} \right)^2 N_{g0} \left(\frac{\bar{\rho} Q_g}{\pi \rho_g N_{g0}} \right)^{1.75} 10^{18} \end{aligned}$$

を用いている。また、上記は 1-moment バルク法を仮定した定式化をされているが、2-moment バルク法を仮定すると、上式は以下ようになる：

$$\begin{aligned} Z = & \Gamma(7) N_r^{-1} \left(\frac{\bar{\rho} Q_R}{\pi \rho_W} \right)^2 10^{18} \\ & + \Gamma(7) \left[\left| \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2} \right|^2 \middle/ \left| \frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w + 2} \right|^2 \right] \left(\frac{\rho_s}{\rho_W} \right)^2 N_s^{-1} \left(\frac{\bar{\rho} Q_s}{\pi \rho_s} \right)^2 10^{18} \\ & + \Gamma(7) \left[\left| \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2} \right|^2 \middle/ \left| \frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w + 2} \right|^2 \right] \left(\frac{\rho_g}{\rho_W} \right)^2 N_g^{-1} \left(\frac{\bar{\rho} Q_g}{\pi \rho_g} \right)^2 10^{18}. \end{aligned}$$

ここで、各記号はそれぞれ以下のとおりである。

$\Gamma(x)$	ガンマ関数.
ε_i	氷の比誘電率.
ε_w	水の比誘電率.
N_{R0}	雨の数密度 [m^{-4}].
N_{s0}	雪の数密度 [m^{-4}].
N_{g0}	霰の数密度 [m^{-4}].
N_r	雨の数濃度 [m^{-3}].
N_s	雪の数濃度 [m^{-3}].
N_g	霰の数濃度 [m^{-3}].
ρ_w	水の密度.
ρ_s	雪の密度.
ρ_g	霰の密度.
$\bar{\rho}$	基本場の大気密度.

各物理パラメータは Murakami (1990) に記載されている値を用いるが、記載されていないパラメータについては、理科年表 (2008) の値を参考に行っている。レーダ反射強度の詳細な計算は??参照。

備考

特になし。

3.17.8 p_LCL

機能

LCL (Lifted Condensation Level) を計算する関数.

書式

```
result = p_LCL( z_ref, z, temp, p, qv )
```

引数

p_ref	<R>	in	基準高度 [Pa].
temp	<R(size(p))>	in	温度 [K].
p	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
qv	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
戻り値	<R>	inout	LCL 高度 [m].

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。

3.17.9 z_LCL

機能

LCL (Lifted Condensation Level) を計算する関数.

書式

```
result = z_LCL( z_ref, z, temp, p, qv )
```

引数

z_ref	<R>	in	基準高度 [m].
z	<R(size(p))>	in	高度 [m].
temp	<R(size(p))>	in	温度 [K].
p	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
qv	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
戻り値	<R>	inout	LCL 高度 [m].

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。

3.17.10 z_LFC

機能

LFC (Level of Free Convection) を計算する関数.

書式

```
result = z_LFC( z_ref, z, temp, p, qv )
```

引数

z_ref	<R>	in	基準高度 [m].
z	<R(size(p))>	in	高度 [m].
temp	<R(size(p))>	in	温度 [K].
p	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
qv	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
戻り値	<R>	inout	LFC 高度 [m].

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- ある基準高度での相当温位を上昇させたとき、周囲の飽和相当温位と一致する高度が LFC である。ここでは、周囲の飽和相当温位と交差する 2 点を求め、そこから高度方向に内挿することで高度を決定する。

3.17.11 z_LNB

機能

LNB (Level of Neutral Buoyancy) を計算する関数.

書式

```
result = z_LNB( z_ref, z, temp, p, qv, [option] )
```

引数

z_ref	<R>	in	基準高度 [m].
z	<R(size(p))>	in	高度 [m].
temp	<R(size(p))>	in	温度 [K].
p	<R(:)>	in	気圧 [Pa].
qv	<R(size(p))>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
戻り値	<R>	inout	LNB 温度 [m].
option	<R>	in	計算方法 (備考参照).

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- option には数字が入る。本関数では、LNB を計算するために、2 種類の方法をとることができる。1 つめは LFC 高度での飽和相当温位が LFC より上空で再び環境場の飽和相当温位と交わる点を計算し、その高度を LNB とする方法である。しかし、実際の高分解能な高層気象観測データでは、湿度のデータが大きく変動する場合があるため、LFC のすぐ上で LNB を迎えてしまい、正確に計算されない場合がある。そこで、2 つめは高層気象観測データの上端から下向きに飽和相当温位を計算し、最初に LFC での飽和相当温位と同じ値を迎えた高度を LNB とする方法で計算を行う。飽和相当温位は上層では漸増関数となるため、この手法をとっても問題はない。デフォルトでは option = 1 であり、これは 1 つめの手法による計算である。

3.18 thermo_advanced_routine

熱力学関係の処理ルーチンの中で、スカラー値ではなく配列形式で引数を返す処理を行うルーチンのうち、他のモジュールに依存する処理を行うものを集めたモジュール。

ここで用いている多くの熱力学変数の詳細は??参照。

3.18.1 Brunt_Freq

機能

ブラントバイサラ振動数の 2 乗を計算する.

書式

```
call Brunt_Freq( x, y, z, pt, BV, [undef] )
```

引数

x	<R(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R(:)>	in	右手系第二座標.
z	<R(:)>	in	右手系第三座標.
pt	<R(size(x),size(y),size(z))>	in	温位 [K].
BV	<R(size(x),size(y),size(z))>	inout	ブラントバイサラ振動数 [/s].
undef	<R>	in	未定義値.

定義式

ブラントバイサラ振動数を N とすると、その定義は

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

となる。ここで、 g, θ はそれぞれ重力加速度と温位である。

備考

特になし.

3.19 thermo_const

熱力学的定数集. 熱力学学における普遍定数を以下の表のように与える. 出典は理科年表 (2008) より.

3.20 thermo_function

熱力学に関する物理量間の変換関数集. 基本的に、スカラー変数を返すような処理はすべてこのモジュールに組み込まれる. それは引数が配列であっても、返す量がスカラー変数である場合についても適用される.

本モジュールで定義されている関数にはすべて、オプション引数で試験的にデバッグオプションが定義されている. 本オプションはデフォルト値がゼロで、陽に 1 を指定すれば、

変数名	型	設定値	変数の意味	単位
Cpd	<R>	1004.0	乾燥大気の定圧比熱	[J/K kg]
Cpv	<R>	1870.0	水蒸気の定圧比熱	[J/K kg]
Cvd	<R>	719.0	乾燥大気の定積比熱	[J/K kg]
Cvv	<R>	1410.0	水蒸気の定積比熱	[J/K kg]
LH0	<R>	2.5e6	水蒸気の潜熱	[J/kg]
LHS	<R>	2.8e6	水蒸気の昇華潜熱	[J/kg]
LF0	<R>	3.337e5	0°C での水の融解熱	[J/kg]
LFm40	<R>	2.357e5	-40°C での水の融解熱	[J/kg]
Md	<R>	28.96	乾燥大気の分子量	[kg/kmol]
Mv	<R>	18.0	水蒸気の分子量	[kg/kmol]
Rd	<R>	287.0	乾燥大気の気体定数	[J/K kg]
Rv	<R>	461.0	水蒸気の気体定数	[J/K kg]
e0	<R>	611.0	凝固点での水蒸気圧	[Pa]
ei0	<R>	611.73	凝固点での氷飽和での水蒸気圧	[Pa]
eps_rdrv	<R>	287.0/461.0	Rd/Rv	[1]
ka1m	<R>	0.4	カルマン定数	[1]
p0	<R>	1.0e5	基準気圧	[Pa]
p00	<R>	1.01325e5	標準大気圧	[Pa]
rhov	<R>	1.0e3	水の密度	[kg/m ³]
t0	<R>	273.15	標準気圧での水の凝固点	[K]
ti0	<R>	273.16	水の三重点での凝固温度	[K]
MFPO	<R>	6.6e-8	p00, t0 での平均自由行程	[m]

その関数が返す値が NaN であれば関数名とモジュール名を標準出力する。2 を指定すれば、その関数の名前と所属するモジュール名、そして返される値を標準出力するようになっている。なお、すべてのルーチンで用いられている変換関数の定義は??参照。また、各計算式の詳細な導出も同様の節参照。

3.20.1 Cefp

機能

水蒸気混合比から有効定圧比熱を計算する。

書式

```
result=Cefp( qv, [dl] )
```

引数

qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	有効定圧比熱 [J/K kg].

定義式

有効定圧比熱を C'_p とすると、

$$C'_p \equiv c_{pd} \left(\frac{1 + q_v c_{pv} / c_{pd}}{1 + q_v} \right). \quad (3.20.1)$$

ここで、 c_{pd} , c_{pv} , q_v はそれぞれ乾燥大気 of 定圧比熱、水蒸気 of 定圧比熱、水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.20.2 Cefv

機能

水蒸気混合比から有効定積比熱を計算する.

書式

```
result=Cefv( qv, [d1] )
```

引数

qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	有効定積比熱 [J/K kg].

定義式

有効定積比熱を C'_v とすると、

$$C'_v \equiv c_{vd} \left(\frac{1 + q_v c_{vv} / c_{vd}}{1 + q_v} \right). \quad (3.20.2)$$

ここで、 c_{vd} , c_{vv} , q_v はそれぞれ乾燥大気 of 定積比熱、水蒸気 of 定積比熱、水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.20.3 Cl

機能

液水の比熱を計算する.

書式

```
result=Cl( T, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	潜熱 [J/K kg].

定義式

水の比熱を Cl とすると、

$$Cl(T) = \begin{cases} 4190.0 & T \geq 273.15 \\ 4770.0 + \delta(T - T_{ref}) & T < 273.15 \end{cases} \quad (3.20.3)$$

ここで、

$$\delta = \frac{4770.0 - 4190.0}{40.0}, \quad T_{ref} = 233.15.$$

備考

特になし.

3.20.4 DSE_Emanuel

機能

Emanuel (1994) で定義されている乾燥静的エネルギーを計算する.

書式

```
result=DSE_Emanuel( T, qv, z, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
z	<R>	in	高度 [m].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	乾燥静的エネルギー [J/kg].

定義式

$$h_d \equiv (c_{pd} + rc_{pv})T + (1 + r)gz \quad (3.20.4)$$

から求める. ここで, c_{pd}, c_{pv} はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱, 水蒸気の定圧比熱であり, T, r, g, z はそれぞれ温度, 水蒸気混合比, 重力加速度, 高度を表す.

備考

特になし.

3.20.5 eP_2_qv

機能

水蒸気圧と圧力から水蒸気混合比を計算する.

書式

result=eP_2_qv(e, P, [dl])

引数

e	<R>	in	大気の水蒸気圧 [Pa].
P	<R>	in	大気的全圧 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].

定義式

$$q_v = \frac{\varepsilon e}{P - e}, \quad \varepsilon = \frac{R_d}{R_v}. \quad (3.20.5)$$

R_d, R_v はそれぞれ, 乾燥大気, 水蒸気の気体定数.

備考

特になし.

3.20.6 eP_2_sh

機能

水蒸気圧と圧力から水蒸気比湿を計算する.

書式

result=eP_2_sh(e, P, [dl])

引数

e	<R>	in	大気の水蒸気圧 [Pa].
P	<R>	in	大気的全圧 [Pa].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の水蒸気比湿 [kg/kg].

定義式

$$q_v = \frac{\varepsilon e}{P}, \quad \varepsilon = \frac{R_d}{R_v}. \quad (3.20.6)$$

R_d, R_v はそれぞれ、乾燥大気、水蒸気の気体定数。

備考

特になし.

3.20.7 es_Bolton

機能

Bolton (1980) の式から温度を元に飽和水蒸気圧を計算する.

書式

```
result=es_Bolton( T, [d1] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気飽和水蒸気圧 [Pa].

定義式

$$e_s(T) = e_0 \exp a \frac{T-T_0}{T-c}, \quad a = 17.67, \quad c = 29.65 \quad (3.20.7)$$

ここで、 $T_0 = 273.15$ K, $e_0 = 611.0$ Pa, $e_s(T)$ は飽和水蒸気圧である。

備考

特になし.

3.20.8 es_TD

機能

Bolton (1980) の式の逆算で、水蒸気圧を与えることでそのときの露点温度を計算する。

書式

```
result=es_TD( e, [dl] )
```

引数

e	<R>	in	大気の水蒸気圧 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の露点温度 [K].

定義式

$$T_D = c + a \frac{T_0 - c}{a - \log(e/e_0)}, \quad a = 17.67, c = 29.65 \quad (3.20.8)$$

ここで、 $T_0 = 273.15$ K, $e_0 = 611.0$ Pa, T_D は露点温度である。

備考

特になし.

3.20.9 esi_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から温度を元に氷飽和で飽和水蒸気圧を計算する。

書式

```
result=esi_Emanuel( T, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の水飽和水蒸気圧 [Pa].

定義式

氷飽和の水蒸気圧を $e^\#$ 、温度を T とすると、

$$\ln e^\# = 23.33086 - \frac{6111.72784}{T} + 0.15215 \ln T. \quad (3.20.9)$$

備考

特になし.

3.20.10 eT_2_RH

機能

水蒸気圧と温度から相対湿度を計算する.

書式

```
result=eT_2_RH( e, T, [opt], [dl] )
```

引数

e	<R>	in	大気の水蒸気圧 [Pa].
T	<R>	in	大気の温度 [K].
opt	<C(1)>	in	飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' .
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の相対湿度 [%].

定義式

相対湿度 RH と飽和水蒸気圧 e_s 、水蒸気分圧 e の定義式 :

$$RH \equiv \frac{e}{e_s} \times 100 \quad (3.20.10)$$

を元に計算する。ここで、飽和水蒸気圧は温度から `es_Bolton` を用いて計算した値を用いる。

備考

特になし.

3.20.11 exner_func_dry

機能

乾燥大気におけるエクスナー関数を計算する.

書式

```
result=exner_func_dry( P, [dl] )
```

引数

P	<R>	in	大気のパラ [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	乾燥大気のエクスナー関数 [無次元].

定義式

エクスナー関数 π_d の定義式 :

$$\pi_d = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R_d/C_{pd}} \quad (3.20.11)$$

から求める. ここで, p_0 はエクスナー関数の基準気圧である. R_d, C_{pd} はそれぞれ, 乾燥大気における気体定数と定圧比熱である.

備考

特になし.

3.20.12 get_gamma_d

機能

乾燥大気の断熱減率を取得する.

書式

```
result=get_gamma_d( [d1] )
```

引数

d1 <I> in デバッグオプション.
戻り値 <R> inout 乾燥断熱減率 [K/m].

定義式

乾燥断熱減率 Γ_d は定圧比熱 C_{pd} と重力加速度 g を用いて、

$$\Gamma_d = -\frac{g}{C_{pd}}. \quad (3.20.12)$$

備考

特になし.

3.20.13 goff_gratch

機能

Goff-Gratch の式から温度を元に飽和水蒸気圧を計算する.

書式

```
result=goff_gratch( T, [d1] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の飽和水蒸気圧 [Pa].

定義式

$$pow = a \left(\frac{tst}{T} - 1.0 \right) + b \log_{10} \left(\frac{tst}{T} \right) + c \left(10.0^{pa(1.0-T/tst)} - 1.0 \right) + d \left(10.0^{pb(tst/T-1.0)} - 1.0 \right),$$

$$e_s(T) = p_0 \times 10^{pow}. \quad (3.20.13)$$

ここで、

$$a = -7.90298, \quad b = 5.02808, \quad c = -1.3816 \times 10^{-7}, \quad d = 8.1328 \times 10^{-3},$$

$$pa = 11.344, \quad pb = -3.49149, \quad tst = 373.15, \quad p_0 = 1.01325 \times 10^5$$

備考

特になし.

3.20.14 goff_gratch_i

機能

Goff-Gratch の式から温度を元に氷飽和で飽和水蒸気圧を計算する.

書式

result=goff_gratch_i(T, [dl])

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の飽和水蒸気圧 [Pa].

定義式

$$pow = a \left(\frac{t_{i0}}{T} - 1.0 \right) + b \log_{10} \frac{t_{i0}}{T} + c \left(1.0 - \frac{T}{t_{i0}} \right)$$

$$e_s(T) = p_0 \times 10^{pow}. \quad (3.20.14)$$

ここで、

$$a = -9.09718, \quad b = -3.56654, \quad c = 0.876793,$$

$$p_0 = 611.73, \quad t_{i0} = 273.16.$$

備考

特になし.

3.20.15 hypsometric_form

機能

ある高度における気圧の補正を行う。高度に海面を与えれば海面更正気圧を計算することができる。

書式

```
result=hypsometric_form( p, z, T, [z_t], [dl] )
```

引数

p	<R>	in	基準高度での圧力 [Pa].
z	<R>	in	基準高度 [m].
T	<R>	in	基準高度での温度 [K].
z_t	<R>	in	更正を行う高度 [m]. デフォルト値は 0 m.
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	z_t での圧力 [Pa].

定義式

対流圏における標準大気気温減率を $\Gamma = 6.5 \text{ K/km}$ として、高度 z_t での気圧 $p(z_t)$ は、既に気圧、温度の分かっている高度 z での値 $p(z), T(z)$ を用いて、

$$p(z_t) = p(z) \left(\frac{T(z) + \Gamma z}{T(z) + \Gamma z_t} \right)^{g/(\Gamma R_d)} \quad (3.20.15)$$

から求める。ここで、 R_d は乾燥大気における気体定数である。

備考

特になし。

3.20.16 LH

機能

キルヒホッフの式 (??) から潜熱の温度依存性を考慮した潜熱の値を計算する。

書式

```
result=LH( T, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	潜熱 [J/K kg].

定義式

$$LH(T) = LH_0 - 232(T - T_0), \quad LH_0 = 2.5 \times 10^5. \quad (3.20.16)$$

ここで, $T_0 = 273.15$ K である。

備考

特になし。

3.20.17 liquid_enthal

機能

Emanuel (1994) の式から温度と水物質から液水エンタルピーを計算する。

書式

```
result=liquid_enthal( T, ql, [qo], [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
ql	<R>	in	液水混合比 [kg/kg].
qo	<R(:)>	in	液水以外の水物質混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	液水エンタルピー [J/kg].

定義式

液水エンタルピーを k_w すると、

$$k_w \equiv (c_{pd} + r_t c_{pv})T - L_v r_l. \quad (3.20.17)$$

ここで、 c_{pd} , c_{pv} , L_v はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水蒸気の定圧比熱、潜熱であり、 T , r_l , r_t はそれぞれ温度、液水混合比、水物質混合比の総和である。

備考

- 液水以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。水蒸気についてもこの引数に渡す。

3.20.18 moist_enthal

機能

Emanuel (1994) の式から温度と水物質から湿潤エンタルピーを計算する。

書式

```
result=moist_enthal( T, qv, [qo], [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
qo	<R(:)>	in	水蒸気以外の水物質混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	湿潤エンタルピー [J/kg].

定義式

湿潤エンタルピーを k すると、

$$k = (c_{pd} + r_t c_l)T + L_v r. \quad (3.20.18)$$

ここで、 c_{pd} , c_l , L_v はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水の比熱、潜熱であり、 T , r , r_t はそれぞれ温度、水蒸気混合比、水物質混合比の総和である。

備考

- 水蒸気以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。

3.20.19 MSE_Emanuel

機能

Emanuel (1994) で定義されている湿潤静的エネルギーを計算する。

書式

```
result=MSE_Emanuel( T, qv, z, [qo], [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
z	<R>	in	高度 [m].
qo	<R(:)>	in	水蒸気以外の水物質混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	湿潤静的エネルギー [J/kg].

定義式

$$h = (c_{pd} + r_t c_l)T + L_v r + (1 + r_t)gz \quad (3.20.19)$$

から求める。ここで、 c_{pd}, c_l, L_v はそれぞれ乾燥大気、液水の定圧比熱、潜熱であり、 T, r_t, r, g, z はそれぞれ温度、水物質混合比の総和、水蒸気混合比、重力加速度、高度を表す。

備考

- 水蒸気以外の水物質混合比はそのカテゴリごとに別配列要素に格納すること。

3.20.20 qvP_2_e

機能

水蒸気混合比と圧力から水蒸気圧を計算する。

書式

```
result=qvP_2_e( qv, P, [dl] )
```

引数

qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
P	<R>	in	大気的全圧 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	水蒸気圧 [Pa].

定義式

水蒸気圧を e とすると、

$$e = p \frac{q_v}{\varepsilon + q_v}, \quad \varepsilon = \frac{R_d}{R_v}. \quad (3.20.20)$$

p, q_v はそれぞれ圧力、水蒸気混合比である。

備考

特になし。

3.20.21 qvT_2_Tv

機能

仮温度を定義式から計算する。

書式

```
result=qvT_2_Tv( qv, T, [dl] )
```

引数

qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
T	<R>	in	大気温度 [K].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	仮温度 [K].

定義式

仮温度を T_v とすると、

$$T_v \equiv T \frac{1 + q_v/\varepsilon}{1 + q_v} \quad (3.20.21)$$

ここで、 T, q_v はそれぞれ大気温度、水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.20.22 qvTP_2_RH

機能

水蒸気混合比と温度と圧力から相対湿度を計算する.

書式

result=qvTP_2_RH(qv, T, P, [opt], [d1])

引数

qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
T	<R>	in	大気温度 [K].
P	<R>	in	大気全圧 [Pa].
opt	<C(1)>	in	飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' .
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気相対湿度 [%].

定義式

計算過程は以下である.

$$qvP_2_e(qv, P) \Rightarrow \text{水蒸気圧 } e \Rightarrow eT_2_RH(e, T) \Rightarrow \text{相対湿度}$$

備考

特になし.

3.20.23 qv_2_sh

機能

水蒸気混合比から比湿を計算する.

書式

```
result=qv_2_sh( qv, [dl] )
```

引数

qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	比湿 [kg/kg].

定義式

比湿を sh とすると、

$$sh = \frac{q_v}{1.0 + q_v}. \quad (3.20.22)$$

q_v は水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.20.24 Reff

機能

水蒸気混合比から有効気体定数を計算する.

書式

```
result=Reff( qv, [dl] )
```

引数

qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	有効気体定数 [J/K kg].

定義式

有効気体定数を R' とすると、

$$R' \equiv R_d \frac{1 + q_v/\varepsilon}{1 + q_v}. \quad (3.20.23)$$

ここで、 R_d, q_v はそれぞれ乾燥大気的气体定数、水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.20.25 rhoP_2_T

機能

乾燥大気の状態方程式から、密度と気圧を与えて温度を得る.

書式

```
result=rhoP_2_T( rho, P, [dl] )
```

引数

rho	<R>	in	大気の密度 [kg/m ³].
P	<R>	in	大気の圧力 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の温度 [K].

定義式

大気の状態方程式 :

$$p = \rho RT.$$

ここで、 p, ρ, R, T はそれぞれ大気の圧力、密度、乾燥大気の気体定数、大気の温度である。すべての変数は MKS 単位系で処理される。

備考

特になし.

3.20.26 rhoT_2_P

機能

乾燥大気の状態方程式から、密度と温度を与えて気圧を得る.

書式

```
result=rhoT_2_P( rho, T, [dl] )
```

引数

rho	<R>	in	大気の密度 [kg/m ³].
T	<R>	in	大気の温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の気圧 [Pa].

定義式

大気の状態方程式：

$$p = \rho RT.$$

ここで、 p, ρ, R, T はそれぞれ大気の圧力、密度、乾燥大気の気体定数、大気の温度である。すべての変数は MKS 単位系で処理される。

備考

特になし。

3.20.27 RHTP_2_qv

機能

相対湿度と温度と圧力から水蒸気混合比を計算する。

書式

```
result=RHTP_2_qv( RH, T, P, [opt], [dl] )
```

引数

RH	<R>	in	大気の相対湿度 [%].
T	<R>	in	大気の温度 [K].
P	<R>	in	大気的全圧 [Pa].
opt	<C(1)>	in	飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' .
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].

定義式

計算過程は以下である。

$$\text{RHT_2_e}(\text{RH}, \text{T}) \Rightarrow \text{水蒸気圧 } e \Rightarrow \text{eP_2_qv}(e, P) \Rightarrow \text{水蒸気混合比}$$

備考

特になし。

3.20.28 RHT_2_e

機能

相対湿度と温度から水蒸気圧を計算する。

書式

```
result=RHT_2_e( RH, T, [opt], [dl] )
```

引数

RH	<R>	in	大気の相対湿度 [%].
T	<R>	in	大気の温度 [K].
opt	<C(1)>	in	飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' .
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の水蒸気分圧 [Pa].

定義式

相対湿度 RH と飽和水蒸気圧 e_s 、水蒸気分圧 e の定義式：

$$RH \equiv \frac{e}{e_s} \times 100 \quad (3.20.24)$$

を元に計算する。ここで、飽和水蒸気圧は温度から `es_Bolton` を用いて計算した値を用いる。

備考

特になし。

3.20.29 sh_2_qv

機能

水蒸気比湿から水蒸気混合比を計算する。

書式

```
result=sh_2_qv( sh, [dl] )
```

引数

sh	<R>	in	水蒸気比湿 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	水蒸気混合比 [kg/kg].

定義式

水蒸気混合比を q_v とすると、

$$q_v = \frac{sh}{1.0 - sh}. \quad (3.20.25)$$

sh は水蒸気比湿である。

備考

特になし.

3.20.30 tetens

機能

tetens の実験式から温度を元に飽和水蒸気圧を計算する.

書式

```
result=tetens( T, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の飽和水蒸気圧 [Pa].

定義式

$$e_s(T) = e_0 \times 10^{a \frac{T-T_0}{T-T_0+b}}, \quad \begin{cases} a = 7.5, b = 237.3 & (T \geq T_0) \\ a = 9.5, b = 265.5 & (T < T_0) \end{cases} \quad (3.20.26)$$

ここで, $T_0 = 273.15$ K, $e_s(T)$ は飽和水蒸気圧である。

備考

特になし.

3.20.31 thetaP_2_T

機能

湿位、圧力から温度を計算する.

書式

```
result=thetaP_2.T( theta, P, [dl] )
```

引数

theta	<R>	in	大気の湿位 [K].
P	<R>	in	大気の圧力 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の温度 [K].

定義式

温位の定義式：

$$T = \theta \left(\frac{P}{p_0} \right)^{R_d/C_{pd}} \quad (3.20.27)$$

から求める。ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし。

3.20.32 thetaT_2_P

機能

温位、温度から気圧を計算する。

書式

```
result=thetaT_2_P( theta, T, [dl] )
```

引数

theta	<R>	in	大気の温位 [K].
T	<R>	in	大気の温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の圧力 [Pa].

定義式

温位の定義式：

$$P = p_0 \left(\frac{T}{\theta} \right)^{C_{pd}/R_d} \quad (3.20.28)$$

から求める。ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし。

3.20.33 theta_dry

機能

乾燥大気における温位を計算する。

書式

```
result=theta_dry( T, P, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
P	<R>	in	大気の圧力 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	乾燥大気の温位 [K].

定義式

温位の定義式 :

$$\theta_d = T \left(\frac{p_0}{P} \right)^{R_d/C_{pd}} \quad (3.20.29)$$

から求める. ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし.

3.20.34 theta_moist

機能

湿潤大気における温位を計算する.

書式

result=theta_moist(T, P, qv, [dl])

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
P	<R>	in	大気の圧力 [Pa].
qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	湿潤大気の温位 [K].

定義式

湿潤大気における温位の定義式 :

$$\theta_m = T \left(\frac{p_0}{P} \right)^{pow}, \quad pow = \frac{R_d}{C_{pd}} \frac{1 + q_v/\varepsilon}{1 + q_v \times (C_{pv}/C_{pd})} \quad (3.20.30)$$

から求める. ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd}, R_v, C_{pv} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱、水蒸気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし.

3.20.35 thetai_Bolton

機能

Bolton (1980) の式から相当温位を計算する。

書式

```
result=thetae_Bolton( T, qv, pres, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気気圧 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	相当温位 [K].

定義式

相当温位を θ_e とすると、

$$\theta_e = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{a(1-bq_{vs})} \exp \left\{ q_{vs} \left(\frac{c}{T_{LCL}} \right) (1 + dq_{vs}) \right\}, \quad a = 0.2854, b = 0.28, c = 3376, d = 0.81 \quad (3.20.31)$$

ここで、 $T, p_0, p, T_{LCL}, q_{vs}$ はそれぞれ気温、1000 hPa、気圧、LCL 温度、飽和混合比である。

備考

特になし。

3.20.36 thetai_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から相当温位を計算する。

書式

```
result=thetae_Emanuel( T, qv, pres, [qo], [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気気圧 [Pa].
qo	<R(:)>	in	水蒸気以外の水物質混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	相当温位 [K].

定義式

相当温位を θ_e とすると、

$$\theta_e = T \left(\frac{p_0}{p_d} \right)^{R_d/(c_{pd}+c_l r_t)} (\mathcal{H})^{-r R_v/(c_{pd}+c_l r_t)} \exp \left[\frac{L_v r}{(c_{pd} + c_l r_t) T} \right] \quad (3.20.32)$$

ここで、 $T, r, r_t, p_0, p, \mathcal{H}$ はそれぞれ温度、水蒸気混合比、水物質混合比の総和、基準圧力、圧力、相対湿度である。また、 $c_{pd}, c_{pv}, c_l, R_d, R_v, L_v$ はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水蒸気の定圧比熱、液水の比熱、乾燥大気の気体定数、水蒸気の気体定数、潜熱である。

備考

- 水蒸気以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。

3.20.37 thetaes_Bolton

機能

Bolton (1980) の式から飽和相当温位を計算する。

書式

```
result=thetaes_Bolton( T, pres, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
pres	<R>	in	大気気圧 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	相当温位 [K].

定義式

相当温位を θ_{es} とすると、

$$\theta_{es} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{a(1-bq_{vs})} \exp \left\{ q_{vs} \left(\frac{c}{T} \right) (1 + dq_{vs}) \right\}, \quad a = 0.2854, b = 0.28, c = 3376, d = 0.81 \quad (3.20.33)$$

ここで、 T, p_0, p, q_{vs} はそれぞれ気温、1000 hPa、気圧、飽和混合比である。

備考

特になし。

3.20.38 thetal_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から液水温位を計算する。

書式

```
result=thetal_Emanuel( T, ql, pres, [qo], [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
ql	<R>	in	液水混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気気圧 [Pa].
qo	<R(:)>	in	液水以外の水物質混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	液水温度 [K].

定義式

液水温度を θ_l とすると、

$$\theta_l \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\chi \left(1 - \frac{r_l}{\varepsilon + r_t} \right)^\chi \times \left(1 - \frac{r_l}{r_t} \right)^{-\gamma} \exp \left[\frac{-L_v r_l}{(c_{pd} + r_t c_{pv}) T} \right], \quad (3.20.34)$$

$$\chi \equiv \left(\frac{R_d + r_t R_v}{c_{pd} + r_t c_{pv}} \right),$$

$$\gamma \equiv \left(\frac{r_t R_v}{c_{pd} + r_t c_{pv}} \right).$$

ここで、 T, r_l, r_t, p_0, p はそれぞれ温度、液水混合比、水物質混合比の総和、基準圧力、圧力である。また、 c_{pd}, c_{pv}, R_d, R_v はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水蒸気の定圧比熱、乾燥大気の気体定数、水蒸気の気体定数である。

備考

- 液水以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。また、ここには水蒸気の混合比も含まれる。

3.20.39 thetalv_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から液水仮温度を計算する。

書式

```
result=thetalv_Emanuel( T, ql, qv, pres, [qo], [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
ql	<R>	in	液水混合比 [kg/kg].
qv	<R>	in	水蒸気混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気気圧 [Pa].
qo	<R(:)>	in	ql, qv 以外の水物質混合比 [kg/kg].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	液水仮温度 [K].

定義式

液水仮温度を θ_{lv} とすると、

$$\theta_{lv} \equiv T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^\chi \left(1 - \frac{r_l}{\varepsilon + r_t} \right)^{\chi-1} \times \left(1 - \frac{r_l}{r_t} \right)^{-\gamma} \exp \left[\frac{-L_v r_l}{(c_{pd} + r_t c_{pv}) T} \right], \quad (3.20.35)$$

$$\chi \equiv \left(\frac{R_d + r_t R_v}{c_{pd} + r_t c_{pv}} \right),$$

$$\gamma \equiv \left(\frac{r_t R_v}{c_{pd} + r_t c_{pv}} \right).$$

ここで、 T_v, r_l, r_t, p_0, p はそれぞれ仮温度、液水混合比、水物質混合比の総和、基準圧力、圧力である。また、 c_{pd}, c_{pv}, R_d, R_v はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水蒸気の定圧比熱、乾燥大気の気体定数、水蒸気の気体定数である。

備考

- 液水以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。水蒸気についてもこの引数に渡す。

3.20.40 thetaw_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から湿球温度を計算する。

書式

```
result=thetaw_Emanuel( T, qv, pres, [eps], [d1] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
qv	<R>	in	大気水蒸気混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気気圧 [Pa].
eps	<R>	in	収束判定値.
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	湿球温位 [K].

定義式

偽断熱相当温位を θ_{ep} 、湿球温位を θ_w とすると、

$$\theta_{ep} = \theta_w \exp \left[q_{vs} (1 + 0.81 q_{vs}) \left(\frac{3376}{\theta_w} - 2.54 \right) \right] \quad (3.20.36)$$

という関係がある。この式を二分法による反復計算で θ_w について求める。ここで、 q_{vs} は飽和混合比であり、 θ_{ep} は `thetav.Bolton` を用いて計算する。

備考

- 収束判定値 `eps` はデフォルトでは $1.0e-6$ で計算される。

3.20.41 TthetavP_2_qv

機能

仮温位から水蒸気混合比を計算する。

書式

```
result=TthetavP_2_qv( T, thetav, pres, [d1] )
```

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
thetav	<R>	in	仮温位 [K].
pres	<R>	in	大気気圧 [Pa].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	水蒸気混合比 [kg kg-1].

定義式

仮温位を θ_v とすると、

$$q_v = \varepsilon \frac{T - \pi \theta_v}{\varepsilon \pi \theta_v - T}. \quad (3.20.37)$$

ここで、 $varepsilon \equiv R_d/R_v$ 、 $\pi \equiv (p/p_0)^{R_d/C_p}$ であり、 T は温度を表す。

備考

特になし。

3.20.42 thatavqvP_2_T

機能

仮温位と水蒸気から温度を計算する.

書式

```
result=thatavqvP_2.T( thatav, qv, pres, [dl] )
```

引数

thatav	<R>	in	大気の仮温位 [K].
qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気的气圧 [Pa].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	温度 [K].

定義式

仮温位を θ_v とすると、

$$\theta_v \equiv thatav_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_{pd}} . \quad (3.20.38)$$

ここで, $thatav_v, p_0, p$ はそれぞれ仮温度, 基準圧力, 大気圧であり, $thatav_v$ は?? で求められた値を元に計算する.

備考

特になし.

3.20.43 TvT_2_qv

機能

仮温度から水蒸気混合比を計算する.

書式

```
result=TvT_2.qv( Tv, T, [dl] )
```

引数

Tv	<R>	in	大気の仮温度 [K].
T	<R>	in	大気温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	水蒸気混合比 [kg kg-1].

定義式

仮温度を T_v とすると、

$$q_v = \varepsilon \frac{T - T_v}{\varepsilon T_v - T} \quad (3.20.39)$$

ここで、 T は大気の温度、 $\varepsilon \equiv R_d/R_v$ である。

備考

特になし。

3.20.44 qvTv_2_T

機能

水蒸気と仮温度から温度を計算する。

書式

`result=qvTv_2.T(qv, Tv, [dl])`

引数

qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
Tv	<R>	in	大気の仮温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	温度 [K].

定義式

仮温度を T_v とすると、

$$T = T_v \frac{1 + q_v}{1 + q_v/\varepsilon} \quad (3.20.40)$$

ここで、 T, q_v はそれぞれ大気の温度、水蒸気混合比である。

備考

特になし。

3.20.45 TP_2_qvs

機能

大気の温度と全圧から飽和混合比を計算する。ここで用いる飽和水蒸気圧の計算は `es_Bolton` による式を用いて行われるものとする。

書式

`result=TP_2.qvs(T, P, [opt], [dl])`

引数

T	<R>	in	大気温度 [K].
P	<R>	in	大気圧力 [Pa].
opt	<C(1)>	in	飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' .
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気飽和混合比 [kg/kg].

定義式

大気飽和混合比を q_{vs} とすると、その定義から

$$q_{vs} = \frac{\rho_v}{\rho_d}$$

である。ここで、 ρ_v , ρ_d はそれぞれ水蒸気の密度と乾燥大気密度である。理想気体の状態方程式から、それぞれの密度は

$$\rho_v = \frac{e_s}{R_v T}, \quad \rho_d = \frac{p_d}{R_d T}$$

である。ここで、 e_s, p_d, R_v, R_d, T はそれぞれ飽和水蒸気圧、乾燥大気分圧、水蒸気気体定数、乾燥大気気体定数、大気温度である。よって、

$$q_{vs} = \frac{R_d}{R_v} \frac{e_s}{p - e_s} \quad (3.20.41)$$

となる。ここで、乾燥大気分圧は大気全圧 p から飽和水蒸気圧を差し引いたものであるため、上式は成り立つ。 e_s は温度のみの関数であるため、大気温度と全圧を与えれば、飽和混合比が得られることがわかる。

備考

特になし。

3.20.46 TP_2_shs

機能

大気温度と全圧から飽和比湿を計算する。ここで用いる飽和水蒸気圧の計算は `es_Bolton` による式を用いて行われるものとする。

書式

```
result=TP_2_shs( T, P, [opt], [d1] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
P	<R>	in	大気の圧力 [Pa].
opt	<C(1)>	in	飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' .
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の飽和比湿 [kg/kg].

定義式

大気の飽和比湿を q_{vs} とすると、その定義から

$$q_{vs} = \frac{\rho_v}{\rho_d}$$

である。ここで、 ρ_v , ρ_d はそれぞれ水蒸気の密度と乾燥大気の密度である。理想気体の状態方程式から、それぞれの密度は

$$\rho_v = \frac{e_s}{R_v T}, \quad \rho_d = \frac{p_d}{R_d T}$$

である。ここで、 e_s, p_d, R_v, R_d, T はそれぞれ飽和水蒸気圧、乾燥大気に分圧、水蒸気の気体定数、乾燥大気の気体定数、大気の温度である。よって、

$$q_{vs} = \frac{R_d e_s}{R_v p} \quad (3.20.42)$$

となる。ここで、乾燥大気に分圧は大気的全圧 p から飽和水蒸気圧を差し引いたものであるため、上式は成り立つ。 e_s は温度のみの関数であるため、大気の温度と全圧を与えれば、飽和比湿が得られることがわかる。

備考

特になし。

3.20.47 TP_2_rho

機能

乾燥大気の状態方程式から、温度と気圧を与えて密度を得る。

書式

```
result=TP_2_rho( T, P, [d1] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
P	<R>	in	大気の圧力 [Pa].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の密度 [kg/m ³].

定義式

大気の状態方程式：

$$p = \rho RT.$$

ここで、 p, ρ, R, T はそれぞれ大気の圧力、密度、乾燥大気の気体定数、大気の温度である。すべての変数は MKS 単位系で処理される。

備考

特になし。

3.20.48 Tq_2_Trho

機能

温度と水物質から密度温度を計算する。

書式

result=Tq_2_Trho(T, qv, [qo], [dl])

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
qo	<R(:)>	in	水蒸気以外の水物質混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	密度温度 [K].

定義式

密度温度を T_ρ とすると、

$$T_\rho \equiv T \frac{1+r/\varepsilon}{1+r_t}. \quad (3.20.43)$$

ここで、 T, r, r_t はそれぞれ大気の温度、水蒸気混合比、水物質混合比の総和である。

備考

- 水蒸気以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。

3.20.49 TqvP_2_TLCL

機能

Bolton (1980) の式から LCL 高度での温度を計算する。

書式

result=TqvP_2_TLCL(T, qv, pres, [dl])

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気的气圧 [Pa].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	LCL での温度 [K].

定義式

LCL での気温を T_{LCL} とすると、

$$T_{LCL} = \frac{c}{a \ln T - \ln e - b} + 55, \quad a = 3.5, \quad b = 4.805, \quad c = 2840 \quad (3.20.44)$$

ここで、 e は水蒸気圧である。

備考

特になし.

3.20.50 TqvP_2_thetae

機能

相当温位を定義式から計算する.

書式

result=TqvP_2_thetae(T, qv, pres, [opt], [d1])

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気的气圧 [Pa].
opt	<C(1)>	in	飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' .
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	相当温位 [K].

定義式

相当温位を θ_e とすると、

$$\theta_e = \theta_d \exp \left[\frac{L(T_{LCL})q_{vs}}{C_{pd}T_{LCL}} \right] \quad (3.20.45)$$

ここで、 $\theta_d, L, C_{pd}, T_{LCL}, q_{vs}$ はそれぞれ乾燥大気の時、水蒸気の潜熱、乾燥定圧比熱、LCL 温度、飽和混合比である。

備考

特になし.

3.20.51 TqvP_2_thetaes

機能

飽和相当温位を定義式から計算する.

書式

```
result=TqvP_2_thetaes( T, pres, [opt], [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
pres	<R>	in	大気の気圧 [Pa].
opt	<C(1)>	in	飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' .
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	相当温位 [K].

定義式

飽和相当温位を θ_{es} とすると、

$$\theta_{es} = \theta_d \exp \left[\frac{L(T)q_{vs}}{C_{pd}T} \right] \quad (3.20.46)$$

ここで、 $\theta_d, L, C_{pd}, T, q_{vs}$ はそれぞれ乾燥大気の温位、水蒸気の潜熱、乾燥定圧比熱、温度、飽和混合比である。

備考

特になし.

3.20.52 TqvP_2_thetav

機能

仮温位を定義式から計算する.

書式

```
result=TqvP_2_thetav( T, qv, pres, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
qv	<R>	in	大気の水蒸気混合比 [kg/kg].
pres	<R>	in	大気的气圧 [Pa].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	仮温度 [K].

定義式

仮温度を θ_v とすると、

$$\theta_v \equiv T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_{pd}}. \quad (3.20.47)$$

ここで、 T_v, p_0, p はそれぞれ仮温度、基準圧力、大気のパ力であり、 T_v は?? で求められた値を元に計算する.

備考

特になし.

3.20.53 TTd_2_RH_Bolton

機能

Bolton (1980) の式から温度と露点温度に対応する水蒸気圧を求め、その値を元に相対湿度を計算する.

書式

```
result=TTd_2_RH_Bolton( T, Td, [d1] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
Td	<R>	in	大気の露点温度 [K].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の相対湿度 [%].

定義式

$$RH = \frac{e(T_d)}{e_s(T)} \times 100 \quad (3.20.48)$$

ここで、 RH, e, e_s, T, T_d はそれぞれ相対湿度、水蒸気圧、飽和水蒸気圧、温度、露点温度である。このとき、水蒸気圧はすべて Bolton (1980) の式を元に計算する.

備考

特になし.

3.20.54 TTd_2_RH_tetens

機能

tetens (1930) の式から温度と露点温度に対応する水蒸気圧を求め、その値を元に相対湿度を計算する。

書式

```
result=TTd_2_RH_tetens( T, Td, [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
Td	<R>	in	大気の露点温度 [K].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	大気の相対湿度 [%].

定義式

$$RH = \frac{e(T_d)}{e_s(T)} \times 100 \quad (3.20.49)$$

ここで、 RH, e, e_s, T, T_d はそれぞれ相対湿度, 水蒸気圧, 飽和水蒸気圧, 温度, 露点温度である。このとき、水蒸気圧はすべて tetens (1930) の式を元に計算する。

備考

特になし。

3.20.55 WSE_Emanuel

機能

Emanuel (1994) で定義されている液水静的エネルギーを計算する。

書式

```
result=WSE_Emanuel( T, ql, z, [qo], [dl] )
```

引数

T	<R>	in	大気の温度 [K].
ql	<R>	in	液水混合比 [kg/kg].
z	<R>	in	高度 [m].
qo	<R(:)>	in	液水以外の水物質混合比 [kg/kg].
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	液水静的エネルギー [J/kg].

定義式

$$h_w \equiv (c_{pd} + r_t c_{pv})T - L_v r_l + (1 + r_t)gz \quad (3.20.50)$$

から求める. ここで, c_{pd}, c_{pv}, L_v はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱, 水蒸気の定圧比熱, 潜熱であり, T, r_t, r_l, g, z はそれぞれ温度, 水物質混合比の総和, 液水混合比, 重力加速度, 高度を表す.

備考

- 液水以外の水物質混合比はそのカテゴリごとに別配列要素に格納すること。また, 液水以外なので, 水蒸気もこの引数に渡す。

3.20.56 rho_ocean

機能

UNESCO (1981) における海洋の状態方程式 (7) に基づいて, 海水の密度を計算する.

書式

```
result=rho_ocean( P, T, S, [d1] )
```

引数

P	<R>	in	海水の圧力 [Bar].
T	<R>	in	海水の温度 [C°].
S	<R>	in	海水の塩分濃度 [PSU].
d1	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	海水の密度 [kg m ⁻³].

定義式

密度 ρ は UNESCO (1981) の (7) 式 :

$$\rho(p, t, S) = \rho(0, t, S) \left[1 - \frac{p}{K(p, t, S)} \right]^{-1} \quad (3.20.51)$$

から求める. ここで, p, t, S はそれぞれ水圧 (Bar), 水温 (C°), 塩分濃度 (PSU) である. $\rho(0, t, S)$ は海面における海水の密度, $K(p, t, S)$ はバルク係数であり, それぞれ

$$\begin{aligned} \rho(0, t, S) &= \rho_w + \sum_{i=0}^4 b_i t^i S + \sum_{i=0}^2 c_i t^i S^{3/2} + d_0 S^2, \\ K(p, t, S) &= K(0, t, S) + Ap + Bp^2 \end{aligned} \quad (3.20.52)$$

で求められる。ただし、各式における係数および記号は以下のような値と定式で構成されている。

$$\rho_w = \sum_{i=0}^5 a_i t^i,$$

$$K(0, t, S) = K_w + \sum_{i=0}^3 f_i t^i S + \sum_{i=0}^2 g_i t^i S^{3/2},$$

$$A = A_w + \sum_{k=0}^2 i_k t^k S + j_0 S^{3/2},$$

$$B = B_w + \sum_{k=0}^2 m_k t^k S,$$

$$K_w = \sum_{k=0}^4 e_k t^k,$$

$$A_w = \sum_{k=0}^3 h_k t^k,$$

$$B_w = \sum_{i=0}^2 k_i t^i,$$

$$a_0 = 999.842594,$$

$$a_1 = 6.793952 \times 10^{-2},$$

$$a_2 = -9.095290 \times 10^{-3},$$

$$a_3 = 1.001685 \times 10^{-4},$$

$$a_4 = -1.120083 \times 10^{-6},$$

$$a_5 = 6.536332 \times 10^{-9},$$

$$b_0 = 8.24493 \times 10^{-1},$$

$$b_1 = -4.0899 \times 10^{-3},$$

$$b_2 = 7.6438 \times 10^{-5},$$

$$b_3 = -8.2467 \times 10^{-7},$$

$$b_4 = 5.3875 \times 10^{-9},$$

$$c_0 = -5.72466 \times 10^{-3},$$

$$c_1 = 1.0227 \times 10^{-4},$$

$$c_2 = -1.6546 \times 10^{-6},$$

$$d_0 = 4.8314 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}e_0 &= 19652.21, \\e_1 &= 148.4206, \\e_2 &= -2.327105, \\e_3 &= 1.360477 \times 10^{-2}, \\e_4 &= -5.155288 \times 10^{-5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_0 &= 54.6746, \\f_1 &= -6.03459 \times 10^{-1}, \\f_2 &= 1.09987 \times 10^{-2}, \\f_3 &= -6.1670 \times 10^{-5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_0 &= 7.944 \times 10^{-2}, \\g_1 &= 1.6483 \times 10^{-2}, \\g_2 &= -5.3009 \times 10^{-4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_0 &= 3.239908, \\h_1 &= 1.43713 \times 10^{-3}, \\h_2 &= 1.16092 \times 10^{-4}, \\h_3 &= -5.77905 \times 10^{-7},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_0 &= 2.2838 \times 10^{-3}, \\i_1 &= -1.0981 \times 10^{-5}, \\i_2 &= -1.6078 \times 10^{-6}, \\j_0 &= 1.91075 \times 10^{-4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_0 &= 8.50935 \times 10^{-5}, \\k_1 &= -6.12293 \times 10^{-6}, \\k_2 &= 5.2787 \times 10^{-8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_0 &= -9.9348 \times 10^{-7}, \\m_1 &= 2.0816 \times 10^{-8}, \\m_2 &= 9.1697 \times 10^{-10}.\end{aligned}$$

備考

特になし.

3.20.57 D26

機能

Lin et al. (2008) における定義に基づいて 26 度深度を計算する。

書式

```
result=D26( P, T, [undef], [dep_thres], [temp_thres], [neg], [dl] )
```

引数

P	<R(:)>	in	海水の圧力 [dBar] (後述).
T	<R(size(P))>	in	海水の温度 [°C].
undef	<R>	in	未定義値 (後述).
dep_thres	<R>	in	計算対象最浅深度 (後述) [dBar]. デフォルト = 0.0.
temp_thres	<R>	in	積分最深度での温度閾値 [degC]. デフォルト = 26.0.
neg	<L>	in	d26 以浅で 26 °C となる層の扱い (後述). デフォルト = <code>.true.</code> .
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	26 度深度 [m (dBar)].

定義式

海面から 26 度あるいは `temp_thres` となる初めの深度.

備考

- 第一引数である海水の圧力は単位が dBar であるため、静水圧を仮定すれば幾何深度と等価であることに注意する。
- 圧力は正值で定義され、配列要素番号の小さい方が浅くなるように値を格納しなければならない。温度もそれに対応させる。
- 引数 `dep_thres` は定義されたデータがこの深度より浅い深度まで存在するときに D26 の計算を行うオプションである。デフォルトは 0.0 が指定されており、この値が指定されている場合は、どのような深さから定義されたデータがあっても D26 の計算を試みる。例えば、`dep_thres=10.0` の場合、データが 11.0 dBar 以深にしか存在しない場合、D26 は 0.0 もしくは `undef` となる。
- 引数 `neg` は z_{26} より浅い深度で 26 度以下となる層が存在した場合、積分計算を行う際にその層を無視するか計算に含めるかのフラグである。`.true.` の場合、その層の計算は無視する。`.false.` ならその層も計算に含める。デフォルトは `.true.` で設定されている。`.false.` にした場合、温度差が負値となる場合も積分に含まれるため、状況によっては返される D26 が負値となる可能性がある。定義では、 z_{26} より浅い深度では成層安定を仮定しているため、必ず 26 度

より高温となるが, 実際には過渡的な不安定成層プロファイルとなっていることもあることに注意する.

3.20.58 OHC

機能

Lin et al. (2008) における定義に基づいて海洋貯熱量を計算する.

書式

```
result=OHC( P, T, [undef], [dep_thres], [temp_thres], [neg], [dl] )
```

引数

P	<R(:)>	in	海水の圧力 [dBar] (後述).
T	<R(size(P))>	in	海水の温度 [°C].
undef	<R>	in	未定義値 (後述).
dep_thres	<R>	in	計算対象最浅深度 (後述) [dBar]. デフォルト = 0.0.
temp_thres	<R>	in	積分最深度での温度閾値 [degC]. デフォルト = 26.0.
neg	<L>	in	d26 以浅で 26 °C となる層の扱い (後述). デフォルト = <code>.true.</code> .
dl	<I>	in	デバッグオプション.
戻り値	<R>	inout	海洋貯熱量 [kJ cm ⁻²].

定義式

海洋貯熱量 H は Lin et al. (2008) の定義に基づき,

$$H = \rho_0 C_p \int_{z_{26}}^{z_s} (T(z) - T_{26}) dz \quad (3.20.53)$$

から求める. ここで, ρ_0 , C_p はそれぞれ海水の標準密度 1026 kg m⁻³, 海水の定圧熱容量 4178 J K⁻¹kg⁻¹ である. また, $T(z)$ は各深度における海水温, $T_{26} = 26$ °C. z_{26} は $T(z = z_{26}) = T_{26}$ となる深度, z_s は z_{26} から浅い方向に向かって積分を行う任意の深度である. デフォルトでは $T_{26} = 26$ °C であるが, `temp_thres` で変更可能. ここで, z は上向きを正にとられていることに注意する. 一般に海洋貯熱量を計算する場合は海面 $z_s = 0$ が選択される. それぞれ, 各引数との対応は以下ようになる:

$$z \rightarrow P, \quad T(z) \rightarrow T, \quad H \rightarrow \text{OHC}.$$

備考

- 第一引数である海水の圧力は単位が dBar であるため, 静水圧を仮定すれば幾何深度と等価であることに注意する.

- 圧力は正值で定義され、配列要素番号の小さい方が浅くなるように値を格納しなければならない。温度もそれに対応させる。
- 引数 `dep_thres` は定義されたデータがこの深度より浅い深度まで存在するときに OHC の計算を行うオプションである。デフォルトは 0.0 が指定されており、この値が指定されている場合は、どのような深さから定義されたデータがあっても OHC の計算を試みる。例えば、`dep_thres=10.0` の場合、データが 11.0 dBar 以深にしか存在しない場合、OHC は 0.0 もしくは `undef` となる。
- 引数 `neg` は z_{26} より浅い深度で 26 度以下となる層が存在した場合、積分計算を行う際にその層を無視するか計算に含めるかのフラグである。`.true.` の場合、その層の計算は無視する。`.false.` ならその層も計算に含める。デフォルトは `.true.` で設定されている。`.false.` にした場合、温度差が負値となる場合も積分に含まれるため、状況によっては返される OHC が負値となる可能性がある。定義では、 z_{26} より浅い深度では成層安定を仮定しているため、必ず 26 度より高温となるが、実際には過渡的な不安定成層プロファイルとなっていることもあることに注意する。

3.21 Trajectory

速度場のデータを与えて、流線、流跡線の計算を行うルーチン集。

3.21.1 Backward_Traject_2d

機能

2 次元ベクトル場のデータからオフラインで後方流跡線解析を行う。

書式

```
call Backward_Traject_2d( dt, stime, step, ini_x, ini_y,  
t, x, y, u, v, traj_x, traj_y, FTF, [opt], [undef] )
```

引数

dt	<R>	in	計算する時間間隔 [s].
stime	<R>	in	初期位置での時刻 [s].
step	<I>	in	計算を行うステップ数.
ini_x	<R(:)>	in	初期位置 x [m].
ini_y	<R(size(ini_x))>	in	初期位置 y [m].
t	<R(:)>	in	速度場データのある時刻 (後述).
x	<R(:)>	in	右手系第一座標 [m].
y	<R(:)>	in	右手系第二座標 [m].
u	<R(size(x),size(y),size(t))>	in	x 方向のベクトル (後述).
v	<R(size(x),size(y),size(t))>	in	y 方向のベクトル (後述).
traj_x	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の x 位置座標 [m].
traj_y	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の y 位置座標 [m].
FTF	<L(size(ini_x))>	inout	計算領域外判定フラグ (後述).
opt	<C(*)>	in	時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム.
undef	R	in	領域外処理用未定義値 (後述).

定義式

与えられる速度場のデータが時刻 t_1 から t_n までの n 個存在し、その時間間隔は非一様とする。このとき、時刻 t_s から dt ステップで nt 回だけ流跡線を計算するときの模式図が図 3.1 である。速度場データのない時刻では、その前後の速度場データから線形内挿を行って速度場を計算している。流跡線の定義式は、座標 (x, y) において、2次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, t)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, t)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, t) = \mathbf{v}(x, y, t) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。流線計算と異なり、速度場が時間の関数でもあるため、パーセルの位置 $\mathbf{x}(x, y, t)$ も時間の関数となっていることがわかる。もし、速度場が定常であれば、速度ベクトルは時間に依存しないので、パーセルの位置ベクトルも時間に依存することはなくなる。このことから、定常な速度場において、流線と流跡線は一致することがわかる。

図 3.1 における各変数と引数の対応関係は以下のとおりである。

$$t_s : \text{stime}, \quad dt : \text{dt}, \quad nt : \text{step}, \quad n : \text{size}(t),$$

$$t_i : \text{t}(i)$$

備考

- オプション opt は流跡線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラースキーム.

HO1 ホインスキーム (修正オイラースキーム).

ME1 改良オイラースキーム.

RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム.

RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム.

これらのスキームの詳細については、付録 5.5.2 参照。

- 速度場データ u, v, w および、時刻データ t は時刻が逆向きに入れられなければならない。
- 流跡線が x, y で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する traj_x , traj_y の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `size(ini_x)` を 2 以上にすればその各の初期値に対応した流跡線が計算される。
- FTF は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` で指定される各位置と位置座標は速度場 u, v と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$\begin{aligned} h_1 \delta x_1 &= u_1 \delta t, & h_2 \delta x_2 &= u_2 \delta t \\ \Rightarrow \delta x_1 &= \frac{u_1}{h_1} \delta t, & \delta x_2 &= \frac{u_2}{h_2} \delta t \end{aligned}$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度)、

$$x_1 = \lambda, x_2 = \phi, h_1 = a \cos \phi, h_2 = a$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` のうち、`x`, `y` 方向を [rad] 単位で与えたとき、各座標系で [m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u, v を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow u, \quad \frac{v}{a} \rightarrow v$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

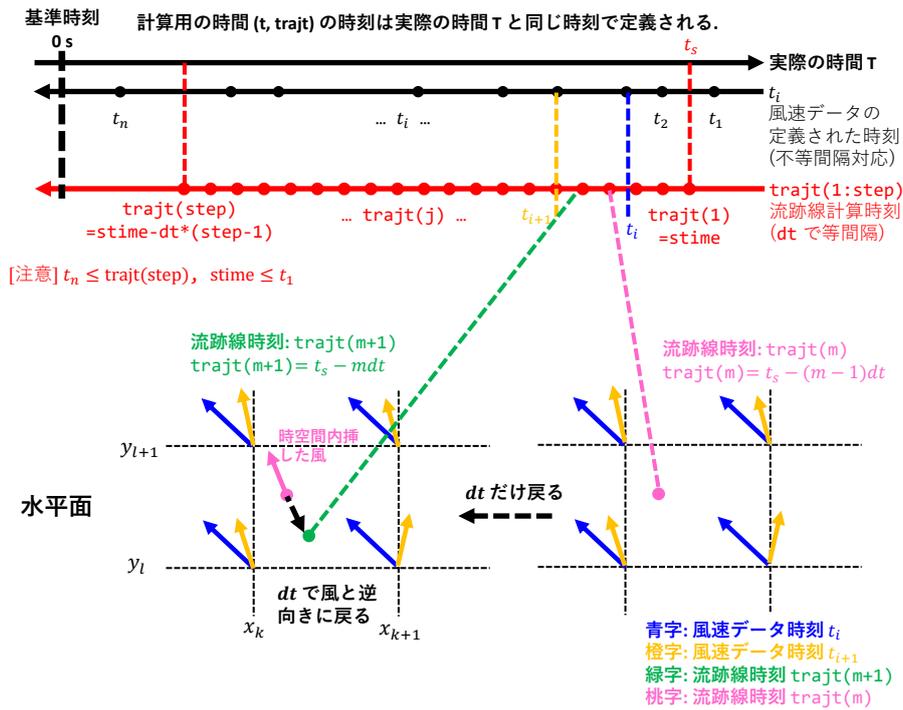


図 3.1: 2次元水平面内における後方流跡線計算時の風データ, 流跡線の位置, およびそれぞれの時間軸の概念図. 3次元もこれと同様.

3.21.2 Backward_Traject_3d

機能

3次元ベクトル場のデータからオフラインで後方流跡線解析を行う。

書式

```
call Backward_Traject_3d( dt, stime, step, ini_x, ini_y, ini_z,
  t, x, y, z, u, v, w, traj_x, traj_y, traj_z, FTF, [opt], [undef] )
```

引数

dt	<R>	in	計算する時間間隔 [s].
stime	<R>	in	初期位置での時刻 [s].
step	<I>	in	計算を行うステップ数.
ini_x	<R(:)>	in	初期位置 x [m].
ini_y	<R(size(ini_x))>	in	初期位置 y [m].
ini_z	<R(size(ini_x))>	in	初期位置 z [m].
t	<R(:)>	in	速度場データのある時刻 (後述).
x	<R(:)>	in	右手系第一座標 [m].
y	<R(:)>	in	右手系第二座標 [m].
z	<R(:)>	in	右手系第三座標 [m].
u	<R(size(x),size(y), size(z), size(t))>	in	x 方向のベクトル (後述).
v	<R(size(x),size(y), size(z), size(t))>	in	y 方向のベクトル (後述).
w	<R(size(x),size(y), size(z), size(t))>	in	z 方向のベクトル (後述).
traj_x	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の x 位置座標 [m].
traj_y	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の y 位置座標 [m].
traj_z	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の z 位置座標 [m].
FTF	<L(size(ini_x))>	inout	計算領域外判定フラグ (後述).
opt	<C(*)>	in	時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム.
undef	R	in	領域外処理用未定義値 (後述).

定義式

与えられる速度場のデータが時刻 t_1 から t_n までの n 個存在し、その時間間隔は非一様とする。このとき、時刻 t_s から dt ステップで nt 回だけ流跡線を計算するときの模式図が図 3.1 である。速度場データの無い時刻では、その前後の速度場データから線形内挿を行って速度場を計算している。流跡線の定義式は、座標 (x, y, z) において、3次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。流線計算と異なり、速度場が時間の関数でもあるため、パーセルの位置 $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ も時間の関数となっていることがわかる。もし、速度場が定常であれば、速度ベクトルは時間に依存しないので、パーセルの位置ベクトルも時間に依存することはなくなる。このことから、定常な速度場において、流線と流跡線は一致することがわかる。

図 3.1 における各変数と引数の対応関係は以下のとおりである。

$$t_s : \text{stime}, \quad dt : \text{dt}, \quad nt : \text{step}, \quad n : \text{size(t)},$$

$$t_i : t(i)$$

備考

- オプション `opt` は流跡線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラースキーム.

HO1 ホインスキーム (修正オイラースキーム).

ME1 改良オイラースキーム.

RK3 3 次ルンゲ・クッタスキーム.

RK4 4 次ルンゲ・クッタスキーム.

これらのスキームの詳細については、付録 5.5.2 参照。

- 速度場データ `u, v, w` および、時刻データ `t` は時刻が逆向きに入れられなければならない。
- 流跡線が `x, y, z` で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `size(ini_x)` を 2 以上にすればその各の初期値に対応した流跡線が計算される。
- `FTF` は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x, ini_y, ini_z, x, y, z, traj_x, traj_y, traj_z` で指定される各位置と位置座標は速度場 `u, v, w` と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$\begin{aligned} h_1 \delta x_1 &= u_1 \delta t, & h_2 \delta x_2 &= u_2 \delta t, & h_3 \delta x_3 &= u_3 \delta t \\ \Rightarrow \delta x_1 &= \frac{u_1}{h_1} \delta t, & \delta x_2 &= \frac{u_2}{h_2} \delta t, & \delta x_3 &= \frac{u_3}{h_3} \delta t \end{aligned}$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 $\delta x_i, u_i, h_i, (i = 1, 2, 3)$ はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2, x_3) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ, z) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度、 z は高度)、

$$x_1 = \lambda, x_2 = \phi, x_3 = z, h_1 = a \cos \phi, h_2 = a, h_3 = 1$$

となるため、引数 `ini_x, ini_y, ini_z, x, y, z, traj_x, traj_y, traj_z` のうち、`x, y` 方向を [rad] 単位、`z` 方向を [m] 単位で与えたとき、各座標系で

[m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u, v, w を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}, \quad w \rightarrow \mathbf{w}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.21.3 Forward_Traject_2d

機能

2次元ベクトル場のデータからオフラインで前方流跡線解析を行う。

書式

```
call Forward_Traject_2d( dt, stime, step, ini_x, ini_y, t, x, y, u, v,
traj_x, traj_y, FTF, [opt], [undef] )
```

引数

dt	<R>	in	計算する時間間隔 [s].
stime	<R>	in	初期位置での時刻 [s].
step	<I>	in	計算を行うステップ数.
ini_x	<R(:)>	in	初期位置 x [m].
ini_y	<R(size(ini_x))>	in	初期位置 y [m].
t	<R(:)>	in	速度場データのある時刻 (後述).
x	<R(:)>	in	右手系第一座標 [m].
y	<R(:)>	in	右手系第二座標 [m].
u	<R(size(x),size(y),size(t))>	in	x 方向のベクトル (後述).
v	<R(size(x),size(y),size(t))>	in	y 方向のベクトル (後述).
traj_x	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の x 位置座標 [m].
traj_y	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の y 位置座標 [m].
FTF	<L(size(ini_x))>	inout	計算領域外判定フラグ (後述).
opt	<C(*)>	in	時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム.
undef	R	in	領域外処理用未定義値 (後述).

定義式

与えられる速度場のデータが時刻 t_1 から t_n までの n 個存在し、その時間間隔は非一様とする。このとき、時刻 t_s から dt ステップで nt 回だけ流跡線を計算するときの模式図が図 3.2 である。速度場データのない時刻では、その前後の速度場データから線形内挿を行って速度場を計算している。流跡線の定義式は、座標 (x, y) において、2次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, t)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパー

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度)、

$$x_1 = \lambda, x_2 = \phi, h_1 = a \cos \phi, h_2 = a$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` のうち、`x`, `y` 方向を [rad] 単位で与えたとき、各座標系で $[m s^{-1}]$ 単位で測られた速度場 u , v を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow u, \quad \frac{v}{a} \rightarrow v$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

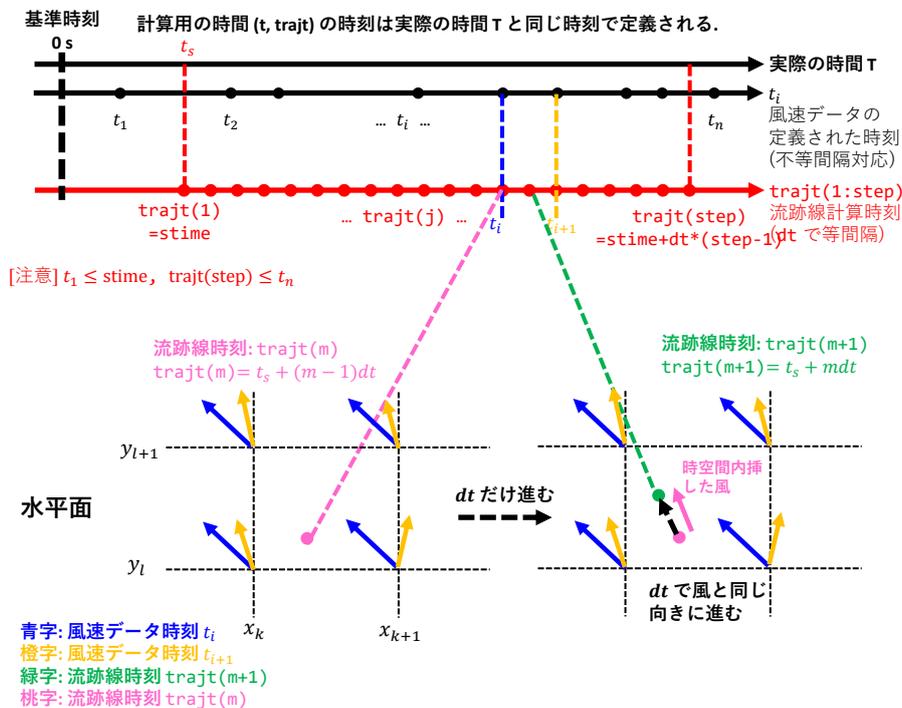


図 3.2: 2次元水平面内における前方流跡線計算時の風データ、流跡線の位置、およびそれぞれの時間軸の概念図。3次元もこれと同様。

3.21.4 Forward_Traject_3d

機能

3次元ベクトル場のデータからオフラインで前方流跡線解析を行う。

書式

```
call Forward_Traject_3d( dt, stime, step, ini_x, ini_y, ini_z,
t, x, y, z, u, v, w, traj_x, traj_y, traj_z, [opt], [undef] )
```

引数

dt	<R>	in	計算する時間間隔 [s].
stime	<R>	in	初期位置での時刻 [s].
step	<I>	in	計算を行うステップ数.
ini_x	<R(:)>	in	初期位置 x [m].
ini_y	<R(size(ini_x))>	in	初期位置 y [m].
ini_z	<R(size(ini_x))>	in	初期位置 z [m].
t	<R(:)>	in	速度場データのある時刻 (後述).
x	<R(:)>	in	右手系第一座標 [m].
y	<R(:)>	in	右手系第二座標 [m].
z	<R(:)>	in	右手系第三座標 [m].
u	<R(size(x),size(y), size(z), size(t))>	in	x 方向のベクトル (後述).
v	<R(size(x),size(y), size(z), size(t))>	in	y 方向のベクトル (後述).
w	<R(size(x),size(y), size(z), size(t))>	in	z 方向のベクトル (後述).
traj_x	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の x 位置座標 [m].
traj_y	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の y 位置座標 [m].
traj_z	<R(step,size(ini_x))>	inout	流跡線の z 位置座標 [m].
FTF	<L(size(ini_x))>	inout	計算領域外判定フラグ (後述).
opt	<C(*)>	in	時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム.
undef	R	in	領域外処理用未定義値 (後述).

定義式

与えられる速度場のデータが時刻 t_1 から t_n までの n 個存在し、その時間間隔は非一様とする。このとき、時刻 t_s から dt ステップで nt 回だけ流跡線を計算するときの模式図が図 3.2 である。速度場データの無い時刻では、その前後の速度場データから線形内挿を行って速度場を計算している。流跡線の定義式は、座標 (x, y, z) において、3次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。流線計算と異なり、速度場が時間の関数でもあるため、パーセルの位置 $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ も時間の関数となっていることがわかる。もし、速度場が定常であれば、速度ベクトルは時間に依存しないので、

パーセルの位置ベクトルも時間に依存することはなくなる。このことから、定常な速度場において、流線と流跡線は一致することがわかる。

図 3.2 における各変数と引数の対応関係は以下のとおりである。

$$t_s : \text{stime}, \quad dt : dt, \quad nt : \text{step}, \quad n : \text{size}(t),$$

$$t_i : t(i)$$

備考

- オプション `opt` は流跡線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラスキーム.

HO1 ホインスキーム (修正オイラスキーム).

ME1 改良オイラスキーム.

RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム.

RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム.

これらのスキームの詳細については、付録 5.5.2 参照。

- 流跡線が x , y , z で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `size(ini_x)` を 2 以上にすればその各の初期値に対応した流跡線が計算される。
- `FTF` は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` で指定される各位置と位置座標は速度場 u , v , w と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$h_1 \delta x_1 = u_1 \delta t, \quad h_2 \delta x_2 = u_2 \delta t, \quad h_3 \delta x_3 = u_3 \delta t$$

$$\Rightarrow \delta x_1 = \frac{u_1}{h_1} \delta t, \quad \delta x_2 = \frac{u_2}{h_2} \delta t, \quad \delta x_3 = \frac{u_3}{h_3} \delta t$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2, 3$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2, x_3) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに

与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ, z) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度、 z は高度)、

$$x_1 = \lambda, x_2 = \phi, x_3 = z, h_1 = a \cos \phi, h_2 = a, h_3 = 1$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` のうち、`x`, `y` 方向を [rad] 単位、`z` 方向を [m] 単位で与えたとき、各座標系で [m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u, v, w を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}, \quad w \rightarrow \mathbf{w}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.21.5 Stream_Line_2d

機能

2次元ベクトル場のデータから流線を計算する。

書式

```
call Stream_Line_2d( dt, step, ini_x, ini_y, x, y, u, v, traj_x, traj_y,
FTF, [opt], [undef] )
```

引数

<code>dt</code>	<R>	<code>in</code>	計算する時間間隔 [s].
<code>step</code>	<I>	<code>in</code>	計算を行うステップ数.
<code>ini_x</code>	<R>	<code>in</code>	初期位置 x [m].
<code>ini_y</code>	<R>	<code>in</code>	初期位置 y [m].
<code>x</code>	<R(:)>	<code>in</code>	右手系第一座標 [m].
<code>y</code>	<R(:)>	<code>in</code>	右手系第二座標 [m].
<code>u</code>	<R(size(x),size(y))>	<code>in</code>	x 方向のベクトル.
<code>v</code>	<R(size(x),size(y))>	<code>in</code>	y 方向のベクトル.
<code>traj_x</code>	<R(step)>	<code>inout</code>	流線の x 位置座標 [m].
<code>traj_y</code>	<R(step)>	<code>inout</code>	流線の y 位置座標 [m].
<code>FTF</code>	<L>	<code>inout</code>	計算領域外判定フラグ (後述).
<code>opt</code>	<C(*)>	<code>in</code>	時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム.
<code>undef</code>	R	<code>in</code>	領域外処理用未定義値 (後述).

定義式

流線の定義式は、座標 (x, y) において、2次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y)$ が定義されており、

この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y) = \mathbf{v}(x, y) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。

備考

- オプション `opt` は流線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラスキーム.

HO1 ホインスキーム (修正オイラスキーム).

ME1 改良オイラスキーム.

RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム.

RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム.

これらのスキームの詳細については、付録 5.5.2 参照。

- 流線が x, y で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する `traj_x`, `traj_y` の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `FTF` は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` で指定される各位置と位置座標は速度場 \mathbf{u} , \mathbf{v} と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$\begin{aligned} h_1 \delta x_1 &= u_1 \delta t, & h_2 \delta x_2 &= u_2 \delta t \\ \Rightarrow \delta x_1 &= \frac{u_1}{h_1} \delta t, & \delta x_2 &= \frac{u_2}{h_2} \delta t \end{aligned}$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度)、

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \phi, \quad h_1 = a \cos \phi, \quad h_2 = a$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` のうち、`x`, `y` 方向を [rad] 単位で与えたとき、各座標系で $[\text{m s}^{-1}]$ 単位で測られた速度場 \mathbf{u} , \mathbf{v} を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.21.6 Stream_Line_3d

機能

3次元ベクトル場のデータから流線を計算する。

書式

```
call Stream_Line_3d( dt, step, ini_x, ini_y, ini_z,
  x, y, z, u, v, w, traj_x, traj_y, traj_z, FTF, [opt], [undef] )
```

引数

dt	<R>	in	計算する時間間隔 [s].
step	<I>	in	計算を行うステップ数.
ini_x	<R>	in	初期位置 x [m].
ini_y	<R>	in	初期位置 y [m].
ini_z	<R>	in	初期位置 z [m].
x	<R(:)>	in	右手系第一座標 [m].
y	<R(:)>	in	右手系第二座標 [m].
z	<R(:)>	in	右手系第三座標 [m].
u	<R(size(x),size(y), size(z))>	in	x 方向のベクトル (後述).
v	<R(size(x),size(y), size(z))>	in	y 方向のベクトル (後述).
w	<R(size(x),size(y), size(z))>	in	z 方向のベクトル (後述).
traj_x	<R(step)>	inout	流線の x 位置座標 [m].
traj_y	<R(step)>	inout	流線の y 位置座標 [m].
traj_z	<R(step)>	inout	流線の z 位置座標 [m].
FTF	<L>	inout	計算領域外判定フラグ (後述).
opt	<C(*)>	in	時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム.
undef	R	in	領域外処理用未定義値 (後述).

定義式

流線の定義式は、座標 (x, y, z) において、3次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, z)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, z)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y, z) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。

備考

- オプション `opt` は流線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラースキーム。

HO1 ホインスキーム (修正オイラースキーム)。

ME1 改良オイラースキーム。

RK3 3 次ルンゲ・クッタスキーム。

RK4 4 次ルンゲ・クッタスキーム。

これらのスキームの詳細については、付録 5.5.2 参照。

- 流線が x , y , z で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `FTF` は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` で指定される各位置と位置座標は速度場 u , v , w と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$h_1 \delta x_1 = u_1 \delta t, \quad h_2 \delta x_2 = u_2 \delta t, \quad h_3 \delta x_3 = u_3 \delta t$$

$$\Rightarrow \delta x_1 = \frac{u_1}{h_1} \delta t, \quad \delta x_2 = \frac{u_2}{h_2} \delta t, \quad \delta x_3 = \frac{u_3}{h_3} \delta t$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2, 3$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2, x_3) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ, z) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度、 z は高度)、

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \phi, \quad x_3 = z, \quad h_1 = a \cos \phi, \quad h_2 = a, \quad h_3 = 1$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` のうち、 x , y 方向を [rad] 単位、 z 方向を [m] 単位で与えたとき、各座標系で [m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u , v , w を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}, \quad w \rightarrow \mathbf{w}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.22 typhoon_analy

台風解析用のスペシャルルーチン集. 主に、デカルト座標系におけるデータを円筒座標系に変換し、接線平均等の処理を行うものの集合体。

3.22.1 grad_wind_pres

機能

傾度風平衡場を満たす気圧場を計算する

書式

```
call grad_wind_pres( r, coril, v, rho, r_ref, p_ref, pres )
```

引数

r	<R,DP(:)>	in	動径座標 [m].
coril	<R,DP(size(r))>	in	コリオリパラメータ [1/s].
v	<R,DP(size(r))>	in	軸対称流 [m/s].
rho	<R,DP>	in	サウンディングの密度 [kg/m ³].
r_ref	<R,DP>	in	積分定数の位置座標 [m].
p_ref	<R,DP>	in	r_ref での気圧 [Pa].
pres	<R,DP(size(r))>	inout	平衡場の気圧 [Pa].

定義式

傾度風平衡：

$$\frac{V_g^2}{r} + fV_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

を満たすように、気圧場の水平分布を計算する。ここで、 V_g は軸対称風、 ρ は大気密度、 p は気圧、 r, z は動径、鉛直座標、 f はコリオリパラメータである。傾度風平衡の式から、軸対称風を元に r 方向に数値積分：

$$\int_{r_{ref}}^r \frac{\partial p}{\partial r} dr = \int_{r_0}^r \rho \left[\frac{V_g^2}{r} + fV_g \right] dr$$

を行う。この式を計算すると、

$$p(r) = p_{ref} + \int_{r_{ref}}^r \rho \left[\frac{V_g^2}{r} + fV_g \right] dr$$

となるので、与えられた軸対称風から各半径における気圧の値が求められる。

備考

なし。

3.22.2 hydro_grad_eqb

**本手続きは精度未検証 (バグ入り)

機能

サウンディングと軸対称流から静力学・傾度風平衡場の計算を行う。

書式

```
call hydro_grad_eqb( r, z, coril, v, pres_rb, rho_rb, pres_zb, rho_zb,
&
pres, rho, [dl], [bound] )
```

引数

r	<R,DP(:)>	in	動径座標 [m].
z	<R,DP(:)>	in	鉛直座標 [m].
coril	<R,DP(size(r),size(z))>	in	コリオリパラメータ [1/s].
v	<R,DP(size(r),size(z))>	in	軸対称流 [m/s].
pres_rb	<R,DP(size(z))>	in	圧力の動径境界条件 [Pa].
rho_rb	<R,DP(size(z))>	in	密度の動径境界条件 [kg/m ³].
pres_zb	<R,DP(size(z))>	in	圧力の鉛直境界条件 [Pa].
rho_zb	<R,DP(size(z))>	in	密度の鉛直境界条件 [kg/m ³].
pres	<R,DP(size(r),size(z))>	inout	平衡場の気圧 [Pa].
rho	<R,DP(size(r),size(z))>	inout	平衡場の密度 [kg/m ³].
bound	<C(2)>	in	境界条件の位置 (後述). デフォルト "ot".
dl	<I>	in	デバッグオプション.

定義式

各高度において、静力学平衡：

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (3.22.54)$$

および、傾度風平衡：

$$\frac{V_g^2}{r} + fV_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.22.55)$$

を満たすように、気圧場、密度場の鉛直構造を修正する。ここで、 V_g は軸対称風、 ρ は大気密度、 p は気圧、 r, z は動径、鉛直座標、 f はコリオリパラメータである。これらの構造が求められれば、理想気体の状態方程式から、温度場も自然に得られる。また、これらの平衡状態が実現しているということは、傾度風平衡版の温度風平衡も同時に成り立つことがわかる^{*15}。

修正の方法は、各変数について差分連立方程式を立て、ガウスの消去法で解く。以

^{*15}傾度風平衡版の温度風の関係式は Emanuel (1986) 等を参照。

下にその流れを示す。静力学平衡が圧力と密度の支配的な平衡関係であるため、動径の境界条件 (p_b, ρ_b と表記する) が静力学平衡しているとして、圧力、密度はそれらからの偏差 ($p' \equiv p - p_b, \rho' \equiv \rho - \rho_b$) として取り扱う。よって「動径方向の」境界値は圧力、密度ともに偏差がゼロとなる。すなわち、(3.22.54), (3.22.55) 式は

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho', \quad (3.22.56)$$

$$(\rho_b + \rho') F(r, z) = \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad F(r, z) \equiv \frac{V_g^2}{r} + fV_g \quad (3.22.57)$$

を考えるが、以降では表記の便宜上プライムを除去して偏差を取り扱う。

これらの式を 2 次精度の中心差分近似で差分化すると、各物理量を整数 (i, j) 点で定義した際、それぞれの方向に半格子ずれた点 ($r_I, z_J, I \equiv i + 1/2, J \equiv j + 1/2$) で差分方程式が立てられる:

$$\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta z} + g\rho_{i,J} = 0, \quad (r = r_i, z = z_j), \quad (3.22.58)$$

$$\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta r} - F_{I,j}\rho_{I,j} = F_{I,j}\rho_{b,j}, \quad (r = r_I, z = z_j), \quad (3.22.59)$$

ここで、 $\Delta r, \Delta z$ は動径、鉛直方向の格子間隔、 i, j は動径、鉛直方向の格子番号を表す。添字 b は動径境界条件での値を意味する。上式は境界上では定義されないことに注意する。したがって、方程式の個数は $(N_r - 1)(N_z - 1)$ となる (N_r, N_z はそれぞれ動径、鉛直方向の格子点数)。また、任意の離散変数 $f_{i,j}$ について

$$f_{I,j} \equiv \frac{f_{i+1,j} + f_{i,j}}{2}, \quad f_{i,J} \equiv \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j}}{2}.$$

上式を用いると (3.22.58), (3.22.59) 式は

$$\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta z} + g\frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} = 0, \quad (3.22.60)$$

$$\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta r} - \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} \frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} \rho_{b,j}, \quad (3.22.61)$$

(3.22.60), (3.22.61) 式は 1 階の 2 次元偏微分方程式であるため、 r, z のそれぞれについて 1 箇所の境界条件を設定すれば解が一意に求まる。各変数の境界条件は r_i, z_j の両方向それぞれ 1 点で指定すればよい。本ルーチンでは動径方向の境界条件 (鉛直プロファイル情報) を `pres_zb, rho_zb` で、鉛直方向の境界条件 (動径プロファイル情報) を `pres_rb, rho_rb` で指定する。このとき、各方向でどちらの領域端を境界とするかは `bound` で指定する。`bound(1:1)` は動径 ("i" なら内側, "o" なら外側を境界), `bound(2:2)` は鉛直 ("b" なら下端, "t" なら上端を境界) の境界条件を指定する。デフォルトは `bound(1:2)="ot"` である。(3.22.60), (3.22.61) 式は未知変数を要素にもつ列ベクトル \mathbf{x} について既知の行列 A と既知の列ベクトル \mathbf{b} を用いた

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

という形で表現できる。したがって、 A の逆行列 A^{-1} が存在するとき、

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

から解が一意に求められる。 $A, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ の具体的な形は、各要素を $a_{k,l}, b_k, x_l$, $k \equiv k(m(i,j))$, $l \equiv l(n,i,j)$ として [n は未知変数の種類, m は差分方程式の定義点に対応するマップ関数であり, (3.22.60) 式なら $m = (i, J)$, (3.22.61) 式なら $m = (I, j)$ となる], 境界に隣接していない点では

$$\begin{aligned} a_{k(i,J),l(p,i,j)} &\equiv -\frac{1}{\Delta z}, & a_{k(i,J),l(p,i,j+1)} &\equiv \frac{1}{\Delta z}, & a_{k(i,J),l(\rho,i,j)} &\equiv \frac{g}{2} = a_{k(i,J),l(\rho,i,j+1)}, \\ a_{k(I,j),l(p,i,j)} &\equiv -\frac{1}{\Delta r}, & a_{k(I,j),l(p,i+1,j)} &\equiv \frac{1}{\Delta r}, & a_{k(I,j),l(\rho,i,j)} &\equiv -\frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} = a_{k(I,j),l(\rho,i+1,j)}, \\ b_{k(i,J)} &\equiv 0, & b_{k(I,j)} &\equiv \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} \rho_{b,j}, & x_{l(p,i,j)} &\equiv p_{i,j}, & x_{l(\rho,i,j)} &\equiv \rho_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.22.62)$$

動径方向の境界 ($i = 1$ あるいは $i = N_r$) に隣接する点 ($I = 1 + 1/2$ あるいは $N_r - 1/2$) では

$$\begin{aligned} a_{k(1+1/2,j),l(p,2,j)} &\equiv \frac{1}{\Delta r}, & a_{k(1+1/2,j),l(\rho,2,j)} &\equiv -\frac{F_{2,j} + F_{1,j}}{2}, \\ b_{k(1+1/2,j)} &\equiv \frac{F_{2,j} + F_{1,j}}{2} \rho_{b,j}. \end{aligned} \quad (3.22.63)$$

あるいは

$$\begin{aligned} a_{k(N_r-1/2,j),l(p,N_r-1,j)} &\equiv -\frac{1}{\Delta r}, & a_{k(N_r-1/2,j),l(\rho,N_r-1,j)} &\equiv -\frac{F_{N_r,j} + F_{N_r-1,j}}{2}, \\ b_{k(N_r-1/2,j)} &\equiv \frac{F_{N_r,j} + F_{N_r-1,j}}{2} \rho_{b,j}. \end{aligned} \quad (3.22.64)$$

鉛直方向の境界 ($j = 1$ あるいは $j = N_z$) に隣接する点 ($J = 1 + 1/2$ あるいは $N_z - 1/2$) では

$$\begin{aligned} a_{k(i,1+1/2),l(p,i,2)} &\equiv \frac{1}{\Delta z}, & a_{k(i,1+1/2),l(\rho,i,2)} &\equiv \frac{g}{2}, \\ b_{k(i,1+1/2)} &\equiv \frac{p_{i,1}}{\Delta z} - \frac{g}{2} \rho_{i,1}, \end{aligned} \quad (3.22.65)$$

あるいは

$$\begin{aligned} a_{k(i,N_z-1/2),l(p,i,N_z-1)} &\equiv -\frac{1}{\Delta z}, & a_{k(i,N_z-1/2),l(\rho,i,N_z-1)} &\equiv \frac{g}{2}, \\ b_{k(i,N_z-1/2)} &\equiv -\frac{p_{i,N_z}}{\Delta z} - \frac{g}{2} \rho_{i,N_z}. \end{aligned} \quad (3.22.66)$$

で表現される。 k, l はそれぞれ方程式の定義される格子点 I, J と未知変数の定義される格子点 i, j を列ベクトル, 行列の要素番号に割り当てるマップ関数である。

備考

なし。

3.22.3 hydro_grad_eqb_it

機能

サウンディングと軸対称流から静力学・傾度風平衡場の計算を行う。

書式

```
call hydro_grad_eqb_it( r, z, coril, v, pres_s, rho_s, pres, rho, &
  [error], [dl] )
```

引数

r	<R,DP(:)>	in	動径座標 [m].
z	<R,DP(:)>	in	鉛直座標 [m].
coril	<R,DP(size(r),size(z))>	in	コリオリパラメータ [1/s].
v	<R,DP(size(r),size(z))>	in	軸対称流 [m/s].
pres_s	<R,DP(size(z))>	in	サウンディングの気圧 [Pa].
rho_s	<R,DP(size(z))>	in	サウンディングの密度 [kg/m ³].
pres	<R,DP(size(r),size(z))>	inout	平衡場の気圧 [Pa].
rho	<R,DP(size(r),size(z))>	inout	平衡場の密度 [kg/m ³].
error	<R,DP>	in	イタレーションの収束条件. デフォルト = 10 ⁻⁵ .
dl	<I>	in	デバッグオプション.

定義式

各高度において、静力学平衡：

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (3.22.67)$$

および、傾度風平衡：

$$\frac{V_g^2}{r} + fV_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.22.68)$$

を満たすように、1次元のサウンディングデータから気圧場、密度場の鉛直構造を修正する。ここで、 V_g は軸対称風、 ρ は大気密度、 p は気圧、 r, z は動径、鉛直座標、 f はコリオリパラメータである。これらの構造が求められれば、理想気体の状態方程式から、温度場も自然に得られる。また、これらの平衡状態が実現しているということは、傾度風平衡版の温度風平衡も同時に成り立つことがわかる^{*16}。

修正の方法は、反復法を用いた収束による修正である。以下にその流れを示す。初期には密度、気圧場を各高度について水平一様に与えておく。また、修正を行う際の基準状態は熱帯低気圧の中心から十分離れた $r(nr)$, $z(nz)$, $nr=size(r)$, $nz=size(z)$ とする。この基準状態は方程式を反復させる際の境界条件となる。

(3.22.67) を (3.22.68) に代入して、 ρ を消去すると、

$$\frac{\partial p}{\partial r} + F(r, z) \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad F(r, z) \equiv \frac{1}{g} \left(\frac{V_g^2}{r} + fV_g \right) \quad (3.22.69)$$

^{*16}傾度風平衡版の温度風の関係式は Emanuel (1986) 等を参照。

となる。一方、 $\partial(3.22.67)/\partial r$, $\partial(3.22.68)/\partial z$ を計算し、それぞれ足し合わせることで p を消去すると、

$$\begin{aligned} F \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial F}{\partial z} &= -\frac{\partial \rho}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(\ln \rho) + F \frac{\partial}{\partial z}(\ln \rho) &= -\frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.22.70)$$

となる。つまり、 p, ρ についてそれぞれ独立な構造方程式が得られたことになる。これらを有限差分法を用いた反復計算によって数値的に値を求める。

これらの式を差分化すると、

$$\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta r} + F_{i,j} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta z} = 0, \quad (3.22.71)$$

$$\frac{\ln \rho_{i+1,j} - \ln \rho_{i,j}}{\Delta r} + F_{i,j} \frac{\ln \rho_{i,j+1} - \ln \rho_{i,j}}{\Delta z} = -\frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\Delta z}, \quad (3.22.72)$$

となる。ここで、 Δr , Δz は動径、鉛直方向の格子間隔、 i, j は動径、鉛直方向の格子番号を表す。なお、元の方程式は 1 階の 2 次元偏微分方程式であるため、 r, z のそれぞれについて 1 箇所の境界条件を設定すれば解が一意に求まる。先述した基準点がこの境界条件に相当し、本ルーチンでは上端 ($j = nz$)、遠方 ($i = nr$) で境界となる。よって、上記の有限差分では 1 次精度の後方差分を用いた。この差分法なら、境界条件を参照点としてそれ以外の点を全て求めることができる。上式を格子点 (i, j) で整理すると、

$$p_{i,j} = (\Delta z + F_{i,j} \Delta r)^{-1} [p_{i+1,j} \Delta z + F_{i,j} p_{i,j+1} \Delta r], \quad (3.22.73)$$

$$\ln \rho_{i,j} = (\Delta z + F_{i,j} \Delta r)^{-1} [\ln \rho_{i+1,j} \Delta z + F_{i,j} \ln \rho_{i,j+1} \Delta r + (F_{i,j+1} - F_{i,j}) \Delta r], \quad (3.22.74)$$

となる。収束計算の初期値は引数で与えられるサウンディングデータを水平一様に設定する。繰り返しにおける収束判定は 1 ステップ前との変化量が `error` 以下なら反復を終了するように設定している。

備考

なし。

3.22.4 hydro_grad_eqbp_it

機能

サウンディングと軸対称流から静力学・傾度風平衡場の計算を行う。

書式

```
call hydro_grad_eqbp_it( r, p, coril, v, zph_s, temp_s, zph, temp, &
[error], [dl] )
```

引数

r	<R,DP(:)>	in	動径座標 [m].
z	<R,DP(:)>	in	鉛直座標 [Pa].
coril	<R,DP(size(r),size(z))>	in	コリオリパラメータ [1/s].
v	<R,DP(size(r),size(z))>	in	軸対称流 [m/s].
zph_s	<R,DP(size(z))>	in	サウンディングの高度 [m].
temp_s	<R,DP(size(z))>	in	サウンディングの温度 [K].
zph	<R,DP(size(r),size(z))>	inout	平衡場のジオポテンシャル高度 [m].
temp	<R,DP(size(r),size(z))>	inout	平衡場の温度 [K].
error	<R,DP>	in	イタレーションの収束条件. デフォルト = 10^{-5} .
dl	<I>	in	デバッグオプション.

定義式

各高度において、静力学平衡：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\ln p)} = -RT \quad (3.22.75)$$

および、傾度風平衡：

$$\frac{V_g^2}{r} + fV_g = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (3.22.76)$$

を満たすように、1次元のサウンディングデータからジオポテンシャル高度場、温度場の鉛直構造を修正する。ここで、 V_g は軸対称風、 T は大気温度、 Φ はジオポテンシャル、 r, p は動径、鉛直座標、 f はコリオリパラメータ、 R は乾燥大気の気体定数である。これらの平衡状態が実現しているということは、傾度風平衡版の温度風平衡も同時に成り立つことがわかる^{*17}。

修正には反復法を用いる。以下にその流れを示す。初期には温度、ジオポテンシャル場を各圧力高度について水平一様に与えておく。また、修正を行う際の基準状態は熱帯低気圧の中心から十分離れた $r(nr)$ 、 $p(nz)$ 、 $nr=size(r)$ 、 $nz=size(p)$ とする。この基準状態は方程式を反復させる際の境界条件となる。

$\partial(3.22.75)/\partial r$ 、 $\partial(3.22.76)/\partial \ln p$ を計算し、それぞれ足し合わせることで Φ を消去すると、

$$R \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial F}{\partial \ln p}, \quad F(r, p) \equiv \left(\frac{V_g^2}{r} + fV_g \right) \quad (3.22.77)$$

となる。(3.22.76)、(3.22.77) を有限差分法を用いた反復計算によって数値的に値を求める。

これらの式を差分化すると、

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta r} = F_{i,j}, \quad (3.22.78)$$

$$\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta r} = -\frac{1}{R} \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\ln(p_{j+1}/p_j)}, \quad (3.22.79)$$

^{*17}傾度風平衡版の温度風の関係式は Emanuel (1986) 等を参照。

となる。ここで、 Δr は動径方向の格子間隔、 i, j は動径、鉛直方向の格子番号を表す。なお、元の方程式は 1 階の 2 次元偏微分方程式であるため、 r, p のそれぞれについて 1 箇所の境界条件を設定すれば解が一意に求まる。先述した基準点がこの境界条件に相当し、本ルーチンでは上端 ($j = nz$)、遠方 ($i = nr$) で境界となる。よって、上記の有限差分では 1 次精度の後方差分を用いた。この差分法なら、境界条件を参照点としてそれ以外の点を全て求めることができる。上式を格子点 (i, j) で整理すると、

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{i+1,j} - F_{i,j} \Delta r, \quad (3.22.80)$$

$$T_{i,j} = T_{i+1,j} + \frac{\Delta r}{R} \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\ln(p_{j+1}/p_j)}, \quad (3.22.81)$$

となる。収束計算の初期値は引数で与えられるサウンディングデータを水平一様に設定する。繰り返しにおける収束判定は 1 ステップ前との変化量が `error` 以下なら反復を終了するように設定している。

備考

なし。

3.22.5 Cart_conv_scal

機能

任意のスカラー量を円筒座標系からデカルト座標系に変換する。

書式

```
call Cart_conv_scal( r, theta, v, x, y, xc, yc, u, &
  [undef], [undefg], [undefgc], &
  [stdopt], [axis] )
```

引数

<code>r</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の動径座標.
<code>theta</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の接線座標 [rad].
<code>v</code>	<code><R,DP(size(r),size(theta))></code>	<code>in</code>	変換前の値.
<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第一座標.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第二座標.
<code>xc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	x 系での円筒座標原点 (後述).
<code>yc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	y 系での円筒座標原点 (後述).
<code>u</code>	<code><R,DP(size(x),size(y))></code>	<code>inout</code>	右手系での変換後の スカラー.
<code>[undef]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均可能半径外の値 (後述).
<code>[undefg]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均内での欠損値.
<code>[undefgc]</code>	<code><C(3)></code>	<code>in</code>	<code>undefg</code> が設定 されたときの処理 (後述).
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> .
<code>axis</code>	<code><C(2)></code>	<code>in</code>	座標系 (後述).

定義式

円筒座標系 (r, θ) で定義されているスカラーデータを, その原点が 2 次元デカルト座標系 (x, y) の点 (x_c, y_c) に位置するようにデカルト座標系に変換する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ をデカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ に変換する式は

$$u_{i,j} = v_{m,n} + \frac{v_{m+1,n} - v_{m,n}}{r_{m+1} - r_m}(r_m - r_m) + \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\theta_{n+1} - \theta_n}(\theta_n - \theta_n) \\ + \frac{(v_{m+1,n+1} - v_{m,n+1} - v_{m+1,n} + v_{m,n})}{(r_{m+1} - r_m)(\theta_{n+1} - \theta_n)}(r_m - r_m)(\theta_n - \theta_n)$$

である^{*18}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_{m,n} : \mathbf{v},$$

$$r_m : \mathbf{r}, \quad \theta_n : \mathbf{theta}$$

備考

- 座標間の概念図は図?? 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合, デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが, `stdopt` を `.true.` に設定しておけば, 出力しない.
- オプション引数 `undef` は変換可能半径外に存在する変換量の配列に代入される未定義値である。ここで, 変換可能半径とは, 円筒座標系で変換を行う半径の

^{*18}この式は??参照。

最大値 $r(\text{size}(r))$ のことである。もし、この半径が計算領域 x, y の外に出た場合、はみ出している部分は変換ができない。このはみ出し部分の、変換が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。

- オプション引数 `undefgc` は変換領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように変換を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は変換領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入られる。この状況において、`undefgc` の値は

inc 座標変換を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は変換操作に入れずに、有効値が入っている点のみで変換操作を行う。

err 座標変換を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、変換値は `undefg` となる。

`undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、`inc` として計算される。

- 引数 `axis` は現在サポートされていない。

3.22.6 Cart_mean_scal

機能

任意のスカラー量を接線平均した円筒座標系から 2 次元デカルト座標系に変換する。

書式

```
call Cart_mean_scal( r, v, x, y, xc, yc, u, &
  [undef], [undefg], [undefgc], &
  [stdopt], [forcer0], [axis] )
```

引数

<code>r</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の動径座標.
<code>v</code>	<code><R,DP(size(r))></code>	<code>in</code>	変換前の値.
<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第一座標.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第二座標.
<code>xc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	x 系での円筒座標原点 (後述).
<code>yc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	y 系での円筒座標原点 (後述).
<code>u</code>	<code><R,DP(size(x),size(y))></code>	<code>inout</code>	右手系での変換後の スカラー.
<code>[undef]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均可能半径外の値 (後述).
<code>[undefg]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均内での欠損値.
<code>[undefgc]</code>	<code><C(3)></code>	<code>in</code>	<code>undefg</code> が設定 されたときの処理 (後述).
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> .
<code>forcer0</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	中心点内挿フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> .
<code>axis</code>	<code><C(2)></code>	<code>in</code>	座標系 (後述).

定義式

1次元の動径方向円筒座標系 (r) で定義されているスカラーデータを, その原点が2次元デカルト座標系 (x, y) の点 (x_c, y_c) に位置するようにデカルト座標系に変換する. 座標系の変換は双線形内挿を行う.

円筒座標系 (r_m) で定義されるスカラー量 v_m をデカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ に変換する式は

$$u_{i,j} = v_m + \frac{v_{m+1} - v_m}{r_{m+1} - r_m} (r_{m+1} - r_m)$$

である*19. このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_m : \mathbf{v}, \quad r_m : \mathbf{r}$$

備考

- 座標間の概念図は図?? 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合, デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが, `stdopt` を `.true.` に設定しておけば, 出力しない.
- オプション引数 `undef` は変換可能半径外に存在する変換量の配列に代入される未定義値である. ここで, 変換可能半径とは, 円筒座標系で変換を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである. もし, この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合, はみ出している部分は変換ができない. このはみ出し部分の, 変換が行え

*19 この式は??参照。

ない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。

- オプション引数 `undefgc` は変換領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように変換を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は変換領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入れられる。この状況において、`undefgc` の値は

inc 座標変換を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は変換操作に入れずに、有効値が入っている点のみで変換操作を行う。

err 座標変換を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、変換値は `undefg` となる。

`undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、**inc** として計算される。

- 引数 `forcer0` は中心点の処理に関するフラグ。 `.true.` なら、接線平均量のうち、中心点に最も近い動径方向の座標点での値をそのまま与える。このとき、引数 `v` が中心点で値を与えていたとしても、隣接点での `v` が強制的に与えられる。 `.false.` なら、そのような強制を行わず、`v` が中心点で与えられていれば、その値がそのまま代入され、与えられていなければ未定義値が代入される。
- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する。変換前のデータがデカルト座標系であるなら、`axis='xy'` と指定する。球面緯度経度座標系であるなら、`axis='ll'` と指定する。デフォルトではデカルト座標系が指定されている。

3.22.7 tangent_conv_scal

機能

任意のスカラー量をデカルト座標系から円筒座標系に変換する。

書式

```
call tangent_conv_scal( x, y, xc, yc, u, r, theta, v, &
  [undef], [undefg], [undefgc], &
  [stdopt], [axis] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第一座標.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第二座標.
<code>xc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	x 系での円筒座標原点 (後述).
<code>yc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	y 系での円筒座標原点 (後述).
<code>u</code>	<code><R,DP(size(x),size(y))></code>	<code>in</code>	右手系での変換前の スカラー.
<code>r</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の動径座標.
<code>theta</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の接線座標 [rad].
<code>v</code>	<code><R,DP(size(r),size(theta))></code>	<code>inout</code>	変換後の値.
<code>[undef]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均可能半径外の値 (後述).
<code>[undefg]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均内での欠損値.
<code>[undefgc]</code>	<code><C(3)></code>	<code>in</code>	<code>undefg</code> が設定 されたときの処理 (後述).
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code>
<code>axis</code>	<code><C(2)></code>	<code>in</code>	座標系 (後述).

定義式

2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に、スカラーデータを変換し、 θ 方向に平均化する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

デカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ を円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ に変換する式は

$$v_{m,n} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} (x_m - x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} (y_n - y_j) \\ + [u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}] \frac{(x_m - x_i)(y_n - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

である*20。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : x, \quad y_j : y, \quad u_{i,j} : u, \quad v_{m,n} : v, \\ r_m : r, \quad \theta_n : theta$$

備考

- 座標間の概念図は図 3.3 参照。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領

*20 この式は??参照。

域 x, y の外に出た場合, はみ出している部分は平均ができない. このはみ出し部分の, 平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている. もし, `undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される.

- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において, 欠損値 `undefg` が設定されている場合, どのように平均を行うかを判定する. このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない. `undefg` は接線平均領域内において, デカルト座標系で欠損値が存在する場合, デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入られる. この状況において, `undefgc` の値は

inc 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, その点での値は平均操作に入れずに, 有効値が入っている点のみで平均操作を行う. これに対応して, 内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる.

err 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, 平均値は `undefg` となる. アノマリ計算においては, この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる.

`undefg` が設定されており, `undefgc` が指定されていないデフォルトでは, `inc` として計算される.

- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する. 変換前のデータがデカルト座標系であるなら, `axis='xy'` と指定する. 球面緯度経度座標系であるなら, `axis='ll'` と指定する. デフォルトではデカルト座標系が指定されている.

3.22.8 tangent_mean_anom_scal

機能

任意のスカラー量をデカルト座標系から円筒座標系に変換し, 接線方向に平均したアノマリーを計算する.

書式

```
call tangent_mean_anom_scal( x, y, xc, yc, u, r, theta, v, &
[undef], [undefg], [undefgc], &
[stdopt], [axis] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第一座標.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第二座標.
<code>xc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	x 系での円筒座標原点 (後述).
<code>yc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	y 系での円筒座標原点 (後述).
<code>u</code>	<code><R,DP(size(x),size(y))></code>	<code>in</code>	右手系でのアノマリをとるスカラー.
<code>r</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の動径座標.
<code>theta</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の接線座標 [rad].
<code>v</code>	<code><R,DP(size(r),size(theta))></code>	<code>inout</code>	アノマリ値.
<code>[undef]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均可能半径外の値 (後述).
<code>[undefg]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均内での欠損値.
<code>[undefgc]</code>	<code><C(3)></code>	<code>in</code>	<code>undefg</code> が設定されたときの処理 (後述).
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code>
<code>axis</code>	<code><C(2)></code>	<code>in</code>	座標系 (後述).

定義式

2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に、スカラーデータを変換し、 θ 方向に平均化する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

デカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ を円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ に変換する式は

$$v_{m,n} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} (x_m - x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} (y_n - y_j) \\ + [u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}] \frac{(x_m - x_i)(y_n - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

である*21。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : x, \quad y_j : y, \quad u_{i,j} : u, \quad v_{m,n} : v, \\ r_m : r, \quad \theta_n : theta$$

備考

- 座標間の概念図は図 3.3 参照。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領

*21 この式は??参照。

域 x, y の外に出た場合, はみ出している部分は平均ができない. このはみ出し部分の, 平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている. もし, `undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される.

- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において, 欠損値 `undefg` が設定されている場合, どのように平均を行うかを判定する. このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない. `undefg` は接線平均領域内において, デカルト座標系で欠損値が存在する場合, デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入られる. この状況において, `undefgc` の値は

inc 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, その点での値は平均操作に入れずに, 有効値が入っている点のみで平均操作を行う. これに対応して, 内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる.

err 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, 平均値は `undefg` となる. アノマリ計算においては, この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる.

`undefg` が設定されており, `undefgc` が指定されていないデフォルトでは, `inc` として計算される.

- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する. 変換前のデータがデカルト座標系であるなら, `axis='xy'` と指定する. 球面緯度経度座標系であるなら, `axis='ll'` と指定する. デフォルトではデカルト座標系が指定されている.

3.22.9 tangent_mean_anom_scal_Cart

機能

任意のスカラー量を接線方向に平均したアノマリーを計算し, デカルト座標系に戻す.

書式

```
call tangent_mean_anom_scal( x, y, xc, yc, scal, r, theta, scal_anom,
    [undef], [undefg], [undefgc], [stdopt], [axis] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	デカルト第一座標.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	デカルト第二座標.
<code>xc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	デカルト x 系での円筒座標原点 (後述).
<code>yc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	デカルト y 系での円筒座標原点 (後述).
<code>scal</code>	<code><R,DP(size(x),size(y))></code>	<code>in</code>	デカルト系でのアノマリをとるスカラー.
<code>r</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の動径座標.
<code>theta</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の接線座標 [rad].
<code>scal_anom</code>	<code><R,DP(size(x),size(y))></code>	<code>inout</code>	デカルト系でのアノマリの値.
<code>[undef]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均可能半径外の値 (後述).
<code>[undefg]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均内での欠損値.
<code>[undefgc]</code>	<code><C(3)></code>	<code>in</code>	<code>undefg</code> が設定されたときの処理 (後述).
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> .
<code>axis</code>	<code><C(2)></code>	<code>in</code>	座標系 (後述).

定義式

`tangent_mean_scal` で計算した接線平均値を用いて、元のデカルト系での値のアノマリを計算する。デカルト座標系の各点での円筒座標系中心からの距離を元に、その距離の近接両端での接線平均値を内挿処理し、その内挿値をそのデカルト座標系での接線平均値とする。

備考

- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は平均ができない。このはみ出し部分の、平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。
- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように平均を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は接線平均領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入れられる。この状況において、`undefgc` の値は
 - `inc` 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は平均操作に入れずに、有効値が入っている点のみで平均操作を行う。これに対応して、内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる。

err 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, 平均値は `undefg` となる. アノマリ計算においては, この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる.

`undefg` が設定されており, `undefgc` が指定されていないデフォルトでは, `inc` として計算される.

- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する. 変換前のデータがデカルト座標系であるなら, `axis='xy'` と指定する. 球面緯度経度座標系であるなら, `axis='ll'` と指定する. デフォルトではデカルト座標系が指定されている.

3.22.10 `tangent_mean_anom_vec`

機能

デカルト座標系で定義された任意の 2 次元ベクトルをデカルト座標系から円筒座標系に変換し, 接線方向に平均し, そのアノマリをとる. このとき, 判別フラグを用いることで, 動径方向成分と接線方向成分に分割できる.

書式

```
call tangent_mean_anom_vec( charc, x, y, xc, yc, u1, u2, r, theta, v,  
  
[undef], [undefg], [undefgc], [stdopt] )
```

引数

charc	<C(6)>	in	接線成分か動径成分のどちらに平均するか. "scalar" = 動径外向き成分. "vector" = 接線反時計成分.
x	<R,DP(:)>	in	デカルト第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	デカルト第二座標.
xc	<R,DP>	in	デカルト x 系での円筒座標原点 (後述).
yc	<R,DP>	in	デカルト y 系での円筒座標原点 (後述).
u1	<R,DP(size(x),size(y))>	in	デカルト系での平均するベクトル. x 成分.
u2	<R,DP(size(x),size(y))>	in	デカルト系での平均するベクトル. y 成分.
r	<R,DP(:)>	in	円筒座標系の動径座標.
theta	<R,DP(:)>	in	円筒座標系の接線座標 [rad].
v	<R,DP(size(r),size(theta))>	inout	アノマリの値.
[undef]	<R,DP>	in	接線平均可能半径外の値 (後述).
[undefg]	<R,DP>	in	接線平均内での欠損値.
[undefgc]	<C(3)>	in	undefg が設定されたときの処理 (後述).
stdopt	<L>	in	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは .false.

定義式

行う処理は `tangent_mean_scal` とほとんど同じ. 最初にフラグ `charc` でデカルト系ベクトルを円筒系ベクトルに変換し, そのうちフラグ成分のみをスカラーとして計算すれば, 上の処理が実現される. ここで, 任意のデカルト系におけるベクトルを $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ とし, 円筒座標系の位置ベクトルを $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ とする. ここで, \mathbf{e}_r は動径方向外向きの基底ベクトルである. このとき, この位置ベクトルはデカルト座標系で表現すると, $\mathbf{r} = (x, y)$ で表現できるので, デカルト座標系同士の内積は

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{r}| |\mathbf{u}_r|$$

という量を表現することになる. ここで, \mathbf{u}_r はデカルト系でのベクトルの動径成分である. よって, これを距離で割れば動径方向外向きのベクトルが得られることになる. 接線方向の成分もこれと同様の考え方で, 位置ベクトルとデカルト系ベクトルの外積から反時計回りを正とする円筒座標系の接線成分を抽出することができる. 2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に, スカラーデータを変換し, θ 方向に平均化する. 座標系の変換は双線形内挿を行う.

備考

- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は平均ができない。このはみ出し部分の、平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。
- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように平均を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は接線平均領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入られる。この状況において、`undefgc` の値は
 - `inc` 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は平均操作に入れずに、有効値が入っている点のみで平均操作を行う。これに対応して、内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる。
 - `err` 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、平均値は `undefg` となる。アノマリ計算においては、この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる。`undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、`inc` として計算される。

3.22.11 tangent_mean_scal

機能

任意のスカラー量をデカルト座標系から円筒座標系に変換し、接線方向に平均する。

書式

```
call tangent_mean_scal( x, y, xc, yc, u, r, theta, v, &
  [undef], [undefg], [undefgc], &
  [stdopt], [axis] )
```

引数

<code>x</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第一座標.
<code>y</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	右手系第二座標.
<code>xc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	x 系での円筒座標原点 (後述).
<code>yc</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	y 系での円筒座標原点 (後述).
<code>u</code>	<code><R,DP(size(x),size(y))></code>	<code>in</code>	右手系での平均するスカラー.
<code>r</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の動径座標.
<code>theta</code>	<code><R,DP(:)></code>	<code>in</code>	円筒座標系の接線座標 [rad].
<code>v</code>	<code><R,DP(size(r))></code>	<code>inout</code>	接線平均したスカラー.
<code>[undef]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均可能半径外の値 (後述).
<code>[undefg]</code>	<code><R,DP></code>	<code>in</code>	接線平均内での欠損値.
<code>[undefgc]</code>	<code><C(3)></code>	<code>in</code>	<code>undefg</code> が設定されたときの処理 (後述).
<code>stdopt</code>	<code><L></code>	<code>in</code>	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> .
<code>axis</code>	<code><C(2)></code>	<code>in</code>	座標系 (後述).

定義式

2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に、スカラーデータを変換し、 θ 方向に平均化する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

デカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ を円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ に変換する式は

$$v_{m,n} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} (x_m - x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} (y_n - y_j) \\ + [u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}] \frac{(x_m - x_i)(y_n - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

である*22。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_{m,n} : \mathbf{v},$$

$$r_m : \mathbf{r}, \quad \theta_n : \mathbf{theta}$$

備考

- 座標間の概念図は図 3.3 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は平均ができない。このはみ出し

*22 この式は??参照。

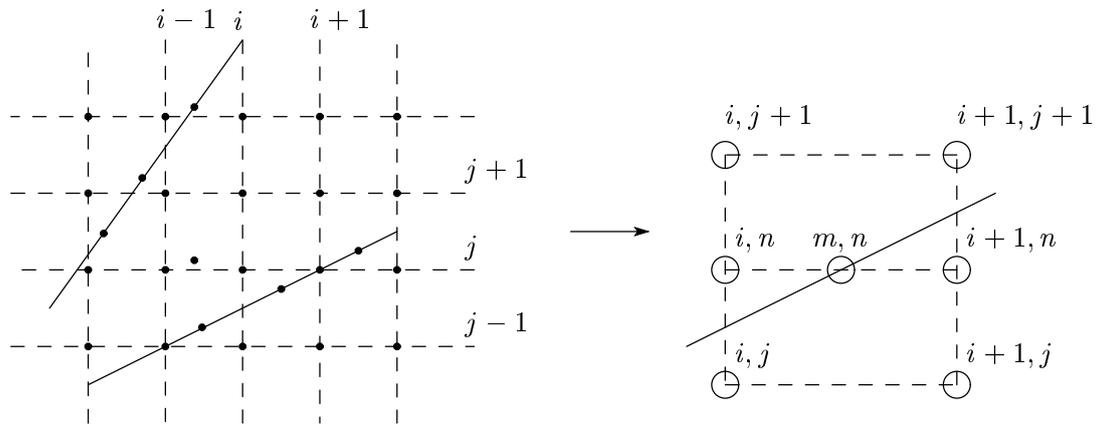


図 3.3: デカルト座標系から円筒座標系への双線形補間の概念. 円筒座標系で m, n 点を求めたい場合は, デカルト座標系で j 方向に内挿を計算し, その内挿点から i 方向に線形内挿する.

部分の, 平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている. もし, `undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される.

- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において, 欠損値 `undefg` が設定されている場合, どのように平均を行うかを判定する. このオプションは `undefg` が設定されていない場合は機能しない. `undefg` は接線平均領域内において, デカルト座標系で欠損値が存在する場合, デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入られる. この状況において, `undefgc` の値は

inc 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, その点での値は平均操作に入れずに, 有効値が入っている点のみで平均操作を行う. これに対応して, 内挿点が欠損の場合は平均も欠損となる.

err 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, 平均値は `undefg` となる. 平均計算においては, この平均値を参照する平均計算点のすべてで欠損となる.

`undefg` が設定されており, `undefgc` が指定されていないデフォルトでは, `inc` として計算される.

- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する. 変換前のデータがデカルト座標系であるなら, `axis='xy'` と指定する. 球面緯度経度座標系であるなら, `axis='ll'` と指定する. デフォルトではデカルト座標系が指定されている.

3.22.12 tangent_median_scal

機能

任意のスカラー量をデカルト座標系から円筒座標系に変換し、接線方向に中央値を求める。

書式

```
call tangent_median_scal( x, y, xc, yc, u, r, theta, v, &
  [undef], [undefg], [undefgc], &
  [stdopt], [axis] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
xc	<R,DP>	in	x 系での円筒座標原点 (後述).
yc	<R,DP>	in	y 系での円筒座標原点 (後述).
u	<R,DP(size(x),size(y))>	in	右手系でのスカラー.
r	<R,DP(:)>	in	円筒座標系の動径座標.
theta	<R,DP(:)>	in	円筒座標系の接線座標 [rad].
v	<R,DP(size(r))>	inout	接線方向のスカラー中央値.
[undef]	<R,DP>	in	接線平均可能半径外の値 (後述).
[undefg]	<R,DP>	in	接線平均内での欠損値.
[undefgc]	<C(3)>	in	undefg が設定されたときの処理 (後述).
stdopt	<L>	in	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> .
axis	<C(2)>	in	座標系 (後述).

定義式

2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に、スカラーデータを変換し、 θ 方向について中央値を求める。座標系の変換は双線形内挿を行う。

デカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ を円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ に変換する式は

$$v_{m,n} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}(x_m - x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}(y_n - y_j) \\ + \frac{[u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}]}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}(x_m - x_i)(y_n - y_j)$$

である^{*23}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_{m,n} : \mathbf{v},$$

^{*23}この式は??参照。

$$r_m : r, \quad \theta_n : \text{theta}$$

備考

- 座標間の概念図は図 3.3 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は平均ができない。このはみ出し部分の、平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。
- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように平均を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は接線平均領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入られる。この状況において、`undefgc` の値は
 - inc** 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は平均操作に入れずに、有効値が入っている点のみで平均操作を行う。これに対応して、内挿点が欠損の場合は平均も欠損となる。
 - err** 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、平均値は `undefg` となる。平均計算においては、この平均値を参照する平均計算点のすべてで欠損となる。`undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、`inc` として計算される。
- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する。変換前のデータがデカルト座標系であるなら、`axis='xy'` と指定する。球面緯度経度座標系であるなら、`axis='ll'` と指定する。デフォルトではデカルト座標系が指定されている。

3.22.13 `tangent_mean_vec`

機能

デカルト座標系で定義された任意の 2 次元ベクトルをデカルト座標系から円筒座標系に変換し、接線方向に平均する。このとき、判別フラグを用いることで、動径方向成分と接線方向成分に分割できる。

書式

```
call tangent_mean_vec( charc, x, y, xc, yc, u1, u2, r, theta, v,
  [undef], [undefg], [undefgc], [stdopt] )
```

引数

charc	<C(6)>	in	接線成分か動径成分の どちらに平均するか. "scalar" = 動径外向き成分. "vector" = 接線反時計成分.
x	<R,DP(:)>	in	デカルト第一座標.
y	<R,DP(:)>	in	デカルト第二座標.
xc	<R,DP>	in	デカルト x 系での円筒座標原点 (後述).
yc	<R,DP>	in	デカルト y 系での円筒座標原点 (後述).
u1	<R,DP(size(x),size(y))>	in	デカルト系での平均するベクトル. x 成分.
u2	<R,DP(size(x),size(y))>	in	デカルト系での平均するベクトル. y 成分.
r	<R,DP(:)>	in	円筒座標系の動径座標.
theta	<R,DP(:)>	in	円筒座標系の接線座標 [rad].
v	<R,DP(size(r))>	inout	接線平均したスカラー.
[undef]	<R,DP>	in	接線平均可能半径外の値 (後述).
[undefg]	<R,DP>	in	接線平均内での欠損値.
[undefgc]	<C(3)>	in	undefg が設定 されたときの処理 (後述).
stdopt	<L>	in	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> .

定義式

行う処理は `tangent_mean_scal` とほとんど同じ. 最初にフラグ `charc` でデカルト系ベクトルを円筒系ベクトルに変換し, そのうちフラグ成分のみをスカラーとして計算すれば, 上の処理が実現される. ここで, 任意のデカルト系におけるベクトルを $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ とし, 円筒座標系の位置ベクトルを $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ とする. ここで, \mathbf{e}_r は動径方向外向きの基底ベクトルである. このとき, この位置ベクトルはデカルト座標系で表現すると, $\mathbf{r} = (x, y)$ で表現できるので, デカルト座標系同士の内積は

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{r}| |\mathbf{u}_r|$$

という量を表現することになる. ここで, \mathbf{u}_r はデカルト系でのベクトルの動径成分である. よって, これを距離で割れば動径方向外向きのベクトルが得られることになる. 接線方向の成分もこれと同様の考え方で, 位置ベクトルとデカルト系ベクトルの外積から反時計回りを正とする円筒座標系の接線成分を抽出することができる.

備考

- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は平均ができない。このはみ出し部分の、平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。
- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように平均を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は接線平均領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入られる。この状況において、`undefgc` の値は
 - inc** 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は平均操作に入れずに、有効値が入っている点のみで平均操作を行う。これに対応して、内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる。
 - err** 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、平均値は `undefg` となる。アノマリ計算においては、この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる。`undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、`inc` として計算される。

3.22.14 CPS_Hart

機能

Hart (2003a) の手法を用いて、低気圧位相空間 (CPS) パラメータを計算する。詳細は北畠 (2011; 天気) を参照のこと。低気圧の半径 500 km 以内における力学・熱力学場の構造から、その低気圧の構造的特徴について分類するためのパラメータである。

書式

```
call CPS_Hart( x, y, center, z300, z600, z900, mv, B, VTL, VTU )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	x 方向座標 [m].
y	<R,DP(:)>	in	y 方向座標 [m].
center	<R,DP(2)>	in	低気圧中心の座標 (後述).
z300	<R,DP(size(x),size(y))>	in	300 hPa のジオポテンシャル高度 [m].
z600	<R,DP(size(x),size(y))>	in	600 hPa のジオポテンシャル高度 [m].
z900	<R,DP(size(x),size(y))>	in	900 hPa のジオポテンシャル高度 [m].
mv	<R,DP(2)>	in	移動速度 [m/s] (後述).
B	<R,DP>	in	対称性パラメータ [m] (後述).
VTL	<R,DP>	in	下層温度核パラメータ [m/s] (後述).
VTU	<R,DP>	in	上層温度核パラメータ [m/s] (後述).

定義式

低気圧中心から 500 km 半径以内において、以下のパラメータを計算する。

$$B = \left(\overline{Z_{600hPa} - Z_{900hPa}|_{Right}} - \overline{Z_{600hPa} - Z_{900hPa}|_{Left}} \right) \quad (3.22.82)$$

$$-V_T^L = \left. \frac{\partial(\Delta Z)}{\partial \ln p} \right|_{900hPa}^{600hPa} \quad (3.22.83)$$

$$-V_T^U = \left. \frac{\partial(\Delta Z)}{\partial \ln p} \right|_{600hPa}^{300hPa} \quad (3.22.84)$$

$$(3.22.85)$$

ここで、 Z_i は i 面高度におけるジオポテンシャル高度、 ΔZ は同一高度面における半径 500 km 以内での $Z_{max} - Z_{min}$ 、 p は圧力である。また、上線は 500 km 以内での平均値を表す。

「Right」および「Left」という表記は、低気圧の中心の移動方向に相対的に右側、左側ということの意味している。つまり、これらをまとめると、図??のようになる。

パラメータ B は低気圧移動方向の右と左での平均的な層厚の差を表し、差が小さいほど左右での温度の偏りがなく、軸対称な構造になっていることを表している。パラメータ V_T は低気圧周辺の温度分布について表すパラメータである。 ΔZ は 500 km 以内でのジオポテンシャル高度の最大と最小の差なので、この差が大きいほど 500 km 以内での温度変化が大きいことになる。任意の 2 層でのこの差を比較したとき、上層の方が差が大きいほどその層内は暖気核構造になっていることを表している (図??)。

備考

- 低気圧中心は一般的に、海面更正気圧の最低点をとればよい。
- 移動速度の計算方法は使用者に依存するが、mv(1) は x 方向の速度成分、mv(2) は y 方向の速度成分を用いなければならない。これらの速度成分のアスペクト比から移動方向を計算している。

3.22.15 DC_Braun

機能

Braun (2002) の手法を用いて、熱帯低気圧の中心を計算する。水平解像度が細かくなると、熱帯低気圧の内部コア領域における局所的な気圧偏差が現れるようになる。海面気圧の最低値で熱帯低気圧の中心を定義すると、この局所的な気圧偏差の影響により振動するようになる^{*24}。そこで、Braun (2002) では、以下の定義の項目に示す手法を用いて、この振動現象を除去できる熱帯低気圧の中心推定手法が開発された。

書式

```
call DC_Braun( x, y, fg, pres, search_dis, var_dis, center, &
  [undef], [stdopt] )
```

引数

x	<R,DP(:)>	in	x 方向座標 [m].
y	<R,DP(:)>	in	y 方向座標 [m].
fg	<I(2)>	in	計算に用いる第一推定値の格子点番号 (後述).
pres	<R,DP(size(x),size(y))>	in	等高度面での気圧 [Pa] (後述).
search_dis	<R,DP>	in	検索する領域 [m] (後述).
var_dis	<R,DP>	in	偏差計算する領域 [m] (後述).
center	<I(2)>	inout	求められた中心 (後述).
undef	<R,DP>	in	未定義値 (後述).
stdopt	<L>	in	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> .

定義式

与えられた第一推定点 `fg` について、その周囲 `search_dis` (典型的には 100 km 程度) の全格子点について、その点を中心とした半径 `var_dis` (典型的には 65 km 程度) の円形領域について気圧の接線平均を行い、各格子点におけるその接線平均からの標準偏差を足し合わせた値が最も最低となる点を熱帯低気圧の中心と定義する手法を用いている。より詳細な手法の計算順序については付録?? 参照。

備考

- 引数 `undef` は計算範囲内に未定義値がある場合に指定すると、この値に該当する格子点は偏差計算に使用しない。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
- 引数 `fg` は第一推定値となる格子点の x 方向, y 方向の格子点番号を与える。この格子点番号は x, y の配列要素番号のことである。一般的にこの第一推定値に

^{*24}実際に、海面気圧の最低値で定義される熱帯低気圧の中心と Braun (2002) の手法で定義される熱帯低気圧の中心でどのような差がみられるかについては付録参照。

は海面気圧の最低点が用いられる. `fg`, `center` ともに, 第一番目が x 座標の格子点番号, 第二番目が y 座標の格子点番号となる.

- 引数 `pres` には一般的に海面気圧が用いられる. この変数は熱帯低気圧の軸対称性を求めるのに用いるので, 等高度面上での気圧ならどの高度でもよい. ただし, 格子点の値が地表面気圧の場合, 何らかの手法を用いて海面気圧に校正しておく必要がある. 静力学モデルの場合, 気圧と対応関係にある等圧面でのジオポテンシャル高度でも構わない. また, この物理量は偏差計算に用いるだけなので, 単位は全格子点について統一してあれば任意の単位系を用いることができる.
- 引数 `search_dis`, `var_dis` の関係は図 5.12, 5.13 参照. Braun (2002) の文献には `var_dis` は 65 km 程度で行うと記述されている. これは, 一般的な熱帯低気圧の内部コア領域の外側付近に相当する.

3.22.16 DC_Braun_SAT

機能

Braun_SAT (2002) の手法を用いて, 衛星の赤外輝度温度データから熱帯低気圧の中心を計算する. 赤外輝度温度の高い点から輝度温度の水平分布の最も軸対称な点を中心と定義する. 詳細な手法は Braun 法と同じ.

書式

```
call DC_Braun_SAT( x, y, fg, tbb, search_dis, var_dis, fg_canr, &
center, [undef], [stdopt] )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP(:)>	in	x 方向座標 [m].
<code>y</code>	<R,DP(:)>	in	y 方向座標 [m].
<code>fg</code>	<I(2)>	in	計算に用いる第一推定値の格子点番号 (後述).
<code>tbb</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	放射輝度温度 [K].
<code>search_dis</code>	<R,DP>	in	検索する領域 [m] (後述).
<code>var_dis</code>	<R,DP>	in	偏差計算する領域 [m] (後述).
<code>fg_canr</code>	<R,DP>	in	偏差計算する候補点の閾値計算 [m] (後述).
<code>center</code>	<I(2)>	inout	求められた中心 (後述).
<code>undef</code>	<R,DP>	in	未定義値 (後述).
<code>stdopt</code>	<L>	in	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code>

定義式

与えられた第一推定点 `fg` について, その周囲 `search_dis` (典型的には 100 km 程度) の全格子点について, その点を中心とした半径 `var_dis` (典型的には 65 km 程

度) の円形領域について衛星の赤外輝度温度の接線平均を行い, 各格子点におけるその接線平均からの標準偏差を足し合わせた値が最も最低となる点を熱帯低気圧の中心と定義する手法を用いている. より詳細な手法の計算順序については付録?? 参照.

備考

- 引数 `undef` は計算範囲内に未定義値がある場合に指定すると, この値に該当する格子点は偏差計算に使用しない.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合, デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが, `stdopt` を `.true.` に設定しておけば, 出力しない.
- 引数 `fg` は第一推定値となる格子点の x 方向, y 方向の格子点番号を与える. この格子点番号は x, y の配列要素番号のことである. 一般的にこの第一推定値には海面気圧の最低点が用いられる. `fg, center` とともに, 第一番目が x 座標の格子点番号, 第二番目が y 座標の格子点番号となる.
- 引数 `search_dis, var_dis` の関係は図??, ?? 参照. Braun.SAT (2002) の文献には `var_dis` は 65 km 程度で行うと記述されている. これは, 一般的な熱帯低気圧の内部コア領域の外側付近に相当する.
- 衛星の赤外輝度温度では, アウトフロー域での輝度温度の平坦な箇所が疑似的に輝度温度の接線平均偏差の小さい領域と認識されることがある (アウトフロー域では輝度温度の近傍での変化が小さいため, その偏差も小さくなってしまう). これを防ぐために, 第一推定点から `fg.canr` の半径内における輝度温度の最大最小値を求める. その値から平均値を出し, 平均値より値の大きな (高度が低い) 点のみ偏差計算を行う. これにより, アウトフロー域での低輝度温度をもつ格子の偏差計算を省略する.

3.22.17 DCE_Yang

機能

Yang et al. (2013) の手法を用いて, 熱帯低気圧の多重壁雲を判定する.

書式

```
call DCE_Yang( x, y, xc, yc, r, theta, Tbb, ljudge, [tbbr], &
               [sig], [dmoat], [douter], [dinner], &
               [undef], [undefg], [undefgc], [axis], [stdopt] )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標 [rad] or [m].
<code>y</code>	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標 [rad] or [m].
<code>xc</code>	<R,DP>	in	x 系での円筒座標原点 (後述).
<code>yc</code>	<R,DP>	in	y 系での円筒座標原点 (後述).
<code>r</code>	<R,DP(:)>	in	円筒座標系の動径座標.
<code>theta</code>	<R,DP(:)>	in	円筒座標系の接線座標 [rad].
<code>Tbb</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	黒体放射輝度温度 [K].
<code>ljudge</code>	<L>	out	.true. なら多重壁雲.
<code>tbbr</code>	<R,DP(:,8)>	inout	各セクションでの同位角平均 Tbb.
<code>sig</code>	<R,DP(:,8)>	inout	各セクションでの Tbb 同位角標準偏差.
<code>dmoat</code>	<R,DP>	inout	moat の平均幅 [m] (後述).
<code>douter</code>	<R,DP>	inout	外側壁雲の平均幅 [m] (後述).
<code>dinner</code>	<R,DP>	inout	内側の平均距離 [m] (後述).
<code>undef</code>	<R,DP>	in	接線平均可能半径外の値 (後述).
<code>undefg</code>	<R,DP>	in	接線平均内での欠損値.
<code>undefgc</code>	<C(3)>	in	undefg が設定 されたときの処理 (後述).
<code>stdopt</code>	<L>	in	エラー出力フラグ (後述). デフォルトは .false.
<code>axis</code>	<C(2)>	in	座標系 (後述).

定義式

判定前下準備

1. デカルト座標系で定義されている黒体放射輝度温度 Tbb を xc, yc で指定される台風中心に対して円筒座標系に変換する.
2. 変換したデータは, 同位角方向について 8 分割される.
3. その 8 セクションについて, 各半径ごとに同位角方向の平均 tbbr と標準偏差 sig を計算する.

このデータを元に, 以下の判定を行う.

黒体放射輝度温度による判定

1. 各 8 セクションについて、中心から `tbbr` の極小値が 2 点以上かつ、その間に極大値が 1 点含まれているかをチェック。
2. 基準 (1) を満たすセクションについて、中心から近い方の極小値を T_{innermin} 、遠い方の極小値を T_{outermin} 、その間の極大値を T_{max} 、極小値をとる半径で標準偏差を σ_{innermin} 、 σ_{outermin} 、極大値をとる半径での標準偏差を σ_{max} とする。このとき、各セクションについて、

$$T_{\text{max}} \geq T_{\text{outermin}} + \sigma_{\text{outermin}},$$

かつ

$$T_{\text{max}} \geq T_{\text{innermin}} + \sigma_{\text{innermin}},$$

を満たすかをチェック。

3. 基準 (1) および (2) を満たしているセクションについて、

$$T_{\text{outermin}} \leq 230 \text{ [K]}$$

を満たすかをチェック。

4. 基準 (3) を満たすセクションの数が 5 を越えているかチェック。
5. 基準 (4) を満たしていれば、基準 (3) を満たすセクションについて互いに T_{outermin} との値をとる半径の差を計算し、いずれのセクション同士の差も 50 km を越えていないかチェック。

基準 (5) を満たした場合、`ljudge = .true.` が返され、このデータは多重壁雲構造を成していると判定される。

備考

- 引数 `undef` は計算範囲内に未定義値がある場合に指定すると、この値に該当する格子点は偏差計算に使用しない。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
- オプション引数 `dmoat`、`douter`、`dinner` はそれぞれ `ljudge = .true.` が返されるときに追加で返される情報であり、それぞれ `moat` の平均幅、外側壁雲の平均幅、内側壁雲の平均距離である。これらの引数は基準 (4) を満たす各セクションについて、以下の定義式で計算される長さをそのセクション間で平均したものと返される。
`dinner` 台風中心から外向きに `tbbr` をチェックし、 $0.5\sigma_{\text{innermin}} + T_{\text{innermin}}$ を下回らない最も遠い距離を `dinner` とする。

`dmoat` T_{\max} を中心に `tbbr` をチェックし、内向きには $0.5\sigma_{\text{innermin}} + T_{\text{innermin}}$ を下回らない最も外側の距離と、外向きには $0.5\sigma_{\text{outermin}} + T_{\text{outermin}}$ を下回らない最も内側の距離の距離の差を `dmoat` とする。

`douter` T_{outermin} を中心に `tbbr` をチェックし、両側 $0.5\sigma_{\text{outermin}} + T_{\text{outermin}}$ を越えない最も外側と内側の距離差を `douter` とする。

3.22.18 DC_Sat_ZNCC

機能

ゼロ平均正規化相互相関というテンプレートマッチング法を用いて、衛星画像における台風中心を求める。予め台風中心位置が判明している画像 (A) とそこから少し時間が変化した画像 (B) では台風の水平構造はほぼ同じであると仮定する。すると、画像 A と画像 B との違いは時間変化によって位置が移動したこと以外はない。したがって、画像 A を参照画像としたテンプレートマッチング法により、画像 B から画像 A と最も類似する部分を抽出できる。この抽出された画像の南西端と画像 A の南西端の緯度経度の差が画像 A, B 間の時間で台風が移動した距離と考えられる。以上より、画像 A での台風中心位置に、画像 A, B 間の南西端の緯度経度差を加えた値が画像 B での台風中心位置となる。

本ルーチンでは、画像 A を参照画像としたときの、画像 B の最も類似する画像領域の南西端格子点番号を返す。

書式

```
call DC_Sat_ZNCC( ref_img, img, swx, swy, [undef_ref], [undef_img] )
```

引数

<code>ref_img</code>	<R,DP(:, :)>	in	参照画像の任意数値.
<code>img</code>	<R,DP(:, :)>	in	探索画像の任意数値.
<code>swx</code>	<I>	inout	最も類似する <code>img</code> の西端格子番号.
<code>swy</code>	<I>	inout	最も類似する <code>img</code> の南端格子番号.
<code>undef_ref</code>	<R,DP>	in	<code>ref_img</code> の未定義値.
<code>undef_img</code>	<R,DP>	in	<code>img</code> の未定義値.

定義式

ゼロ平均正規化相互相関は、ピクセル数が $N \times M$ のテンプレート画像 A (参照画像) とピクセル数が $P \times Q$ の画像 B (探索画像) における各ピクセルでの値 (任意の物理量) の相互相関に基づくテンプレートマッチングである。このとき、ピクセル数は必ず

$$N \leq P, \text{ かつ } M \leq Q$$

を満たす必要がある。画像 A の各ピクセルにおける物理量 (任意) を $A_{i,j}$ ($1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$), 画像 B における物理量を $B_{i,j}$ ($1 \leq i \leq P$, $1 \leq j \leq Q$) とする。各画像の南西端を基準にして, 相互相関係数 $R_{i,j}$ を

$$R_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{S(A)S(B)_{i,j}}, \quad (1 \leq i \leq P - N + 1, 1 \leq j \leq Q - M + 1),$$

$$C_{i,j} = \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N (A_{k,l} - \bar{A}) (B_{k+i-1,l+j-1} - \bar{B}_{i,j}),$$

$$S(A) = \sqrt{\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N (A_{k,l} - \bar{A})^2},$$

$$S(B)_{i,j} = \sqrt{\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N (B_{k+i-1,l+j-1} - \bar{B}_{i,j})^2},$$

$$\bar{A} = \frac{1}{NM} \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N A_{k,l}, \quad \bar{B}_{i,j} = \frac{1}{NM} \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N B_{k+i-1,l+j-1},$$

のように求め, $R_{i,j}$ が最大となる配列要素番号 (i_{max} , j_{max}) が参照画像と最も類似する探索画像の領域の南西端となる。よって, 探索画像で参照画像と最も類似する画像領域は

$$i_{max} \leq i \leq i_{max} + N - 1, \quad j_{max} \leq j \leq j_{max} + M - 1$$

の領域となる。具体的な手順と引数との対応関係は以下の通り。

1. 中心位置が与えられている衛星画像を `ref_img` として与える。データは放射輝度温度でもアルベド値でも構わない。
2. `ref_img` と時間の近い衛星画像を `img` として与える。このときのデータは `ref_img` と同じ物理量である。
3. テンプレートマッチングを行い, `ref_img` と最も類似する `img` の画像箇所を算出する。
4. `img` の最も類似した画像箇所の南西端格子番号を `swx`, `swy` として出力する。

このとき, 引数は定義式の各変数と以下の対応をする :

$$A_{i,j} : \text{ref_img}, \quad B_{i,j} : \text{img}, (i_{max}, j_{max}) : \text{swx}, \text{swy}.$$

備考

- この手法は, 画像 A, B 間での台風の水平構造が変化しないと仮定しているため, 与える 2 画像間の時間変化量が可能な限り小さいことが望ましい。ひまわり 8 号の機動観測 (2.5 分解像度) で用いることを想定している。

- 引数 `undef_ref`, `undef_img` は計算範囲内に未定義値がある場合に指定すると、この値に該当する格子点は偏差計算に使用しない。このため、定義式では $S(A)$ は画像探索の間一定として記載しているが、実際には探索画像で未定義となっているピクセルでは参照画像の対応ピクセルでも未定義としなければならない。したがって、実際の計算では $S(A)$ はこの参照画像におけるピクセルの未定義化により、各 $C_{i,j}$ で $S(A)$ は変化することに注意する (すなわち, $S(A)_{i,j}$).

3.22.19 Parallax_Himawari

機能

静止衛星から観測された雲の位置を視差補正し、補正後の各雲の位置の緯度経度を返す。

書式

```
call Parallax_Himawari( lambda_cld, phi_cld, h_cld, &
lambda_cor, phi_cor, [undef] )
```

引数

<code>lambda_cld</code>	<R,DP(:, :)>	in	補正前の観測経度 [rad].
<code>phi_cld</code>	<R,DP(n1, n2)>	in	補正前の観測緯度 [rad].
<code>h_cld</code>	<R,DP(n1, n2)>	in	各緯度経度での雲頂高度 [m].
<code>lambda_cor</code>	<R,DP(n1, n2)>	inout	補正後の観測経度 [rad].
<code>phi_cor</code>	<R,DP(n1, n2)>	inout	補正後の観測緯度 [rad].
			<code>n1=size(lambda_cld,1), n2=size(lambda_cld,2).</code>
<code>undef</code>	<R,DP>	in	未定義値 (後述) .

定義式

図 5.15 で示されるように、補正前の緯度経度 ϕ_0 , λ_0 の位置で雲頂高度 h の雲が観測されたとする。このとき、実際に雲が存在する位置は緯度経度 ϕ_a , λ_a となる。本ルーチンでは付録 5.8 で示される手法によってこの実際の緯度経度を求める。このとき、引数は以下の対応をする：

λ_0 : `lambda_cld`, ϕ_0 : `phi_cld`, h : `h_cld`, λ_a : `lambda_cor`, ϕ_a : `phi_cor`.

備考

- 引数 `undef` は計算範囲内に未定義値がある場合に指定すると、この値に該当する格子点は補正計算に使用しない。

3.22.20 SPLB_Kurihara

機能

? の手法を用いて、任意の場の変数について水平方向にフィルタリングを行う。

書式

```
call SPLB_Kurihara( axopt, phi0, x, y, Lx, Ly, ival, oval, &
  [optm], [optnx], [optny] )
```

引数

axopt	<C(2)>	in	計算する座標 (後述).
x	<R,DP(:)>	in	x 方向座標 [m] or [deg].
y	<R,DP(:)>	in	y 方向座標 [m] or [deg].
Lx	<R,DP(2)>	in	フィルタする x 方向の領域 [m] or [deg] (後述).
Ly	<R,DP(2)>	in	フィルタする y 方向の領域 [m] or [deg] (後述).
ival	<R,DP(size(x),size(y))>	in	フィルタする 2 次元変数.
oval	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	フィルタされた 2 次元変数.
optm	<I(:)>	in	フィルタする波数 (後述).
optnx	<I(:)>	in	x 方向高解像度版格子点 (後述).
optny	<I(:)>	in	y 方向高解像度版格子点 (後述).

定義式

任意の場の変数 $F_{i,j}$ に対して、指定波数の成分をフィルターアウトする ? の手法を用いる。ただし、オリジナルではなく、? による高解像度版データへの適用を可能にした修正版を用いる。定義式は ? の (3), (4), (5) 式^{*25}

$$\bar{F}_{i,j}^E = F_{i,j} + K_m(F_{i-q_{n1},j} + F_{i+q_{n1},j} - 2F_{i,j}), \quad F_{i,j}^E = \bar{F}_{i,j}^E + K_m(\bar{F}_{i,j-q_{n2}}^E + \bar{F}_{i,j+q_{n2}}^E - 2\bar{F}_{i,j}^E) \quad (3.22.86)$$

$$q_{n1} = \left[\frac{R \cos \phi_0 \delta \phi}{n_1 \Delta_x} \right], \quad n_1 = 1, 2, 4, \dots, M_1, \quad (3.22.87)$$

$$q_{n2} = \left[\frac{R \delta \phi}{n_2 \Delta_y} \right], \quad n_2 = 1, 2, 4, \dots, M_2,$$

$$M_1 = \left[\frac{R \cos \phi_0 \delta \phi}{\Delta_x} \right], \quad (3.22.88)$$

$$M_2 = \left[\frac{R \delta \phi}{\Delta_y} \right],$$

$$K_m = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{m} \right)^{-1}, \quad m = 2, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 2, 8, 9, 2. \quad (3.22.89)$$

を用いて、最終的にフィルタリングされた場の変数 $F_{i,j}^E$ が得られる。ここで、 Δ_x , Δ_y はモデルの x, y 方向格子点解像度、 $\delta \phi$ は 1 度分のラジアン、 ϕ_0 は基準緯度、 R は地球

^{*25}ただし、オリジナルの式ではなく、東西と南北方向で独立な定義式に修正してある。

半径である. また, (3.22.87), (3.22.88) における四角括弧はガウス記号である. この q_{n1}, q_{n2} が ? で導入された高解像度データ拡張処理部分である. もし, $n_1 = n_2 = 1$ の場合は, ? に一致する. 上式は水平方向 i, j について範囲 L_x, L_y の範囲全ての格子点について適用される. 定義式の導出は??参照.

このときの引数との対応関係は

$$\begin{aligned} \Delta_x &: x(2) - x(1), & \Delta_y &: y(2) - y(1), & \phi_0 &: \text{phi0}, \\ L_x &: Lx(2) - Lx(1), & L_y &: Ly(2) - Ly(1), & F_{i,j} &: \text{ival}(i, j), & F_{i,j}^E &: \text{oval}(i, j), \\ m &: \text{optm}, & n_1 &: \text{optnx}, & n_2 &: \text{optny}. \end{aligned}$$

備考

- 引数 `axopt` は座標 x, y の格子点座標系, 'xy' がデカルト座標系 (x, y の単位は [m]), '11' が球面緯度経度座標系 (x, y の単位は [deg]).
- 引数 `optm` は指定しない場合, 2,3,4,2,5,6,7,2,8,9,2 の 11 個の要素をもつ配列としてフィルタリング係数 K_m が計算される.
- 引数 `optnx`, `optny` は指定しない場合, どちらも要素数 1, 値は 1 となり, この場合 ? の定義式と完全に一致する.

3.22.21 calc_taufil

機能

Rozoff et al. (2006) において定義される filamentation time を計算する.

書式

```
call tangent_conv_scal( x, y, u, v, val, [undef], [sx], [xy] )
```

引数

<code>x</code>	<R,DP(:)>	in	右手系第一座標.
<code>y</code>	<R,DP(:)>	in	右手系第二座標.
<code>u</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	水平 x 成分の速度 (後述).
<code>v</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	水平 y 成分の速度 (後述).
<code>val</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	inout	filamentation time [s].
<code>undef</code>	<R,DP>	in	未定義値 (後述).
<code>sx</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	x 方向スケール因子 (後述).
<code>sy</code>	<R,DP(size(x),size(y))>	in	y 方向スケール因子 (後述).

定義式

Rozoff et al. (2006) における filamentation time (τ_{fil}) は

$$\tau_{\text{fil}} \equiv \frac{2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 - \zeta^2}}, \quad (S_1^2 + S_2^2 > \zeta^2),$$

$$S_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1},$$

$$S_2 = \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right),$$

$$\zeta = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 u_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 u_1) \right].$$

ここで、 S_1 , S_2 , ζ はそれぞれ伸長変形速度, シアー変形速度, 鉛直渦度である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad u_1 : u, \quad u_2 : v,$$

$$h_1 : sx, \quad h_2 : sy.$$

備考

- 未定義値 `undef` は入力された速度場が未定義の場合, `val` に代入されるが, $S_1^2 + S_2^2 > \zeta^2$ を満たさない場合も `val` に代入される。
- `undef` が指定されない場合, $S_1^2 + S_2^2 > \zeta^2$ を満たさない `val` には 0 が代入される。ただし, これは定義からは不当であることに注意する。
- 水平速度成分と水平方向のスケール因子は以下の関係をもつように定義されなければならない。

$$u_1 = h_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad u_2 = h_2 \frac{dx_2}{dt}.$$

なお, この定義された速度, スケール因子はともに MKS 単位系で与えられなければならない。もしそうでなければ, τ_{fil} の単位は [s] にならない。

第4章 サンプルプログラム

ここでは、各ルーチンの使用例としていくつかのサンプルプログラムをあげておく。

4.1 サンプルプログラムのコンパイル方法

`demo` ディレクトリ以下に、本ライブラリを用いたサンプルプログラムが複数同梱されている。本サンプルプログラムの実行には STPK ライブラリが正常にインストールされており、NetCDF ライブラリ、`gtool5` ライブラリがインストールされている必要がある。サンプルプログラムの計算結果は NetCDF データで出力されるため、可視化には別途可視化ツールが必要である。

サンプルプログラムのコンパイルには、`demo/Mkinclude` を各自の環境に合わせて編集しなければならない。変更する可能性がある箇所は以下のとおりである。

<code>FC</code>	STPK をインストールしたコンパイラ。
<code>FFLAGS</code>	インストール時のコンパイルオプション。
<code>ISTDIR</code>	STPK のインストールディレクトリ。
<code>INSTNC</code>	<code>netcdf</code> のインストールディレクトリ。
<code>INSTGT</code>	<code>gtool5</code> のインストールディレクトリ。

コンパイルは `demo` ディレクトリで `make` コマンドを実行すればよい。

もし、`DCLF90` がインストールされているなら、`make draw` と実行することで、2次元のグラフを描画することのできる実行ファイル `draw` が作成される。また、`Ruby-DCL` がインストールされていれば、同じディレクトリに同梱されている `dclplot` を用いて、テキストフォーマットのデータを `gnuplot` のようにグラフ化することができる。この `dclplot` は Ruby スクリプトであり、`ruby dclplot` で実行すると、どのような引数を与えなければならないかというような `usage` 情報が出力されるので、それを参考にされたい。

`draw` コマンドの使い方については、各サンプルプログラムのファイル名の前に `draw_` とヘッダのついた拡張子 `.nml` のネームリストファイルがあるので、例えば、`poison` を用いた結果得られたデータ `poison.nc` を可視化したい場合は、`./draw < draw_poison.nml` で可視化することができる。この `draw` に対応したネームリストファイルの各変数は以下

のとおりである.

```

&drawinput
fig_type = 1 ! 図の種類 1: 等値線, シェード
! 2: 等値線, シェード, ベクトル
! -1: 横軸折れ線, マーカー
! -2: 縦軸折れ線, マーカー
! 折れ線を引くなら, cont_val に変数名,
! マーカーをうつなら, shade_val に変数名,
! 両方とも描画可能.
! 横軸折れ線の場合, 横軸の描画範囲は xmax, xmin で
! そのときの縦軸の描画範囲は cmin, cmax, smin, smax で設
定でき,
! cmin, cmax は折れ線, smin, smax はマーカーに対応.
! shade_val, cont_val それぞれ設定されているときは絶対値
が
! 大きい方で設定される.
! ymin, ymax で設定された範囲内に存在するすべての y 格子の
! x 軸データを複数折れ線 (マーカー) で描画する.
! もし 1 本のみ欲しければ, ymin = ymax と設定すること.
! 縦軸折れ線の場合, 横軸折れ線の全く逆の変数設定しておく
こと.
! ex. 横軸折れ線で xmin, xmax の場合, 縦軸折れ線で
は ymin, ymax
! がこの変数に対応している.
nx = 100 ! 横軸の格子点数
ny = 100 ! 縦軸の格子点数
xmin = 0.0 ! 横軸の左端
xmax = 1.0 ! 横軸の右端
ymin = 0.0 ! 縦軸の下端
ymax = 1.0 ! 縦軸の上端
fname = 'poison.nc' ! 読み込む netcdf ファイル
txtname = '' ! テキストカラムデータ
cont_val = 'rho' ! 等値線で描く変数
shade_val = 'psi' ! カラーシェードで描く変数
vx_val = '' ! ベクトル x 成分で描く変数
vy_val = '' ! ベクトル y 成分で描く変数
cmin = -4.0 ! 等値線の最小値
cmax = 0.0 ! 等値線の最大値
smin = 0.0 ! カラーシェードの最小値
smax = 3.5 ! カラーシェードの最大値
x_axis = 'x' ! 横軸の変数名
y_axis = 'y' ! 縦軸の変数名
sfact = 1.0 ! シェードのファクター
cfact = 1.0 ! 等値線のファクター
vxfact = 1.0 ! 単位ベクトルの長さ x
vyfact = 1.0 ! 単位ベクトルの長さ y
title = ''
/

```

他の draw 用ネームリストファイルも全て同じ変数となっている. 各ネームリストファイルは各サンプルを可視化する際, 何も変更しなくても描画することができる.

4.2 各プログラムの説明

本プログラム群はルーチン・関数レベルの出力結果をチェックするプログラムを `unit` というディレクトリに、それ以外の中規模テストプログラムは各ディレクトリに格納してある。以下では、`unit` とそれ以外のプログラムについて、使い方等を示す。

4.2.1 cov

モジュール `Statistics` のテスト用プログラム。ある与えられたデータファイル `data.org` を元に、分布図を作成するプログラム。ただし、その分布図を元に回帰直線を引き、相関係数を計算する。

実行方法・実行結果

本プログラムは単体で実行するだけであり、その出力結果は以下のようになる。

```
*****
slope = 4.4496446E-06
intercept = -3.6121133E-07
Cor_Coe = 3.6029361E-02
data number = 246
*****
```

4.2.2 fft_test

FFT ルーチンのテストプログラム。実数データを与えて実 FFT を計算し、逆変換を行い元の実データに戻す。戻したときに、元データとどれだけ誤差があるかを表示する。また、同じ動作を標準入力から指定する回数分繰り返す。FFT のパフォーマンステストも兼ねているので、上とまったく同じ作業を離散フーリエ変換についても行い、両者の実行時間を表示する。用いるデータはデータ数の中央にピークをもつガウシアン分布である。

実行方法

`make` すると、実行ファイル `fft_test` が作成されているので、実行すると、

```
Input the data number (odd number).
```

と聞かれる。これはデータの個数であり、実 FFT 変換を行うため、必ず偶数でなければならない。次に

```
Input the loop number.
```

と聞かれる。これは同じ動作を何回繰り返すかを指定する。

```
Do calculate the prime factors? [y/n]
```

と聞かれる。これはデータ数を素因数分解するかどうかを聞いている。これを 'y' とすると、FFT ルーチンが開始されるごとに毎回分解し、回転行列を計算する。本ルーチンでは、データ数が多くなるとともに最もボトルネックになるのが、回転行列の計算であるため、loop number を多くとっている場合には、これを 'n' にして、最初に計算した値を毎度参照するようにした方が、FFT 本体のパフォーマンスはよい。

計算結果

```
Input the data number (odd number).
4096
Input the loop number.
10
Do calculate the prime factors? [y/n]
n
          12          0          0          0          1
-----
fft error is  7.2353985E-04
fft error is  7.6539267E-04
-----
-----
cpu time (rot) is  0.4000240    [s].
cpu time (fft) is  0.2280140    [s].
cpu time (dft) is  1.372087    [s].
-----
```

備考

特になし。

4.2.3 fft_data

FFT ルーチンの使用例プログラム。テキスト形式の実数データを与えて実 FFT を計算し、そのスペクトル分布を別ファイルに出力する。

実行方法

make すると、実行ファイル `fft_data` が作成されているので、実行すると、

```
Input a reading file name.
If there is no file, input 'dummy'
```

と聞かれる。これは読み込むテキストデータのファイル名を入力する。もしファイルがなく、テスト計算のみ行いたい場合は、`dummy` と入力すればよい。すると、あらかじめプログラム内で三角関数の重ね合わせデータを作成して、その FFT 計算を行う。ファイルのデータ個数は偶数でも奇数でも構わない。ただし、奇数の場合は実 FFT 計算を行う都合上、一番後ろのデータは読み込むが用いない。以下、`dummy` と入力した場合の例を示す。次に、

```
Automatically, sample file is producted.
result prim          2          0          2          0
### Finished calculating.
Input the output file name..
```

1

と聞かれる。これはスペクトル計算したデータを出力するファイル名を入力する。

```
Input the calculating period.
(data period)
```

と聞かれる。これは計算を行ったデータの期間を入力する。単位は任意。この値は出力されるテキストデータの "frequency" に反映される。

計算結果

計算の結果出力されるデータは左から

```
波のノード数, 波数, 入力データ 1 行目, ...
```

となる。ここで、データの期間を T とすると、ノード数 n と波の波数 k とデータ期間 T の関係は

$$2\pi n = kT$$

である。つまり、上のデータはそれぞれ

$$\text{波のノード数} = n, \quad \text{波数} = k = \frac{2\pi n}{T}$$

をそれぞれ表している。これを考慮してサンプルデータを可視化したものが図 4.1 である。

備考

- 入力データが `dummy` でない場合、次に

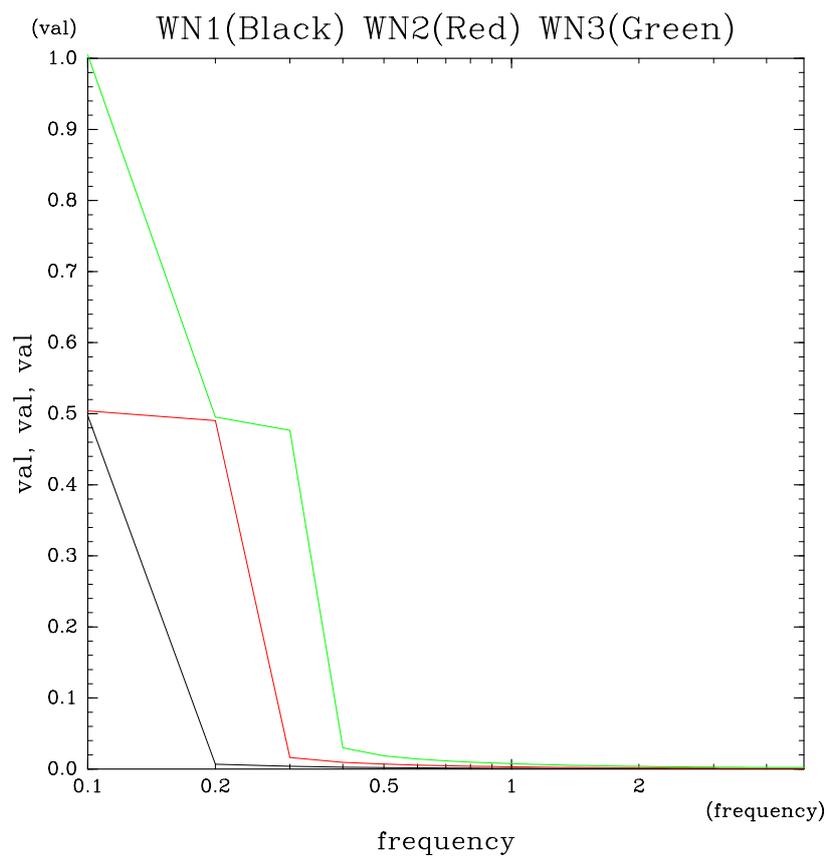


図 4.1: 実数データのスペクトル分布。黒、赤、緑がそれぞれ波のノード数 1, 1+2, 1+2+3 の波で作成したデータのスペクトル分布に対応している。それぞれ波数（横軸）の 1, 2, 3 に対応した箇所でピークが見られる。

Input the reading number of array.

と聞かれる。これはデータのカラム数がいくつあるかを入力するもので、本プログラムでは入力されたカラムごとに FFT 計算してスペクトルデータを出力する。よって、出力データはこの質問で入力したカラム数に 2 カラム追加された (上記のノード数データと波数データを追加された) ものとして出力される。

4.2.4 matrix_test

3次元行列を与え、そのデータをもとに様々な行列計算ルーチンを実行するプログラム。

実行方法

本プログラムは単体で実行すればよい。実行すると、どのような計算を行うかを聞かれるので、標準入力番号を入力する。番号は以下のような対応になっている。

1. ガウスの消去法を用いて、3 元の連立方程式の求解を行う。
2. LU 分解を用いて、3 元連立方程式の求解を行う。
3. ガウスザイデル法を用いて、3 元連立方程式の求解を行う。
4. ヤコビ法を用いて、3 元連立方程式の求解を行う。
5. ガウスザイデル法を SOR で加速しながら、3 元連立方程式の求解を行う。
6. ヤコビ法を SOR で加速しながら、3 元連立方程式の求解を行う。
7. 3 次正方行列の逆行列を計算する。
8. べき乗法を用いて 3 次正方行列の最大固有値とそれに対応する固有ベクトルを計算する。
9. ヤコビ法を用いて、3 次正方行列の全固有値を計算する。
10. QR 法を用いて、3 次正方行列の全固有値と固有ベクトルを計算する。

4.2.5 normal_poly

モジュール `poly_normal`, `special_function` のテストプログラム。標準入力する関数名の関数を一定の定義域において計算し、テキストカラムデータで出力するプログラム。

本プログラムの実行によって出力されたテキストデータファイルは同じディレクトリに同梱されている ruby スクリプト `dclplot` を実行することで容易に可視化できる。

実行方法

本プログラムは単体で実行することができ、実行するとどの関数を計算するかということを標準入力で決定する。各番号は以下のような対応をしている。

1. ルジャンドル多項式.
2. エルミート多項式.
3. ラゲール多項式.
4. ヤコビ多項式.
5. ゲーゲンバウアー多項式.
6. チェビシェフ多項式.
7. ソニン多項式.
8. ベッセル関数.
9. ガンマ関数.
10. ノイマン関数.
11. 変形ベッセル関数.
12. 変形ノイマン関数.

計算結果 ルジャンドル多項式の場合

図 4.2 にルジャンドル多項式の場合を示す。

エルミート多項式の場合

図 4.3 にエルミート多項式の場合を示す。

ラゲール多項式の場合

図 4.4 にラゲール多項式の場合を示す。

ベッセル関数の場合

図 4.5 にベッセル関数の場合を示す。

ノイマン関数の場合

図 4.6 にノイマン関数の場合を示す。

変形ベッセル関数の場合

図 4.7 に変形ベッセル関数の場合を示す。

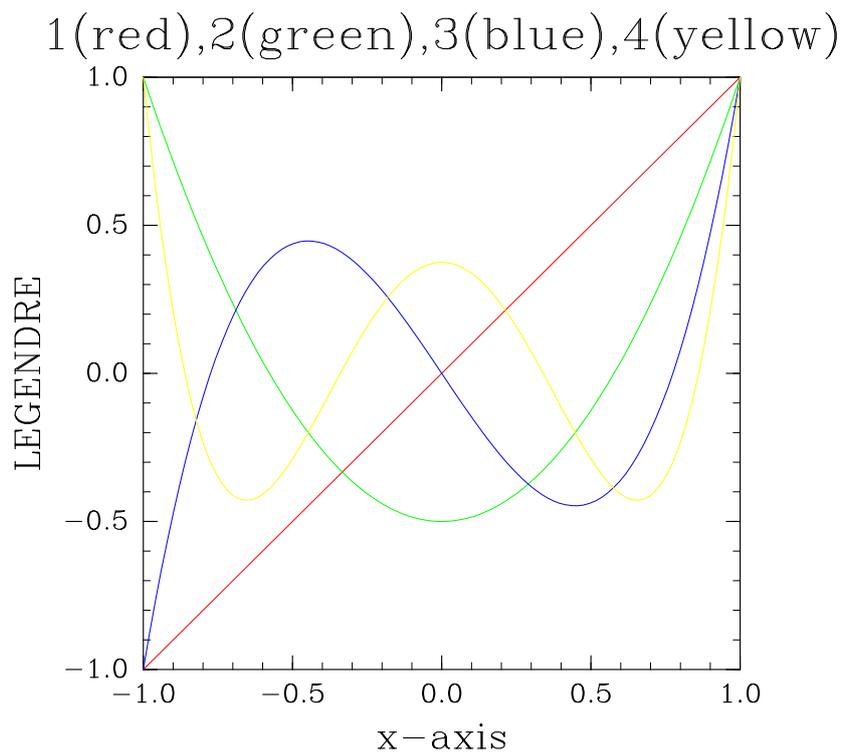


図 4.2: ルジャンドル多項式 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

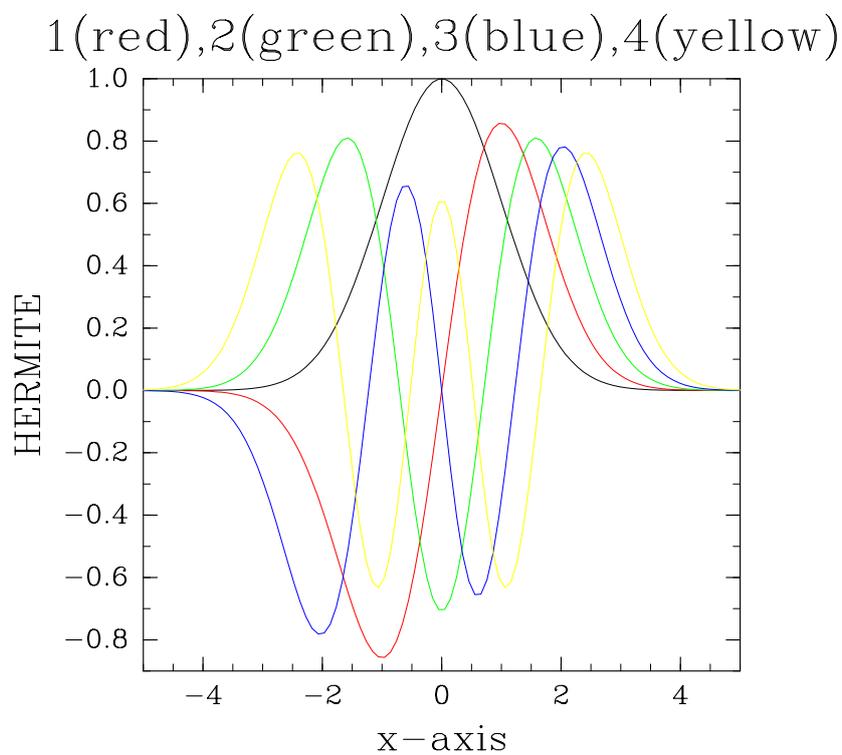


図 4.3: エルミート多項式 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

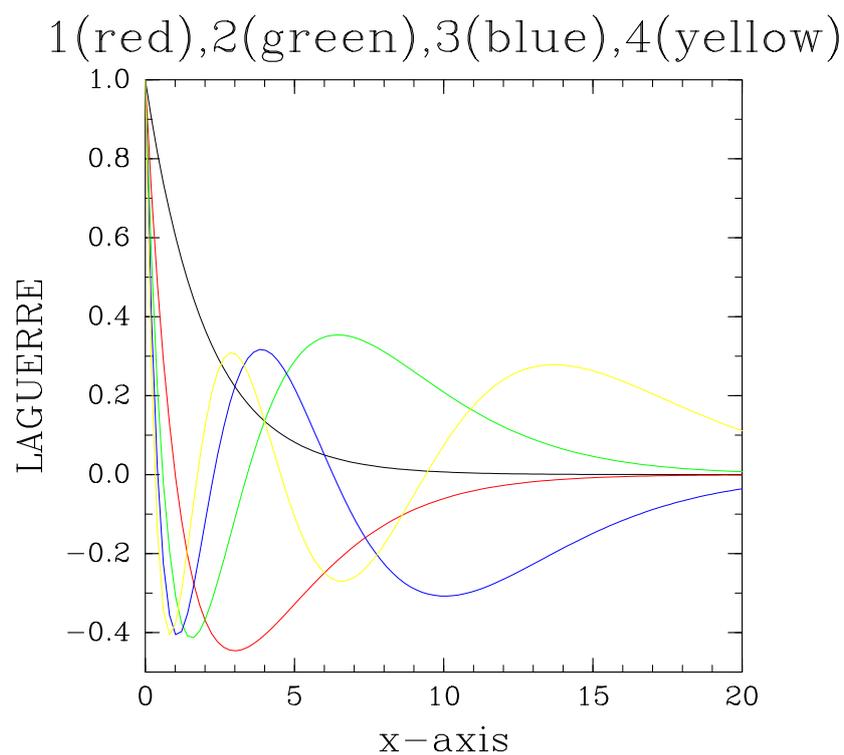


図 4.4: ラゲール多項式 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

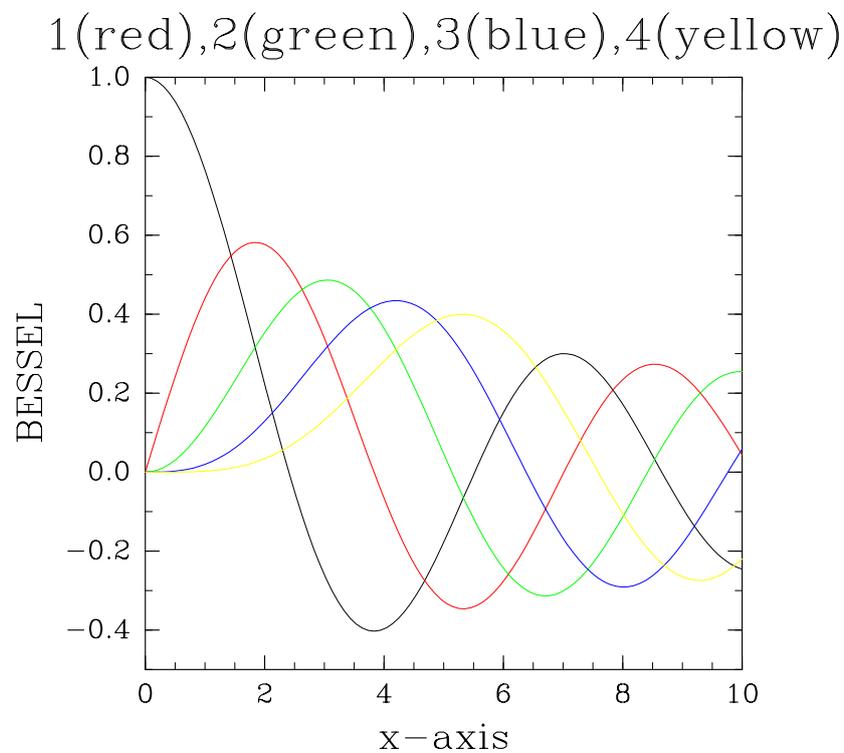


図 4.5: ベッセル関数 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

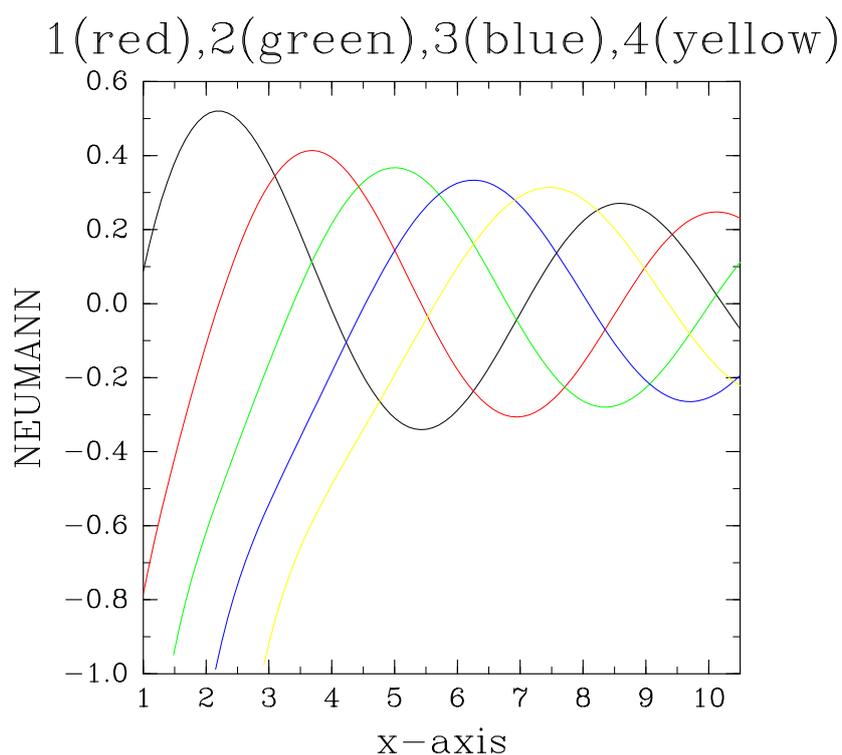


図 4.6: ノイマン関数 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

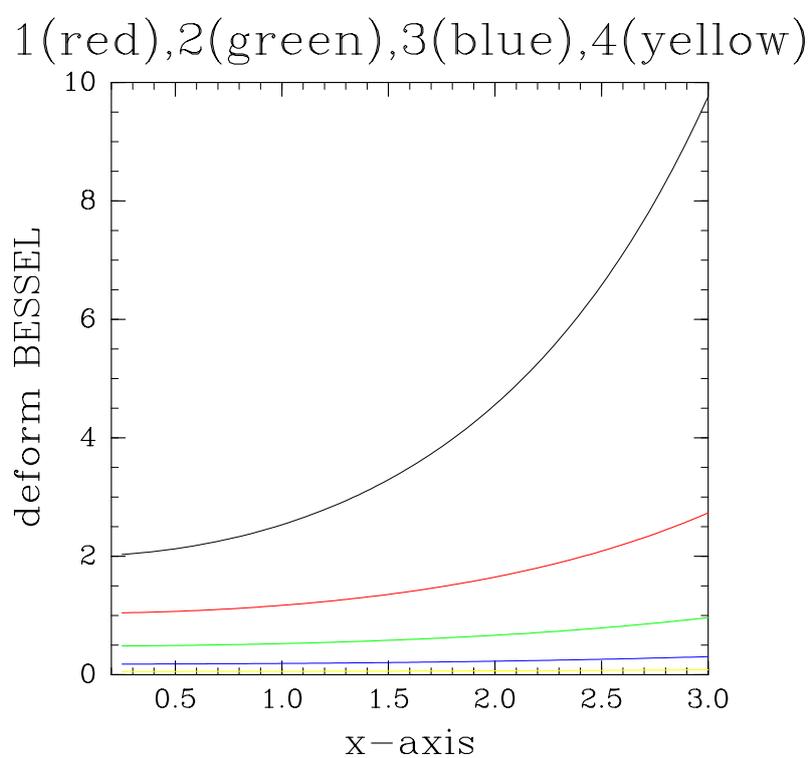


図 4.7: 変形ベッセル関数 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

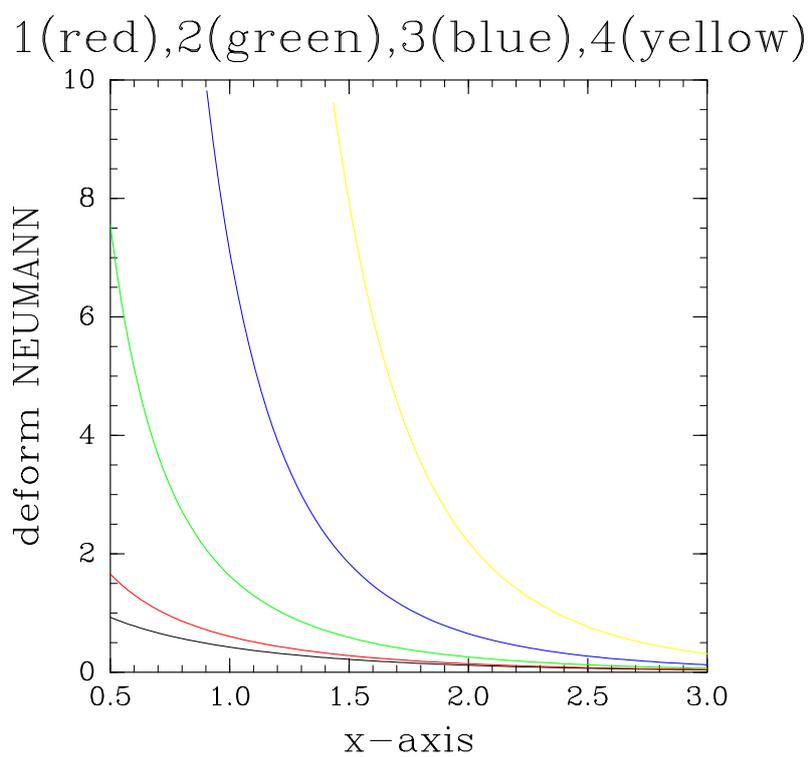


図 4.8: 変形ノイマン関数 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

変形ノイマン関数の場合

図 4.8 に変形ノイマン関数の場合を示す。

ガンマ関数の場合

図 4.9 にガンマ関数の場合を示す
1(red),2(green),3(blue),4(yellow)

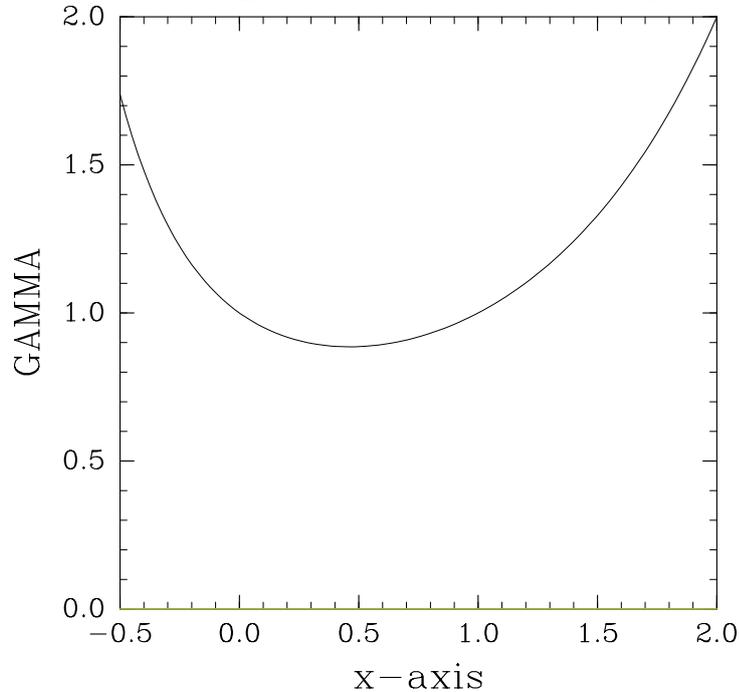


図 4.9: ガンマ関数.

4.2.6 read_mgdsst_nc

mgdsst データを netcdf データに変換するためのプログラム。

実行方法・ネームリスト

実行前に、変換する mgdsst ファイル名を全て `sst.list` という名称のファイルにテキストで保存しておく。その元ファイル名の拡張子を `.nc` とした名称で netcdf ファイルは生成される。実行は、単体で実行すれば、先のリストに示された分だけ自動的に netcdf ファイルに変換される。

```
$ ./read_mgdsst_nc
```

ここで、オリジナルの mgdsst データは海水を示す値が 888 であるが、この変換によって、その値は 263.0 K に設定されることに注意。

計算結果

本プログラムの結果から得られた netcdf のデータをそのまま描画したものが図 4.10

である。本結果の描画ツールはこちらでは用意していないので、各自使用しているツールを用いて変換されたい。

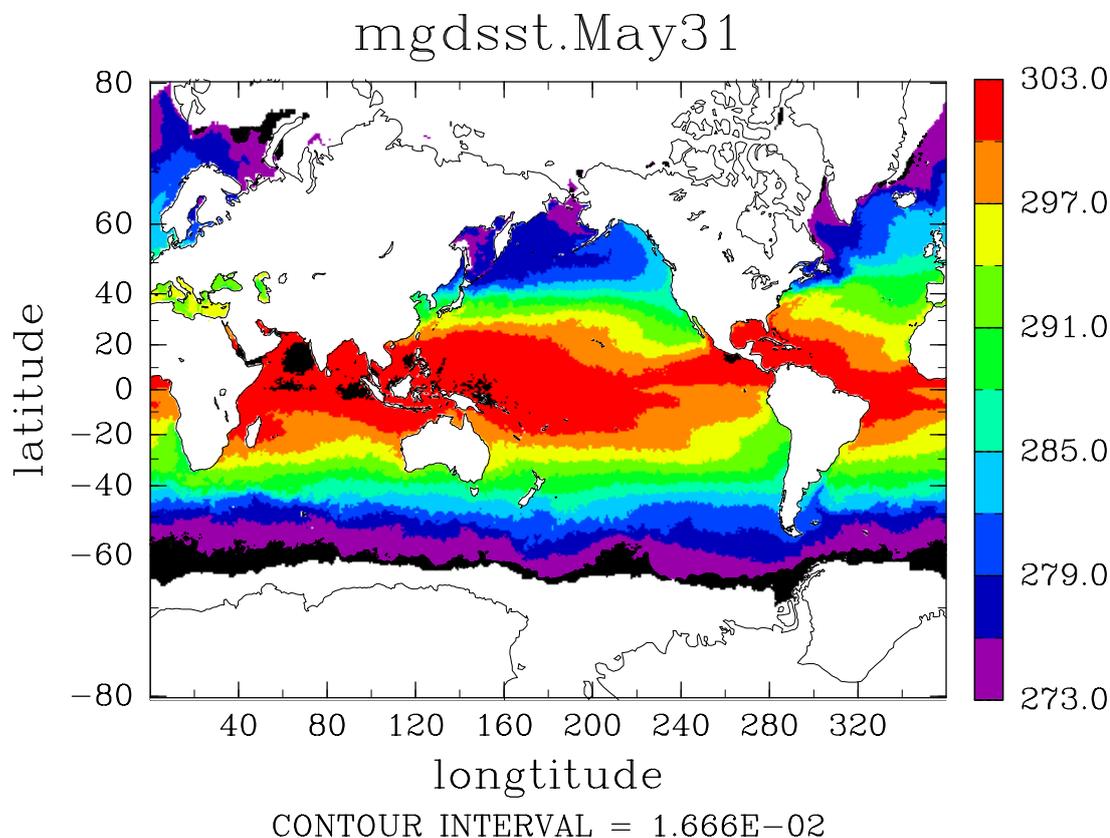


図 4.10: netcdf に変換されたデータから生成された全球海面水温の分布。

4.2.7 sort

モジュール `Statistics` のテスト用プログラム。ある与えられたデータを元に、数値の小さいものから並べ直すプログラム。

実行方法・実行結果

本プログラムは単体で実行するだけであり、その出力結果は以下のようになる。

```
i =, A(i), B(i), Q(i)
1, 3, 0, 0
2, 2, 0, 0
3, 0, 0, 0
```

```
4, 5, 0, 0
5, 8, 1, 1
6, 3, 1, 1
7, 4, 1, 1
8, 1, 2, 2
9, 3, 2, 2
10, 2, 2, 2
11, 10, 3, 3
12, 1, 3, 3
13, 0, 3, 3
14, 2, 4, 4
15, 4, 4, 4
16, 7, 5, 5
17, 0, 6, 6
18, 0, 7, 7
19, 6, 8, 8
20, 1, 10, 10
```

第一列はデータ配列の要素番号，第二列は元のデータ，第三列，四列はそれぞれ Bubble_Sort, Quick_Sort ルーチンによる並べ替えの結果.

4.2.8 thermo

Thermo_Function に登録されている関数について，テストを行うプログラム. 気圧, 温度, 湿度等の情報を与えて, 返された値が妥当なものであるかを検証するプログラム.

実行方法

make すると, 実行ファイル thermo が作成されているので, 実行すると以下のような質問が出力される.

```
pressure [hPa]
1000.0
temperature [K]
300.0
Relative Humidity [%]
50.0
```

順次, 値を入力すると, 以下のように各ルーチンを用いて計算した結果が出力される.

```
DEBUG : RHT_2_e in Thermo_Function : 1.76668E+03 [Pa]
DEBUG : eP_2_qv in Thermo_Function : 1.11965E-02 [kg kg-1]
DEBUG : TP_2_rho in Thermo_Function : 1.16144E+00 [kg m-3]
DEBUG : theta_dry in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : qv_2_sh in Thermo_Function : 1.10725E-02 [kg kg-1]
DEBUG : tetens in Thermo_Function : 3.52565E+03 [Pa]
DEBUG : goff_gratch in Thermo_Function : 3.53320E+03 [Pa]
DEBUG : goff_gratch_i in Thermo_Function : 4.56536E+03 [Pa]
DEBUG : es_Bolton in Thermo_Function : 3.53336E+03 [Pa]
DEBUG : es_TD in Thermo_Function : 2.88717E+02 [Pa]
DEBUG : LH in Thermo_Function : 2.43771E+06 [J kg-1]
DEBUG : eP_2_qv in Thermo_Function : 1.11965E-02 [kg kg-1]
DEBUG : TP_2_qvs in Thermo_Function : 2.28030E-02 [kg kg-1]
DEBUG : qvP_2_e in Thermo_Function : 1.76668E+03 [Pa]
DEBUG : theta_dry in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : theta_moist in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : thetaP_2_T in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : thetaT_2_P in Thermo_Function : 1.00000E+05 [Pa]
DEBUG : TqvP_2_TLCL in Thermo_Function : 2.86147E+02 [K]
DEBUG : thetae_Bolton in Thermo_Function : 3.27661E+02 [K]
DEBUG : thetaes_Bolton in Thermo_Function : 3.67287E+02 [K]
DEBUG : TqvP_2_thetae in Thermo_Function : 3.27064E+02 [K]
DEBUG : TqvP_2_thetaes in Thermo_Function : 3.60804E+02 [K]
DEBUG : RHT_2_e in Thermo_Function : 1.76668E+03 [Pa]
DEBUG : eT_2_RH in Thermo_Function : 5.00000E+01 [%]
DEBUG : RHTP_2_qv in Thermo_Function : 1.11965E-02 [kg kg-1]
DEBUG : qvTP_2_RH in Thermo_Function : 5.00000E+01 [%]
DEBUG : qvT_2_Tv in Thermo_Function : 3.02014E+02 [K]
DEBUG : TqvP_2_thetav in Thermo_Function : 3.02014E+02 [K]
DEBUG : exner_func_dry in Thermo_Function : 1.00000E+00 [1]
DEBUG : hypsometric_form in Thermo_Function : 9.88683E+04 [Pa]
DEBUG : rhoT_2_P in Thermo_Function : 1.00000E+05 [Pa]
DEBUG : rhoP_2_T in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : TP_2_rho in Thermo_Function : 1.16144E+00 [kg m-3]
DEBUG : get_gamma_d in Thermo_Function : -9.77092E-03 [K m-1]
DEBUG : sh_2_qv in Thermo_Function : 1.13232E-02 [kg kg-1]
DEBUG : Cefp in Thermo_Function : 1.01359E+03 [J K-1 kg-1]
DEBUG : Cl in Thermo_Function : 4.19000E+03 [J K-1 kg-1]
DEBUG : Tq_2_Trho in Thermo_Function : 3.02014E+02 [K]
DEBUG : esi_Emanuel in Thermo_Function : 4.58907E+03 [Pa]
DEBUG : thetae_Emanuel in Thermo_Function : 3.27608E+02 [K]
DEBUG : thetaw_Emanuel in Thermo_Function : 2.55824E+02 [K]
DEBUG : moist_laps_temp in Thermo_Function : 2.96495E+02 [K]
```

4.2.9 thermo2

Thermo_Advanced_Function に登録されている関数について、テストを行うプログラム。Jordan (1958) のサウンディングデータをもとに、基準高度の情報を与えて、返された値が妥当なものであるかを検証するプログラム。

実行方法

make すると、実行ファイル thermo2 が作成されているので、実行すると以下のような質問が出力される。

```
Input the reference height [m].  
500.0
```

値を入力すると、以下のように各ルーチンを用いて計算した結果が出力される。

```
DEBUG : precip_water in Thermo_Advanced_Function : 4.54026E+01 [mm]  
DEBUG : CAPE in Thermo_Advanced_Function : 4.07556E+02 [J kg-1]  
DEBUG : CIN in Thermo_Advanced_Function : -2.85806E+01 [J kg-1]  
DEBUG : z_LCL in Thermo_Advanced_Function : 9.28418E+02 [m]  
DEBUG : z_LFC in Thermo_Advanced_Function : 2.97419E+03 [m]  
DEBUG : z_LNB in Thermo_Advanced_Function : 1.15760E+04 [m]  
DEBUG : T_LFC in Thermo_Advanced_Function : 2.82911E+02 [K]  
DEBUG : T_LNB in Thermo_Advanced_Function : 2.24629E+02 [K]
```

4.2.10 time_check

Basis モジュールの日時カウント用関数 `counter_day`, `counter_sec` および、タイムゾーン変換ルーチン `time_zone_convert` のテストプログラム。任意の 2 日時を与えて、その期間の日数と秒数を表示する。

実行方法

実行すると、以下のような質問が表示されるので、適切に答える。

```
Input the start time [yyyy:mm:dd HH:MM:SS].  
[Example] 2013:01:01 13:00:01  
2012:12:30 23:59:59  
Input the end time [yyyy:mm:dd HH:MM:SS].  
[Example] 2013:01:01 13:00:01  
2013:01:01 00:00:00  
You input start time : 2012/12/30 23:59:59  
You input end time : 2013/01/01 00:00:00  
3 [day], 86401 [sec]  
start time (UTC) : 2012/12/30 14:59:59
```

この場合、2012/12/30 23:59:59 から、2013/01/01 00:00:00 までの日数と秒数を計算する設定である。計算結果は最後に表示されている通り、日数は 3 日分、秒数で計算すると 86401 秒となる。また、最後は与えた計算開始時刻について、JST と仮定したときの、その時刻に対応する UTC の時刻を出力する。

4.2.11 traj_sample

Forward_Traject, Backward_Traject のテスト用プログラム. 三角関数型に時間変化する 2 次元水平一様風の場合について, 前方・後方流跡線を計算する.

実行方法・実行結果

本プログラムは単体で実行するだけであり, 以下のような計算設定を入力する質問が表示される.

```
input scheme of time integration.
EU1 or RK4.
RK4
input direction of trajectory for time.
1 = Forward, 2 = Backward.
2
```

最初の質問は時間積分のスキームの種類であり, EU1 は 1 次オイラスキーム, RK4 は 4 次ルンゲ=クッタスキームである. 次の質問は積分の方向である. 1 は前方流跡線, 2 は後方流跡線を計算する.

計算結果

図 4.11 は点 (0.1, 0.1) から開始時に北東方向に一様な風が吹いている場における後方流跡線の軌跡を示す. 風の場合は水平一様であるが, 時間について三角関数型に変化するので, 軌跡は円形に変化していることがわかる.

4.2.12 wind

モジュール Derivation, Trajectory のルーチンをテストするプログラム. 解析的な気圧場を与えて, そこから気圧勾配を計算し地衡風場を, その得られた地衡風について渦度を計算し, さらに速度場から流線計算を行う. 気圧場の分布と最後に計算された流線の軌跡が一致することを確認することができる. ここで与える気圧場 $p(x, y)$ は

$$p(x, y) = \cos x + \cos y$$

である.

計算結果

解析的に与えた気圧場は図 4.12, この気圧場から計算される水平速度場は図 4.13, 得られた速度場から計算される鉛直渦度場は図 4.14, 水平速度場をもとに計算される流線は図 4.15 である. ここで, 流線は領域中心から最も近い円形であり, 気圧場の等値線と同心円を形成していることに注意.

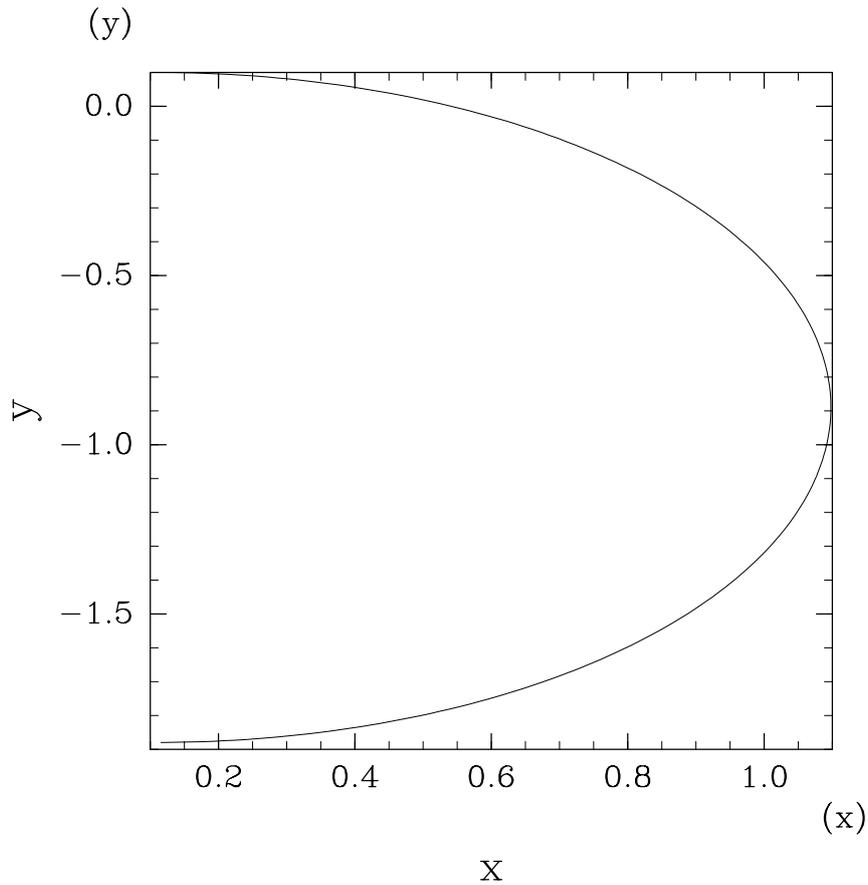


図 4.11: 流跡線解析の結果.

4.2.13 advection

モジュール `ffttp` のテスト用プログラム. 線形 1 次元の移流方程式について, スペクトル法を用いてその時間発展を計算する.

計算を行う方程式系は空間方向に 1 次元の物理量 $u(x, t)$ についての純移流方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

である. これを空間方向にはスペクトル展開し, 時間方向にはクランクニコルソンスキームを用いている. 空間格子数等はネームリストファイル `advection.nml` で設定可能である.

実行方法・ネームリスト

```
./advection < advection.nml
```

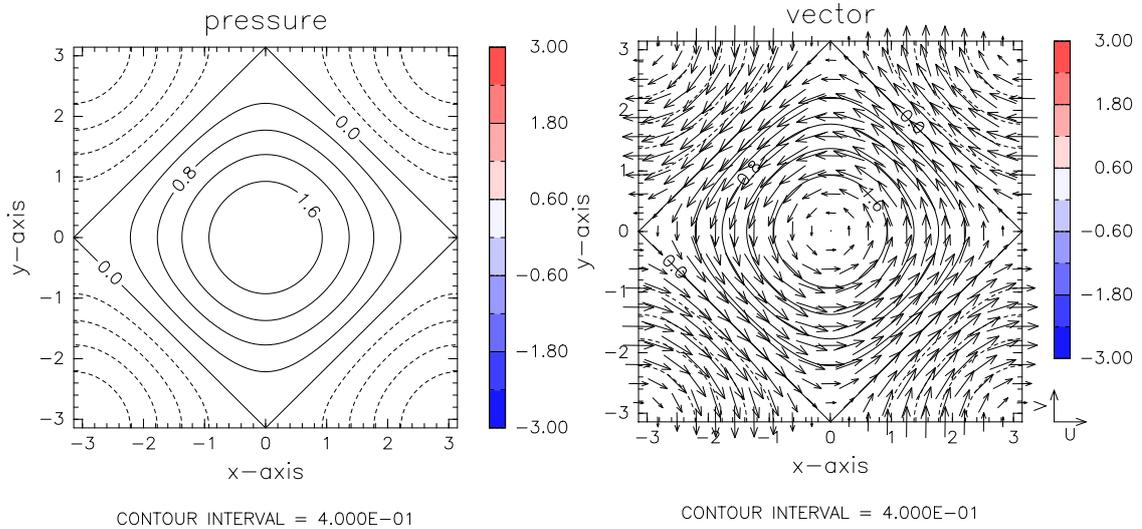


図 4.12: 解析的に与えられた気圧の場.

図 4.13: 気圧場から診断的に求められた水平風速場.

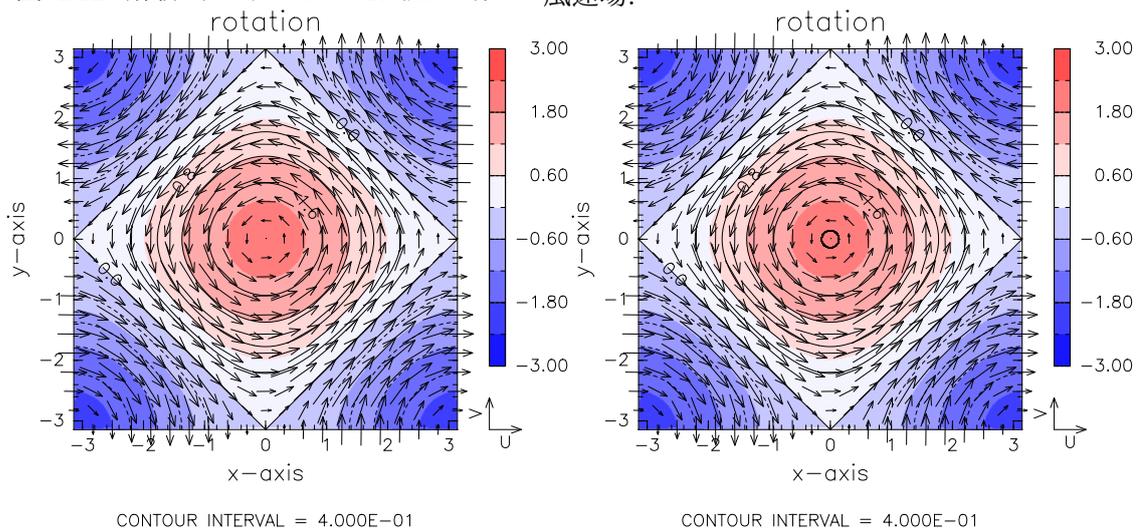


図 4.14: 速度場から求められた鉛直渦度場. 図 4.15: 速度場から計算される流線の軌跡.

この結果, `advection.nc` が出力される. また, ネームリストの変数は以下のとおりである.

```
&input
  nx=100 ! 空間格子点数
  dt=0.05 ! 時間間隔
  nt=100 ! 計算ステップ数
  xmin=0.0 ! 領域左端
  dx=0.0628 ! 空間格子間隔
/
```

計算結果

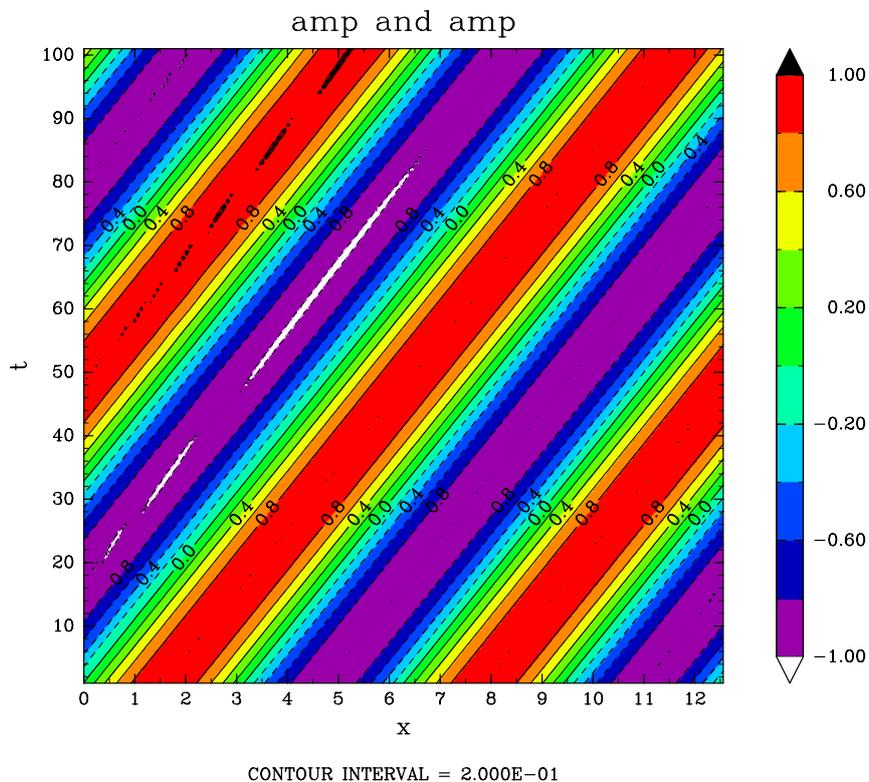


図 4.16: 波の時系列.

4.2.14 diffusion

モジュール `ffttp` のテスト用プログラム. 線形 1 次元の拡散方程式について, スペクトル法を用いてその時間発展を計算する.

計算を行う方程式系は空間方向に 1 次元の物理量 $u(x, t)$ についての純拡散方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

である. これを空間方向にはスペクトル展開し, 時間方向にはクランクニ科尔ソンスキームを用いている. 空間格子数等はネームリストファイル `diffusion.nml` で設定可能である.

実行方法・ネームリスト

```
./diffusion < diffusion.nml
```

この結果, `diffusion.nc` が出力される. また, ネームリストの変数は以下のとおりである.

```
&input
nx=100 ! 空間格子点数
dt=0.01 ! 時間間隔
nt=100 ! 計算ステップ数
xmin=0.0 ! 領域左端
dx=0.0628 ! 空間格子間隔
/
```

計算結果

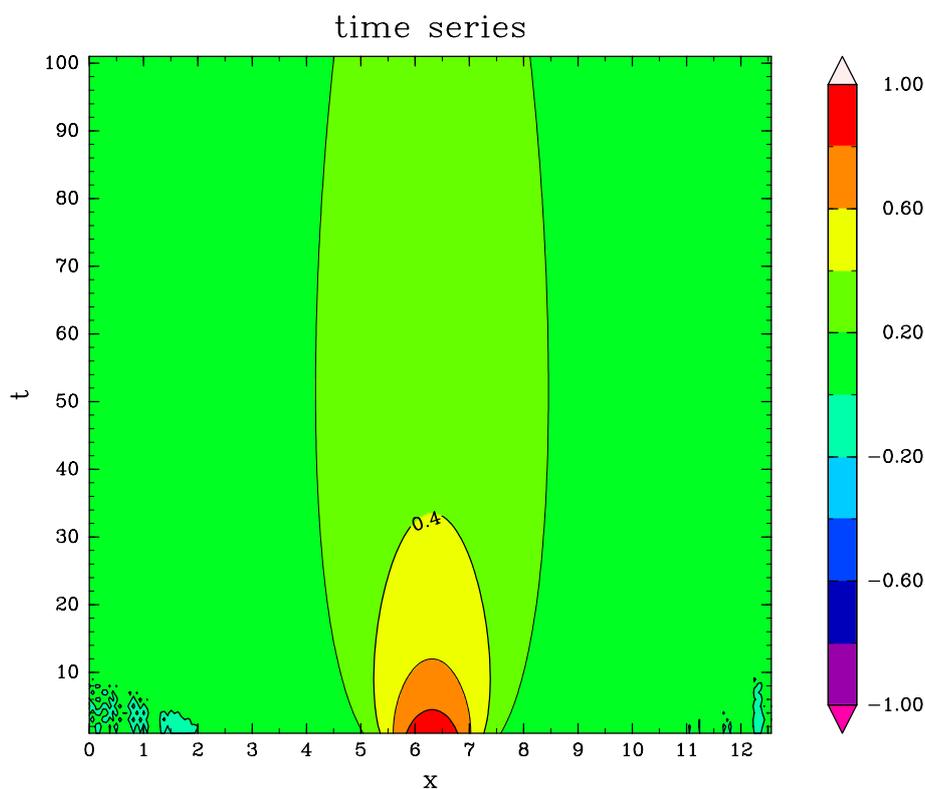


図 4.17: 波の時系列.

4.2.15 poisson

2次元水平面におけるポアソン方程式を計算するプログラム. 強制項は領域の中心に有限領域をもつテーブル関数型の強制を設定している.

計算する方程式は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\rho$$

である。ここで、 ψ は 2 次元の未知関数、 ρ は 2 次元の強制である。

実行方法・ネームリスト

実行プログラムは `poison` というプログラム単体である。ネームリストファイルは `poison.nml`。以下のように実行することができる。

```
./poison < poison.nml
```

ネームリストの変数は以下のとおりである。

```
&input
nx=100      ! x 方向格子数
ny=100      ! y 方向格子数
tp='1221'   ! 計算領域境界条件
method=2    ! 計算手法
ter_flag=.false. ! 内部領域境界をおく。
/
```

上記プログラムを実行すると、`poison.nc` という名前の NetCDF ファイルが出力される。描画には `draw` プログラムを用いればよい。このときの描画設定ファイルは `draw_poison.nml` である。また、計算結果のデータ出力とともに、演算に要した時間が標準出力で以下のように出力される。

```
*** MESSAGE [HistoryCreate1] *** "poison.nc" is created (origin=0. [])
*** MESSAGE [HistoryClose] *** "poison.nc" is closed
-----
Main solver running time =      1.02846E+01
This Method is Jacobi Method.
-----
```

計算結果

領域中心に円形テーブル関数型の強制を与えたときのポアソン方程式の計算結果は [図 4.18](#) である。

- 備考
- 境界条件の設定 `tp` はポアソンソルバの引数としてそのまま与えているので、境界条件の数字の意味は??, ?? 参照。
 - ポアソンソルバの設定 `method` は、1 がガウスザイデル、2 がヤコビ法。
 - 本ルーチンは内部に任意の境界をもつ計算でも行うことができる。変数のうち、`ter_bound` は `.true.` に指定すると、内部境界領域が存在する設定で計算を行う。この内部境界領域を含んだ形で計算した結果が [図 4.19](#) である。

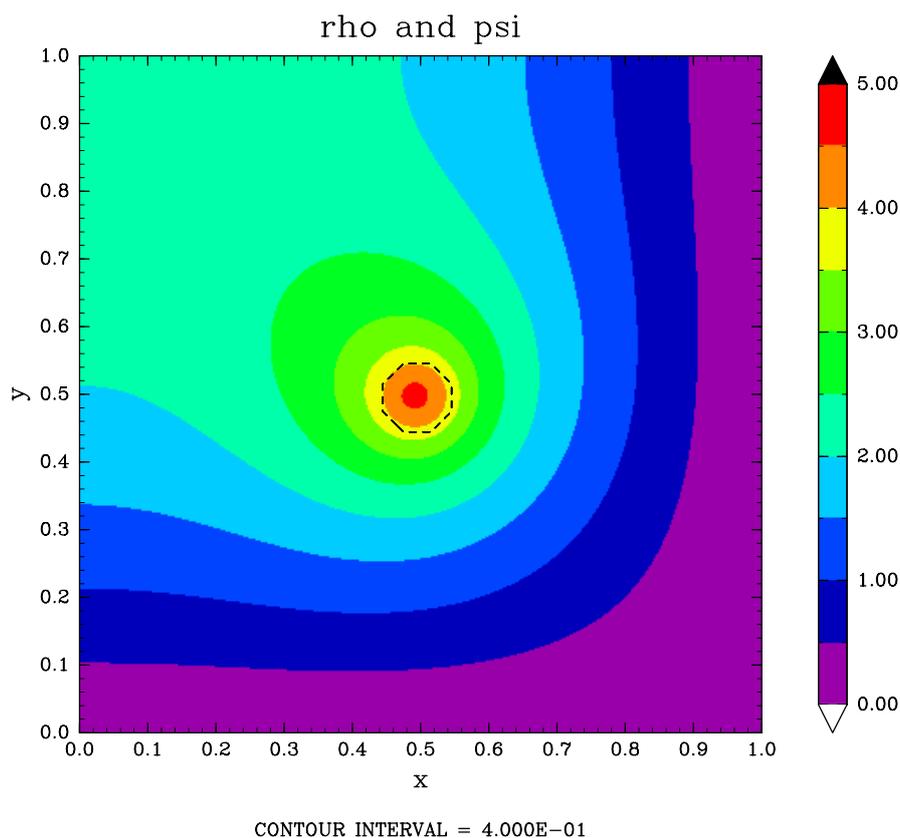


図 4.18: 領域中心にテーブル関数型の強制を与えた場合のポアソン応答. カラーが応答の分布であり, 等値線が強制の境界である.

4.2.16 parallax_test

ひまわり衛星の視差補正を計算するプログラム. 各緯度経度で観測された雲頂高度が一律に 10 km であった場合, 補正された緯度経度が元の緯度経度とどの程度距離がずれているかをカラーで表示する.

実行方法

実行プログラムは `parallax_test` というプログラム単体である. 以下のように実行することができる.

```
./parallax_test
```

上記プログラムを実行すると, 以下のように結果の図をどのように表示するか問われるので, 出力したいデバイスを番号で入力する.

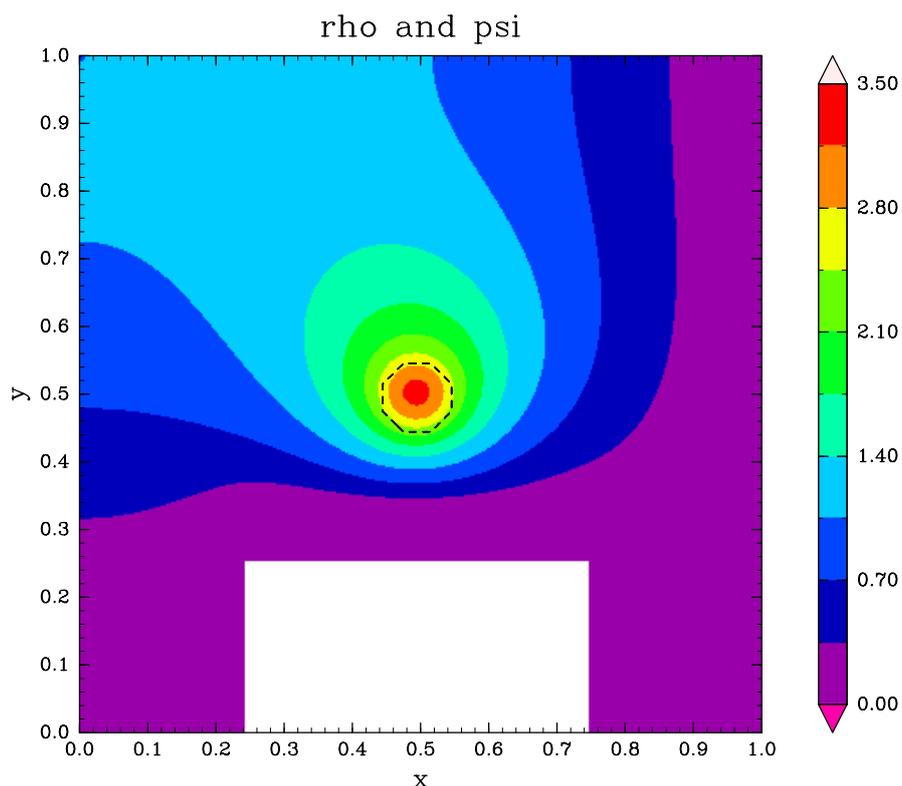


図 4.19: 領域中心にテーブル関数型の強制を与え、内部領域に未定義境界領域をもつ場合のポアソン応答。カラーが応答の分布であり、等値線が強制の境界である。白抜き領域が内部境界領域であり、この領域では反復計算を行っていない。

```
workstation id (i) ? ;
1:DISP, 2:FILES ;
```

計算結果

雲頂高度が一様に 10 km である場合の計算結果は図 4.20 である。

4.2.17 adjust

教育用プログラム。線形 1 次元の f 面浅水方程式について、有限差分法を用いて地衡流調節と重力波放射をシミュレーションするプログラム。

方程式系などの詳細は 5.9.3 参照。

実行方法・ネームリスト

実行プログラムは `adjust` というプログラム単体である。初期値は netcdf 形式の 1 次元格子座標データとその格子点で定義された高さ、水平速度 2 成分のデータが格納されているファイルを読み込む。サンプル初期値は `ruby-netcdf` がインストール

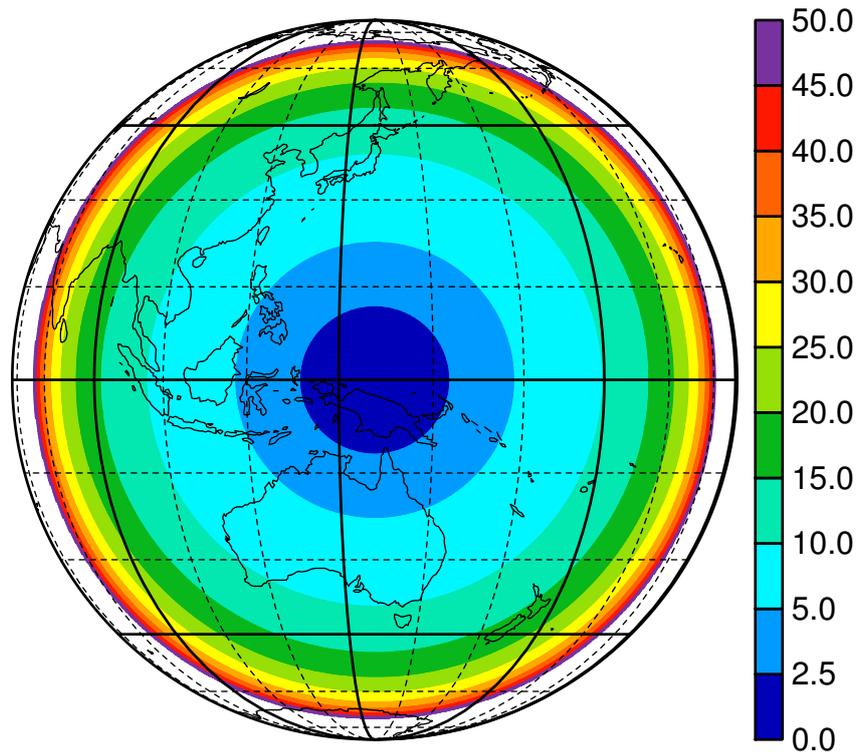


図 4.20: 雲頂高度が一様に 10 km である場合の視差補正距離 (カラー, km).

されていれば, `make.rb` というスクリプトを実行することで作成できる. この初期値データは水平速度がすべてゼロで高さのみ計算領域の中心で不連続となるプロフィールデータである (図 4.21 参照). もしこのデータ以外で計算したい場合は各自でデータを用意すること.

実行方法は以下のコマンドである.

```
./adjust < adjust.nml
```

この結果, `adjust.nml` の `oname` で設定されているファイル名で計算結果が出力される.

ネームリストの変数は以下のとおりである.

```
&input
  corioli = 1.0e-1    ! コリオリパラメータ [1/s]
! beta = 1.0e-5     ! ベータ係数 [1/m s]
  beta = 0.0         ! ベータ係数 [1/m s]
  mean_height = 100.0 ! 流体層の平均厚さ [m]
  fname = 'init.dat' ! 初期値ファイル
  oname = 'result.nc' ! 結果の出力ファイル
  nt = 80000         ! 計算時間ステップ
  dt = 0.1           ! 時間間隔 [s]
```

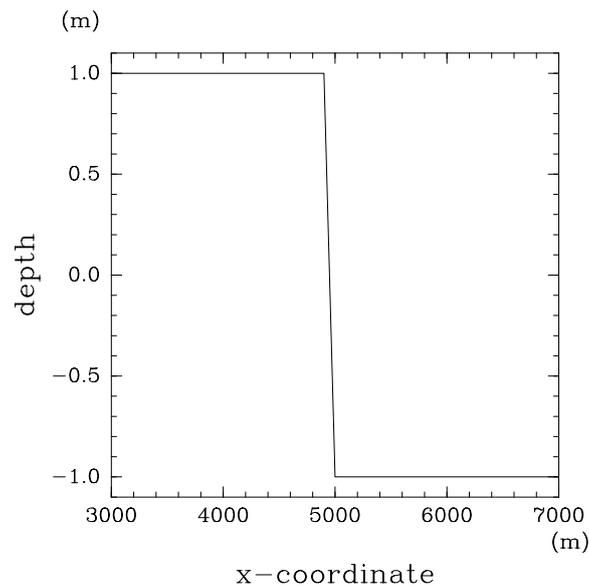


図 4.21: モデル初期の高さ偏差.

```

dmpstep = 100      ! 結果の出力ステップ間隔
nx = 100          ! x 方向の格子点数
x_axis = 'x'      ! 初期値ファイルの x 軸の名前
val_height = 'ht' ! 流体層の深さ分布の名前
val_ubar = 'ub'   ! x 方向の一般風の名前
val_vbar = 'vb'   ! y 方向の一般風の名前
val_h = 'h'       ! 初期値ファイルの深さ変動の名前
val_u = 'u'       ! 初期値ファイルの x 方向速度の名前
val_v = 'v'       ! 初期値ファイルの x 直交方向速度の名前
bound = 2         ! 境界条件 "1" = no gradient, "2" = open bound
                  ! "3" = 周期境界条件
steady_flag = 'xxx' ! 定常状態の基本場を結果データに入れるかどうか.
                  ! 1 文字目 = 山の高さ (ht)
                  ! 2 文字目 = x 方向の流速 (ubar)
                  ! 3 文字目 = y 方向の流速 (vbar)
regist_flag = 'ox' ! 各物理量への付加力項フラグ
                  ! regist_flag(1) = 粘性による抵抗 (波数依存)
                  ! regist_flag(2) = エクマン摩擦による抵抗
regist_coe = 1.0, 1.0, 1.0
                  ! regist_flag で指定した各付加力の係数
                  ! regist_coe(1) = 粘性係数 (u',v' への寄与)
                  ! regist_coe(2) = 拡散係数 (h' への寄与)
                  ! regist_coe(3) = エクマン摩擦のスピンアップ時間 [1/s]
/

```

計算結果

デフォルトのネームリストに設定されている外部パラメータの各設定値から、重力波の位相速度はおよそ 31 m/s、変形半径はおよそ 300 m となっている。このとき、定常状態となったときの高さの偏差と地衡流調節によって駆動される地衡流を示した図がそれぞれ 4.22, 4.23 である。

図 4.24 は高さの偏差の時系列にロスビー変形半径を黒線で重ねたものである。同様に地衡流の分布を示した図が 4.25 である。

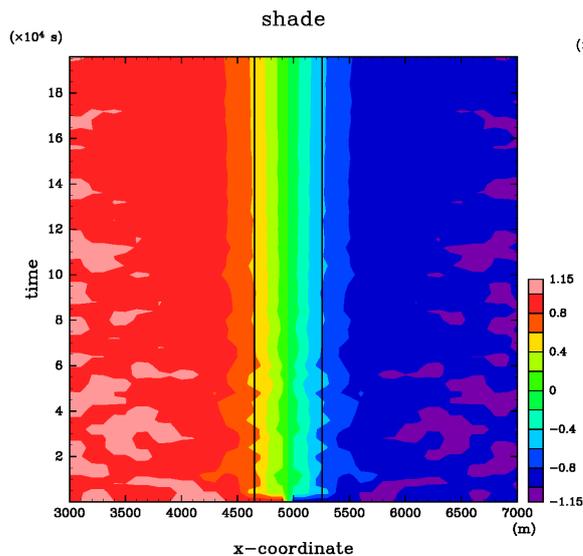


図 4.22: 高さの時系列変化。黒線がロスビー変形半径。

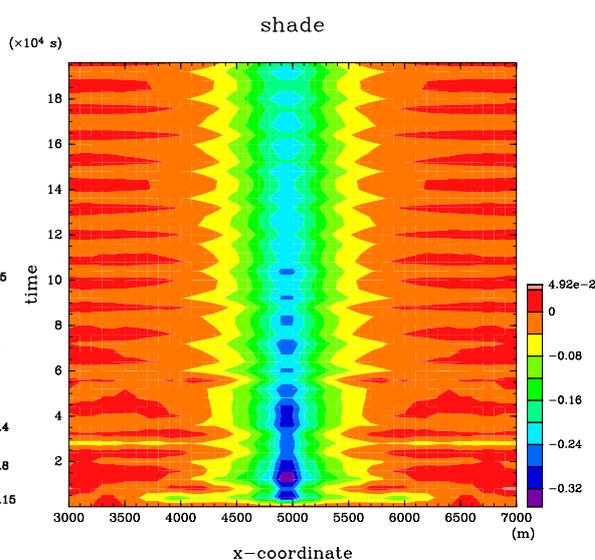


図 4.23: 地衡流の時系列変化。

さらに、図 4.26 は図 4.22 の積分開始初期部分だけを示したものであるが、顕著な重力波が中心から左右外向きに伝播していることがわかる。また、この時系列から重力波の位相速度を計算するとおよそ 30 m/s 程度で先に示した理論値とよく合うことがわかる。波のエネルギーは振幅の 2 乗に比例するため、この図からエネルギーが重力波とともに外向きに伝播している様子も明らかであろう。

4.2.18 Thorpe_2d

Thorpe and Bishop (1995) によって計算された PV inversion の 3 次元理想モデルを 2 次元版にして簡易計算させたモデル。領域中央に円形の PV アノマリーを配置し、それに応答するジオポテンシャルの分布を計算する。ソースコードの強制項部分を変更するだけで、様々なタイプのアノマリに対する応答を計算することができる。出力結果は、ジオポテンシャルとそこから計算される地衡風の分布が格納されている。

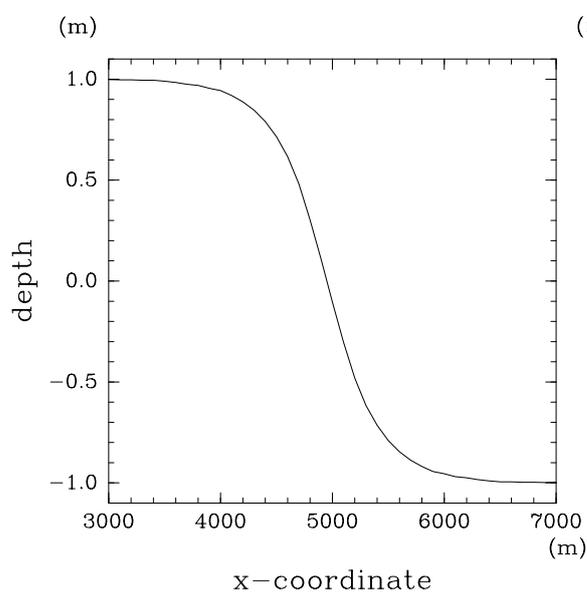


図 4.24: 定常状態での高さ。

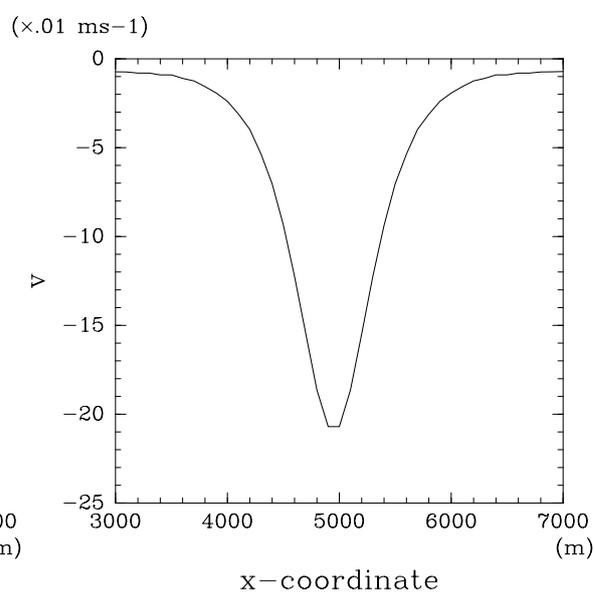


図 4.25: 定常状態での地衡流の分布。

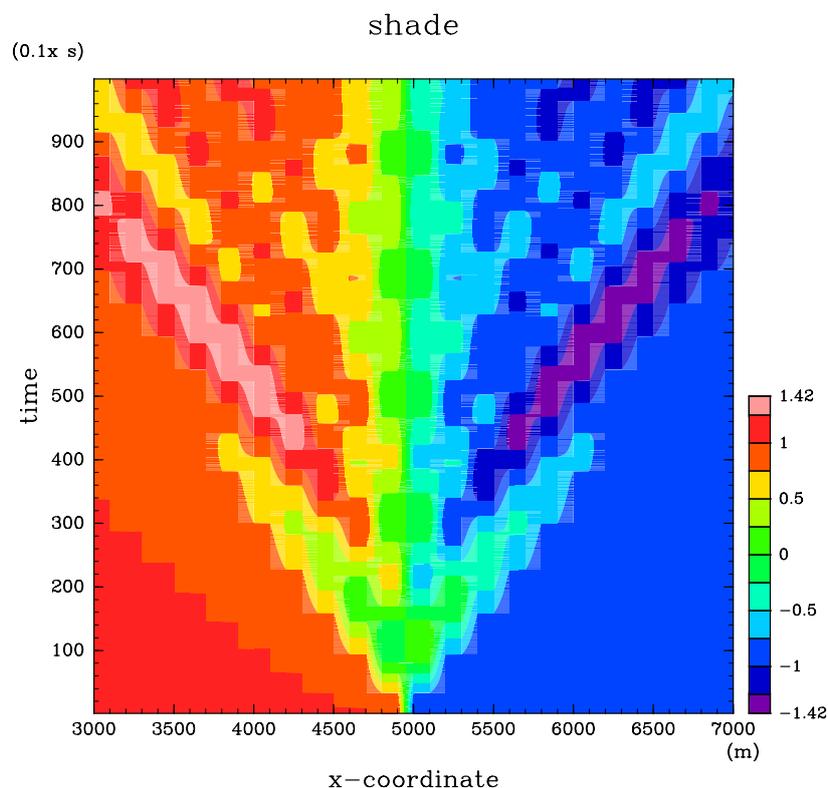


図 4.26: 積分開始初期における重力波の外向き伝播.

実行方法・ネームリスト

本プログラムは以下のように実行する.

```
$ ./Thorpe_2d < Thorpe_2d.nml  
これにより計算結果である Thorpe_2d.nc が生成される.
```

また, 実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである.

```
&input  
nx=100  
ny=100  
tp='1111'  
method=2  
/  

```

計算結果

本プログラムの結果から得られた 2 次循環の分布は図 4.27 に示す. 2 次元計算であ

るため、地衡風は 1 成分しか計算することはできない。カラーで示した量は紙面に垂直な成分を示したものである。

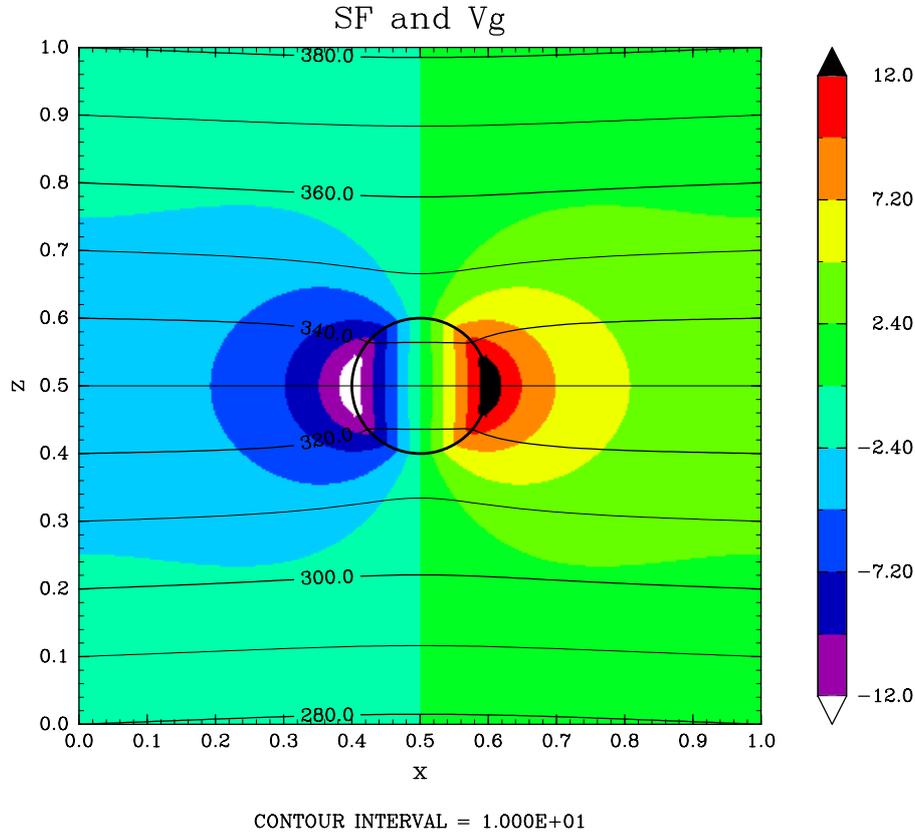


図 4.27: 中央の円形の黒線を境界にもつ PV アノマリが存在する場合の温位 (等値線) と地衡風 (カラー) の応答.

4.2.19 Thorpe_3d

Thorpe and Bishop (1995) によって計算された PV inversion の 3 次元理想モデルを計算させるモデル. 領域中央に円形の PV アノマリーを配置し、それに応答するジオポテンシャルの分布を計算する. ソースコードの強制項部分を変更するだけで、様々なタイプのアノマリに対する応答を計算することができる. 出力結果は、ジオポテンシャルとそこから計算される地衡風の分布が格納されている.

実行方法・ネームリスト

本プログラムは以下のように実行する.

```
$ ./Thorpe_3d < Thorpe_3d.nml
```

これにより計算結果である Thorpe_3d.nc が生成される。

また、実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

```
&input
nx=100
ny=100
nz=100
tp='111111'
method=2
/
```

計算結果

本プログラムの結果から得られた 2 次循環の分布は図 4.28 に示す。y 軸の中心を通る $x-z$ 断面で、カラーで示した量は紙面に垂直な成分を示したものである。

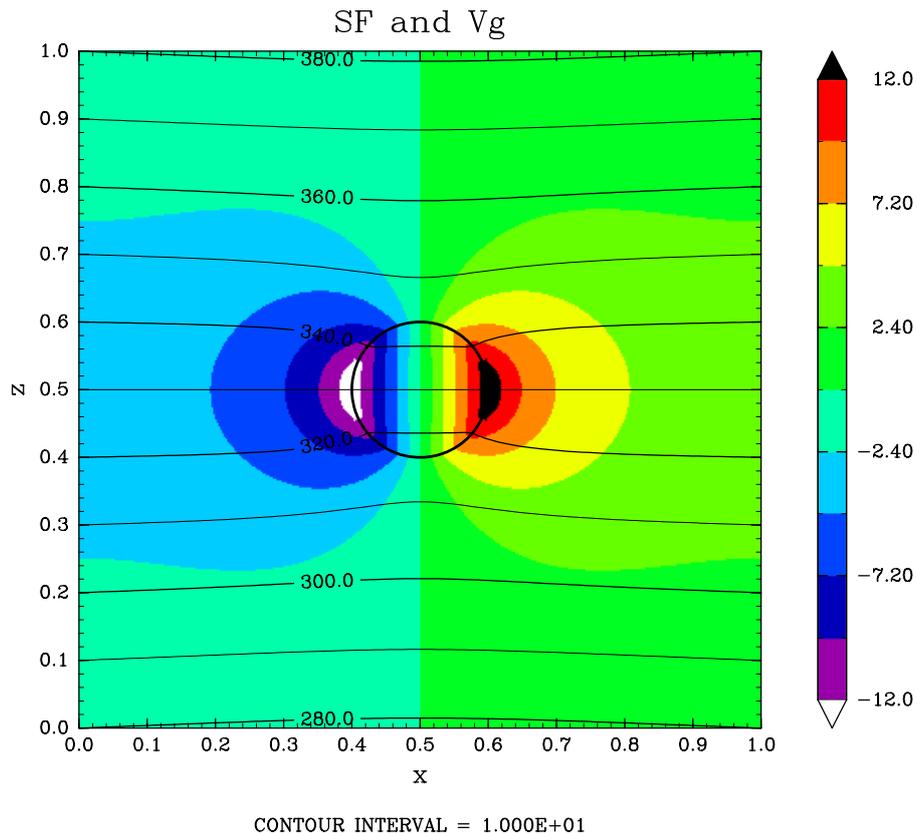


図 4.28: 中央の円形の黒線を境界にもつ PV アノマリが存在する場合の温位 (等値線) と地衡風 (カラー) の応答.

4.2.20 SEQ

Pendergrass and Willoughby 2009 (MWR) における 2 次元軸対称ソーヤーエリアッセンモデル (SEQ) である。接線風の渦の分布と環境場の温度構造、壁雲を想定した非断熱加熱の分布を与えると、静力学、傾度風バランスを満たした 2 次循環 (インフロー + 上昇流) の分布を計算する (いわゆる強制・応答問題)。

demo/SEQ 以下にモデル一式が格納されている。demo/SEQ のディレクトリには、さらに詳細に各循環を示した図も同梱されているので、確認されたい。元の論文の結果とほぼ同様の結果となっていることが確認されるであろう。

なお、詳細なモデル方程式等については付録参照。

実行方法・ネームリスト

本プログラムは 3 つのプログラムを順に実行することで 2 次循環を計算する。

1. `sound_make` は 1 次元の理想的なサウンディングファイルを作成する。既にサウンディングがある場合は、このプロセスは省略することができる。
2. `initial_make` は先の 1 次元サウンディングファイルを 2 次元方向に拡張する。その際、このプログラム内で定義されている 1 次循環に基づいて、傾度風バランス、温度風バランスするように温度や気圧の水平分布を修正する。
3. 先の 2 次元初期値生成プログラムで作成された 1 次循環と非断熱加熱の分布、温度分布をもとに、2 次循環の分布を計算する。

```
$ ./sound_make < SEQ.nml
を実行すると、sounding.dat が生成される。
$ ./initial_make < SEQ.nml
を実行すると、先の sounding.dat に基づいて、2 次元の初期値データ
initial.nc が生成される。
$ ./SEQ < SEQ.nml
を実行すると、initial.nc から 2 次循環の分布を診断的に計算する。その結果
は result_initial.nc というファイルに出力される。ここで、実行環境がマル
チコア環境であるなら、以下のコマンドを実行することにより、openMP 並列が
設定される。
export OMP_NUM_THREADS=[number]
ここで、[number] には並列数を入力する。ただし、openMP 並列を行う場合は、
../Mkinclude の Fortran コンパイルフラグに openMP を実行するオプション
をつけて make しておく必要があることに注意。
```

また、実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

```
&input
nr = 751 ! radial grid number
```

```
nz = 21 ! vertical grid number
dr = 2000.0 ! radial grid interval [m]
dz = 1000.0 ! vertical grid interval [m]
bc = '1112' ! boundary conditions for poisson solver
          ! bc(1:1) = bottom
          ! bc(2:2) = center
          ! bc(3:3) = top
          ! bc(4:4) = outside
          ! '1' = rigid lid, '2' = non flux
fname = 'noq_init.nc' ! forcing profile data (2d)
sound_name = 'sounding.dat' ! sounding data (1d)
coril = 20.0 ! latitude [deg] (Using of calculating Coriolis parameter)
mom_flag = 1 ! momentum source flag
          ! "0" = No momentum.
          ! "1" = calculating with Vt.
          ! "2" = reading from the file of "fname".

/
```

計算結果

本プログラムの結果から得られた 2 次循環の分布は図 4.29 に示す。

描画

同ディレクトリに格納されている描画プログラムは親ディレクトリで

```
$ make draw
```

を実行すれば, SEQ ディレクトリにシンボリックリンクされている draw が使用できる. draw の使用方法は付録?? 参照.

4.2.21 sound_analysis

任意のテキストカラムデータを読み込み可視化するためのプログラム群. 可視化のためには, Fortran 90 版 DCL がインストールされている必要がある.

本プログラム群は高層気象観測における未処理のテキストカラムデータから初期解析のための可視化を自動で行うという目的で作成されたものである.

プログラム構成

本プログラムは以下のプログラム群で構成されている.

sound_conv

テキストカラム形式で格納された大気鉛直プロファイルデータから, CReSS の 1 次元初期値を作成するための変換プログラム. 本プログラムは DCL がインストールされていなくても実行が可能である.

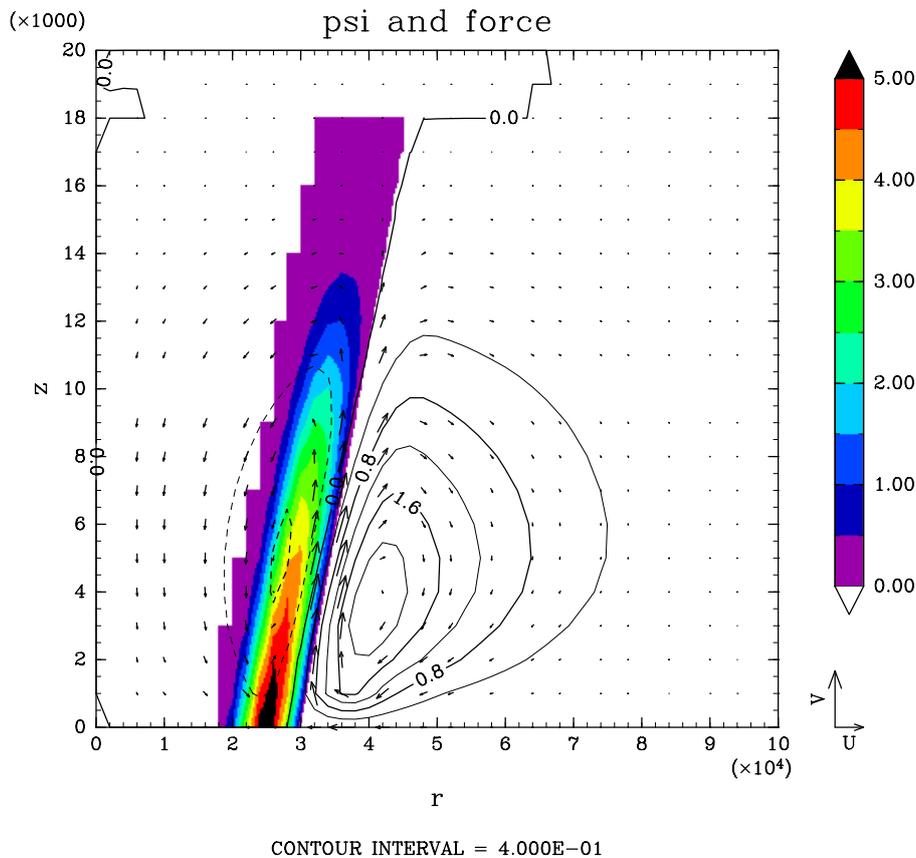


図 4.29: 診断的に求められた 2 次循環 (矢印) と非断熱加熱の分布 (カラー), さらに質量流線関数 (等値線) である.

sound_1d

sound_conv で変換されたデータを元に, 鉛直プロファイル図を作成し, 可降水量等の鉛直パラメータを計算するプログラム. 実行には DCL がインストールされている必要がある.

sound_2d

sound_conv で変換されたデータを元に, 鉛直プロファイルの時系列図を作成し, 可降水量等の鉛直パラメータの時系列図も作成するプログラム. 実行には DCL がインストールされている必要がある.

コンパイル方法

DCL がインストールされていない場合, つまり CReSS 用の初期値作成のみ行いたい場合は,

```
$ make sound_conv
```

と実行すれば, 同ディレクトリに sound_conv というプログラムが作成されている.

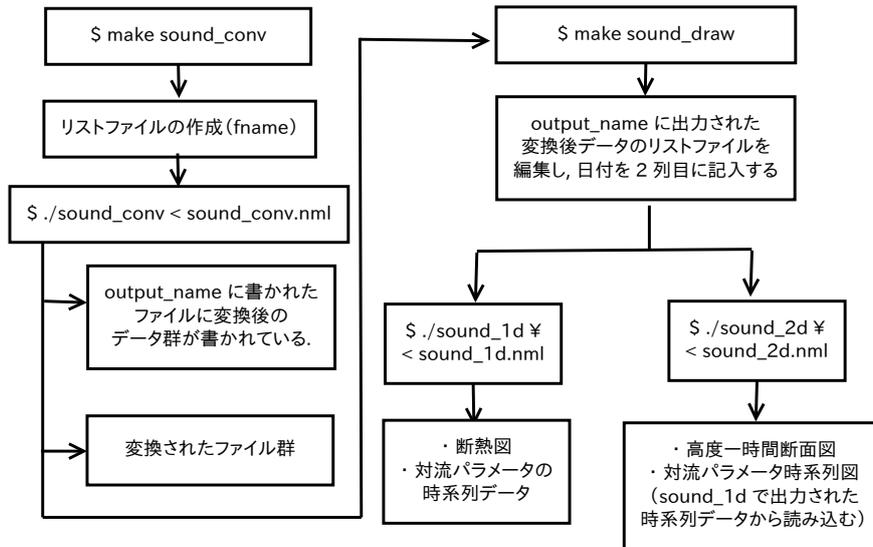


図 4.30: sound_analysis におけるプログラムの実行流れ.

DCL がインストールされている場合、つまり可視化まで行いたい場合、

```
$ make sound_draw
```

と実行すれば、同ディレクトリに sound_1d, sound_2d が作成されている。

実行方法

本プログラム群は全て以下のような形式で実行が可能である。

```
$ ./[program file] < [program file].nml
```

実行の流れは図 4.30 に示すとおりである。可視化を行うには必ず sound_conv を実行して読み込むための専用形式に変換しなければならない。

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

sound_conv

```
&input
fname = 'list.dat' ! 変換するファイル列が書かれたリストファイル
sign_flag = '0a00000006510000000032400000000000000000' ! 各カラムの表す
```

変数

```
! '1' = height
! '2' = temperature
! '3' = pressure
! '4' = vapor
```

```

! '5' = west wind ! positive value is from west to east
! '6' = south wind ! positive value is from south to north
! '7' = tmp1
! '8' = tmp2
! '9' = tmp3
! '0' = no read
! 'a' = starting observation time [s] (option)
undef = '--' ! 欠損値として定義されている文字
conv_undef = -999.0 ! 変換後のデータに対する欠損値
skip_num = 8 ! 先頭の読み飛ばし行数 [ヘッダー等を読み飛ばす]
unity = 'm', 'degC', 'hPa', '%', 'degree', 'false' ! 単位
! unity(1:1) = 'm' .or. 'km' ! 高度の単位
! unity(2:2) = 'K' .or. 'degC' .or. 'PK' ! 温度の単位
! unity(3:3) = 'Pa' .or. 'hPa' ! 気圧の単位
! unity(4:4) = '%' .or. 'g/kg' .or. 'kg/kg' ! 水蒸気量の単位
! unity(5:5) = 'm/s' .or. 'rad' . or. 'degree' ! 風速の単位
! unity(6:6) = 'true' or 'false' ! 風向
! もし、風が風速と風向で記録されている場合は rad が角度を表し、
! 原点方位は北、かつ、時計まわりに正方向とする。
! このような単位で記録されている場合、"west wind" に風速、
! "south wind" に風向が読み込まれるように sign_flag を設定する。
! unity(6:6) :
! 風が流れる方向を正として格納している場合 'true'
! 風が流れてくる方向を正として格納している場合 'false'
! [exam.] : 北向きの風が正なら、'true'、北風が正なら 'false'。
limit_height = 300.0 ! reading start height [m]
snd_height = 100.0 ! 観測点の標高 [m]
output_name = 'tested.dat' ! 変換したファイル列が書き込まれるリストファイ
ル名
conv_inter = .true. ! 変換データを間引くかどうか
dz_conv = 100.0 ! conv_inter = .true. のときの間引き間隔 [m]
hydro_ref = 1013.25e2 ! 1 あるいは 3 のどちらかがない場合、静力学関係から
! 補完を行う。1 が指定されない場合、基準高度 [m] を、3 が指定されな
い
! 場合、基準圧力 [Pa] を hydro_ref に指定する。
rev_flag = .false. ! 入力データが高度について上向きに入っているなら .false.
! 下向きに入っているなら .true. で順番を逆にする。
! CReSS の 1 次元入力データを変換するなら .true.
! ラジオゾンデデータを変換するなら .false.
/
sound_1d
&input
z_ref = -999.0 ! 対流パラメータ計算の際の基準高度 [m]
p_ref = 950.0e2 ! 対流パラメータ計算の際の基準高度 [Pa]
! もし、z_ref を基準とするなら、p_ref = -999.0,
! p_ref を基準とするなら、z_ref=-999.0 とすること。
cape_opt = 1 ! CAPE 関数の copt。
list_name = 'tested.dat' ! sound_conv で変換したデータリストファイル
dmp_flag = .true. ! 対流パラメータをテキストデータとして保存する [true]。
!draw_flag = 'xoxox' ! 描画に関するフラグ。
draw_flag = 'oxooo' ! 描画に関するフラグ。

```

```

! 'o' = デフォルト設定で描画する. 'x' = 描画しない.
! その他の文字による設定は以下参照.
! draw_flag(1:1) = 温位, 相当温位, 飽和相当温位図を作成する.
! draw_flag(2:2) = Skew-T を作成する.
! draw_flag(3:3) = 図に水平風速の分布を追記する.
! draw_flag(4:4) = 図に各対流パラメータの計算結果を表示する.
! draw_flag(5:5) = 速度場を元にホドグラフを作成する.
draw_region_z = 0.0, 17000.0 ! 描画する高度領域 [m]
draw_region_p = 10000.0, 100000.0 ! 描画する圧力領域 [Pa]
! draw_region はどちらも要素数 2 の 1 次元配列であり,
! draw_region(1) はグラフの下端, draw_region(2) はグラフの上端
領域.
IWS = 2
undef = -999.0 ! 欠損値
unit_v = 15.0 ! 風速分布を表記する際の単位ベクトル [m/s]
sysfont = 'Nimbus Sans L Bold 12'
/

sound_2d

&input
flist = 'tested.dat' ! 描画用時系列データファイル
! 時系列データは 1 列目にファイル名,
! 2 列目に yyyyymmddhh 形式でその時刻を入れる
conv_dat = 'convec_parmtested.dat' ! sound_id で出力される対流パラメータを読み込み,
! 時系列図を作成する.
conv_list = 'tzpxxx' ! conv_dat のデータのうち, 描くデータが入っている
! カラムの順番に 'o' をつける. 'x' なら書かない.
! 't' は時刻が格納されている列
! 複数 'o' が入っている場合は, 別々の時系列図として
! 出力する.
! 'z', 'p' は対流パラメータを計算した基準高度が格納
! されている列を表す.
! 時系列のタイトルはそれぞれ, データ行の先頭を参照.
conv_undef = -999.0 ! conv_dat の未定義値.
dz = 100.0 ! 描画間隔 [m]
z_bot = 300.0 ! 描画下端 [m]
z_top = 17000.0 ! 描画上端 [m]
iz_ref = 2 ! dz = 0 のとき, flist の iz_ref 行目のファイルの高度データ
で描く
IWS = 2 ! DCL 描画デバイス
title_txt = 'Equivalent PT' ! タイトル
cmap = 1 ! カラーマップ
cmin = 300.0 ! 等値線の最小値
cmax = 400.0 ! 等値線の最大値
smin = 300.0 ! カラーの最小値
smax = 400.0 ! カラーの最大値
cont_val = 'ept' ! 等値線として表示する変数名*
shade_val = 'ept' ! カラーとして表示する変数名*
vec_val = .true. ! 水平風速ベクトルを描くか [true で描く]
cnum = 10 ! 等値線の本数

```

```

snum = 10 ! カラーの数
undef = -999.0 ! 未定義値
sysfont = 'Nimbus Sans L Bold 12'
ntnum = 16 ! 時間方向に描くベクトルの数
nznum = 20 ! 高度方向に描くベクトルの数
unitval = '5.0' ! 単位ベクトルの値 [m/s]
fixs_flag = .false. ! カラーを逐次指定するか
fixs = 0.0, 1.0, 10.0 ! カラー逐次指定時の各物理量
fixsn = 19999, 29999, 39999, 49999 ! fixs に対応するカラーマップ値
/
! * 描画変数の種類は以下のとおり
! 'temp' = 温度
! 'rh' = 湿度
! 'qv' = 混合比
! 'pt' = 温位
! 'ept' = 相当温位
! 'sept' = 飽和相当温位
! 'east' = 東西風
! 'north' = 南北風

```

これらのネームリストに必ず入力しなければならない「変換するファイル列が書かれたリストファイル」というものは、変換したいファイルが複数存在する場合、そのファイルたちの名前を 1 行 1 ファイルで並べた 1 つのリストファイルを作成するという意味である。例として、201103.dat から 201203.dat という 13 個のファイルを順に変換したいとすると、test.dat という空ファイルに

```

201103.dat
201104.dat
:
201202.dat
201203.dat

```

という内容を書けばよい。ネームリストファイルの「変換するファイル列が書かれたリストファイル」には、test.dat が該当する。

さらに、sound_1d、sound_2d については、「読み込むファイルリストの書かれたファイル」は、1 列目にファイル名を記述し、2 列目には、そのファイルに対応する日付を yyyyymmddhh というフォーマットで格納する。可視化した際のタイトルはこの 2 列目の文字が代入される。上の例を用いると、

```

201103.dat 2011030100
201104.dat 2011040100
:
201202.dat 2012020100
201203.dat 2012030100

```

という形式でリストファイルを作成すればよい。重要なことは、これらのプログラムに必要なファイルは実際に気象データの入ったテキストカラムデータ群とそのデー

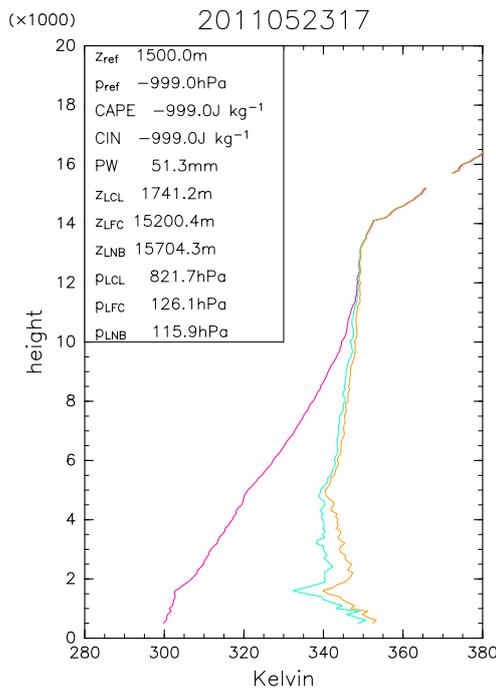


図 4.31: sound_1d で可視化されるサウンディングプロファイル (Skew-T 版).

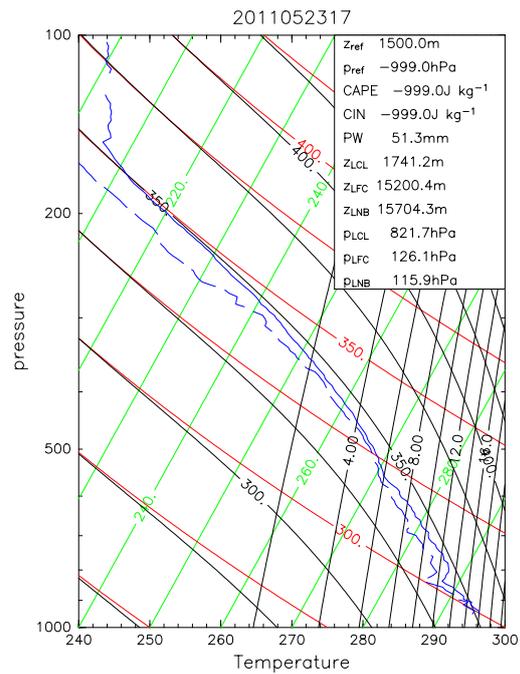


図 4.32: sound_1d で可視化されるサウンディングプロファイル (エマグラム版).

タ群をリストアップした 1 つのリストファイルである、ということである。

ちなみに、可視化用プログラムのリストファイルは読み込むデータファイル名に "unknown" という単語を記述し、後ろに日付を入れると、その日は欠損値扱いとし、時系列作成プログラム内で白抜き表示される。sound_2d を実行する際、リストファイルの日時の最初は 00 時、最後も 00 時で統一すること。該当するデータがない場合は先述の "unknown" で代用すること。

計算結果

図 4.31, 4.32, 4.33 参照.

4.2.22 NM01

浅水系における軸対称流な基本場に埋め込まれた非軸対称成分の時間発展を計算する非線形ハイブリッドスペクトルモデル（その発展の様子から、洗濯機モデルと作成者は命名）。以下はモデルの詳細である。

座標系は円筒座標系 (r, θ) 、微分の評価は r 方向には 2 次精度の中心差分、 θ 方向にはフーリエスペクトル法を採用した。スペクトル法における非線形項計算は変換法を用いている。定常な軸対称流を基本場とし、初期にその流れに埋め込まれた有限振幅の擾乱の時間発展を計算する。接線方向の軸対称流の動径分布を与えると傾度風バランスするように基本場の深さが自動的に与えられる。また、動径方向の基本場についても接線方向の軸対

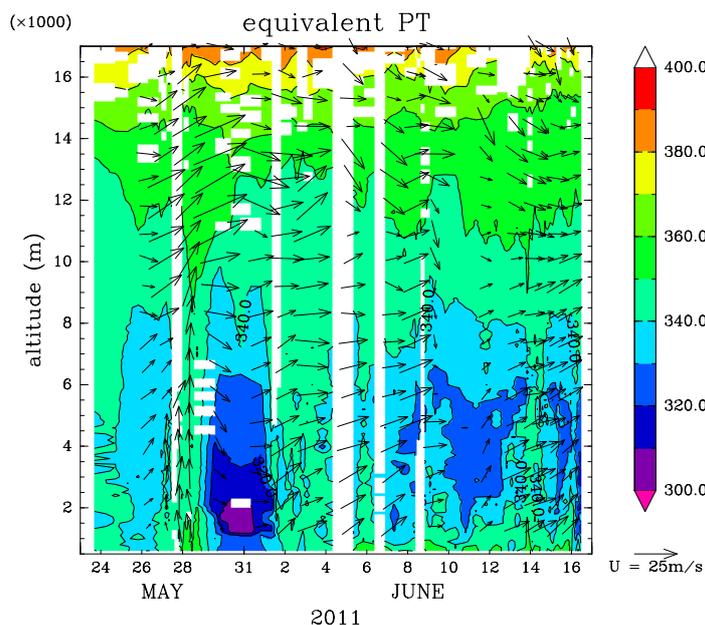


図 4.33: sound_2d で可視化される高度—時間断面図.

称流と同様に動径方向の分布を与えれば時間発展で考慮することができる^{*1}。

本モデルは単一プロセッサのみで計算させるシングル版 (NM01_s) と複数プロセッサで計算させるマルチ版 (NM01_m) が存在する。シングル版は OpenMP 並列のみ行っているが、マルチ版は OpenMP 並列に加え、ノード間については MPI 並列も行っている。

シングル版

コンパイル

本プログラムは 2 つのプログラムを順に実行することで非軸対称成分の時間発展を計算する。

1. 以下のコマンドにより、実行ファイル (make_init, VRWS) を生成する。

```
$ make
```

2. make_init は動径方向の軸対称流の分布ファイルを作成する。既に分布ファイルがある場合は、このプロセスは省略することができる。
3. VRWS は先の軸対称流の分布をもとに、ネームリスト (後述) で設定された波数の単色波を初期値としてその非軸対称成分の時間発展を計算する。

実行方法

以下のコマンドを順次実行する。

^{*1}方程式系などのモデルの詳細は付録 5.9.2 参照。

```

$ ./make_init
input the initial file name. (作成する初期データファイル名)
You have velocity data [y/n]. (軸対称のデータがあるか; 後述)
$ export OMP_NUM_THREADS=[number] (CPU 並列数; 任意)
$ ./VRWS < namelist.nml

```

- `make_init` では、2 つ目に聞かれる質問で、軸対称風のデータも全くないときは "y" を選択する。すると、`make_init` に設定されている理想的な動径方向の速度分布が与えられる。高度場は計算した理想的なプロファイルから地衡流バランスするような分布が自動的に計算される。
- "n" を選ぶと、実行者が用意した風の動径プロファイルのデータを使って計算させることができる。このとき、読み込む形式は NetCDF 形式のみ対応している。"n" と選択すると、

```

input file name and radial grid number.
radial flow is forced to zero ? [y/n].

```

という 2 つの質問を聞かれるので、1 つ目は用意した NetCDF ファイルの名前と格子点数を、2 つ目は動径風がデータとして入っている場合、それを計算で使用するか、それともゼロとして計算しないかを入力する。"Y" ならば、動径風も計算に組み込む。

- `OMP_NUM_THREADS` は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり、もし、コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば、この環境変数の設定によって並列計算が可能である。[number] には並列数を入力する。
- `VRWS` を実行すると、計算が開始する。その結果は `namelist.nml` の `foname` で設定しているファイルに出力される。

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

```

&input
nr = 196 ! radial grid number
hnt = 90 ! tangential truncation wavenumber
          ! tangential grid number is equal to "2 * hnt + 1"
nt = 72000 ! calculating time step
rmin = 0.0 ! radial center [default]
dr = 4000.0 ! radial grid interval [m]
dt = 0.5 ! time interval [s]
dmpstp = 600 ! dumping time step
          ! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"

```

```

filename = "initial.nc" ! data for axisymmetric profiles
foname = "result.nc" ! result data
ni = 10000 ! radial grid number in "filename"
nl_flag = .false. ! flag of non-linear term
                ! "false" is not calculating a non linear terms
r_dmp = 600000.0 ! effective radius for Rayleigh damping
                ! the damping is forced outside this radius
time_flag = '1' ! time scheme :
                ! [1] = 4th order's Runge-Kutta
                ! [2] = Leap Frog
                ! [3] = 1th Explicit Euler
force_flag = 'ooooooooxx' ! forcing flag
                ! 'o' = calculating, 'x' = neglecting
                ! force_flag(1:1) = linear advection term
                ! force_flag(2:2) = corioli term
                ! force_flag(3:3) = diffusion term
                ! force_flag(4:4) = Reiley dumping term
                ! force_flag(5:5) = non-linear advection term
                ! force_flag(6:6) = centifugal force term
                ! force_flag(7:7) = divergence term [only "depth"]
                ! force_flag(8:8) = gravity wave term
                ! force_flag(9:9) = temporary value [not using]
                ! force_flag(10:10) = temporary value [not using]

diff_r = 1.0 ! radial diffusion coefficient [m^2/s]
diff_t = 1.0 ! tangential diffusion coefficient [m^2/s]
init_n = -1 ! initial non-axisymmtric wave number
                ! -1 = random wave
/

```

計算結果

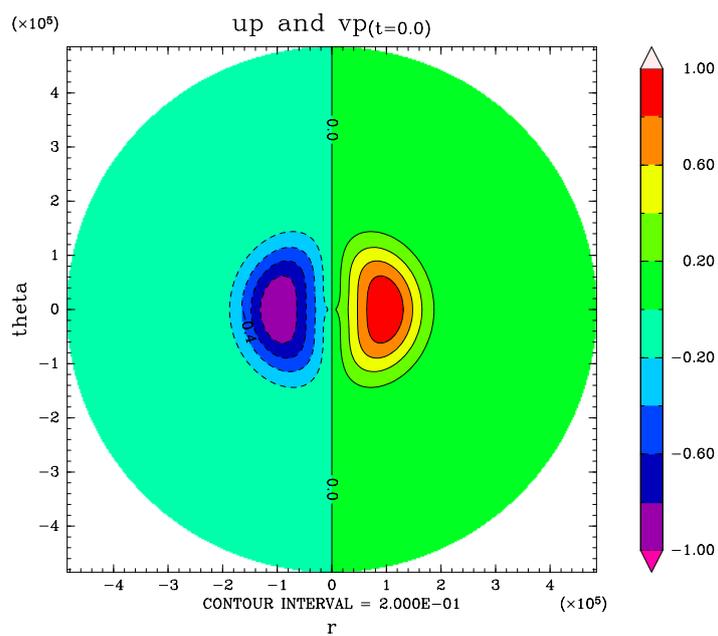
本プログラムの結果から得られた非軸対称成分の分布は図 4.34 に示す。

描画

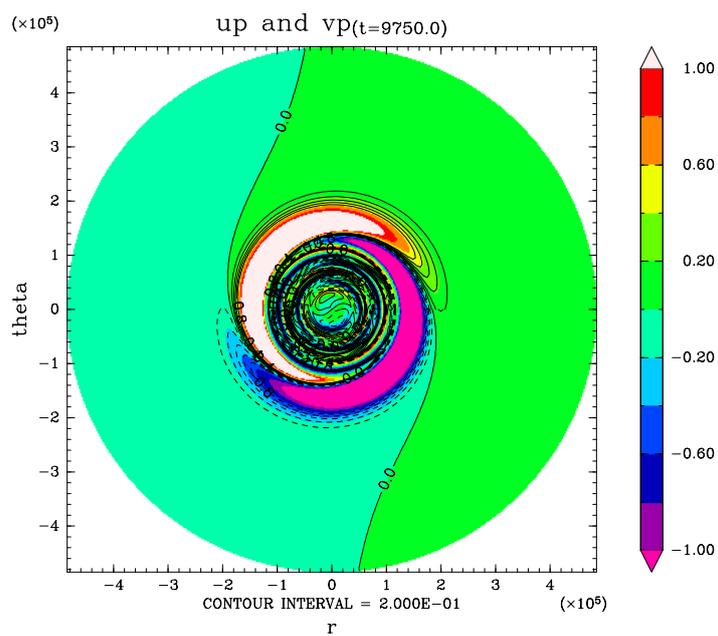
同ディレクトリに格納されている描画プログラム `draw_polar` を実行することで描画が可能である。このプログラムの使用方法は付録 ?? 参照。

マルチ版

[注意] 本プログラムを `make` コマンドによってコンパイルする場合、`Makefile` の初期設定は `../../Mkinclude_MPI` に記述されているので、ここを自身の環境に合った設定にすること。



(a)



(b)

図 4.34: 計算結果から得られた非軸対称成分のうち、等値線で動径方向の速度、カラーで接線方向の速度を示す。上は初期値、下は初期からある程度時間が経過した時刻の非軸対称成分の分布。

コンパイル

本プログラムは STPK をコンパイルした Fortran コンパイラと同一のコンパイラでビルドされた MPI ライブラリが必要である。現在, OpenMPI による並列化は正常に機能している。

本プログラムは 4 つのプログラムを順に実行することで非軸対称成分の時間発展を計算する。

1. 以下のコマンドにより, 実行ファイル (`make_init`, `splitter`, `cpmbinator`, `VRWS`) を生成する。

```
$ make
```

2. `make_init` は動径方向の軸対称流の分布ファイルを作成する。既に分布ファイルがある場合は, このプロセスは省略することができる。
3. `splitter` は `make_init` によって作成, あるいはすでに用意されている分布ファイルを `namelist` ファイルの情報をもとにして適切な初期値データに分割する (各プロセッサが各自読み込むファイルに分割する)。
4. `VRWS` は先の軸対称流の分布をもとに, ネームリスト (後述) で設定された波数の単色波を初期値としてその非軸対称成分の時間発展を計算する。
5. `combinator` は `VRWS` の計算結果 (分割データ) を `namelist` ファイルの設定をもとに 1 つに合わせる。

実行方法

以下のコマンドを順次実行する。

```
$ ./make_init
input the initial file name. (作成する初期データファイル名)
You have velocity data [y/n]. (軸対称のデータがあるか; 後述)
./splitter < namelist.nml
$ export OMP_NUM_THREADS=[number] (CPU 並列数; 任意)
$ mpirun -np [並列ノード数 (proc)] ./VRWS < namelist.nml (後述)
./combinator < namelist.nml
```

- `make_init` では, 2 つ目に聞かれる質問で, 軸対称風のデータも全くないときは "y" を選択する。すると, `make_init` に設定されている理想的な動径方向の速度分布が与えられる。高度場は計算した理想的なプロファイルから地衡流バランスするような分布が自動的に計算される。
- "n" を選ぶと, 実行者が用意した風の動径プロファイルのデータを使って計算させることができる。このとき, 読み込む形式は NetCDF 形式のみ対応している。"n" と選択すると,

```
input file name and radial grid number.
radial flow is forced to zero ? [y/n].
```

という 2 つの質問を聞かれるので、1 つ目は用意した NetCDF ファイルの名前と格子点数を、2 つ目は動径風がデータとして入っている場合、それを計算で使用するか、それともゼロとして計算しないかを入力する。"Y" ならば、動径風も計算に組み込む。

- `splitter` は namelist ファイルの `fname` で設定されたファイル名のファイルを読み込み、各プロセッサが読み込むための最適な初期値データを作成する。
- `OMP_NUM_THREADS` は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり、もし、コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば、この環境変数の設定によって並列計算が可能である。[`number`] には並列数を入力する。
- ここでは、OpenMPI の並列実行コマンド `mpirun` を用いる。並列ノード数は namelist ファイルに設定される `proc` で指定している数と同じものを用いること。VRWS を実行すると、計算が開始する。その結果は `namelist.nml` の `foname` で設定しているファイルに出力される。
- `combinator` は VRWS で出力された分割ファイルを 1 つに結合する。このとき、結合されたファイル名は namelist ファイルの `foname` で設定されたものとなる。

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

```
&input
nr = 198 ! radial grid number
hnt = 90 ! tangential truncation wavenumber
        ! tangential grid number is equal to "2 * hnt + 1"
nt = 720 ! calculating time step
rmin = 0.0 ! radial center [default]
dr = 4000.0 ! radial grid interval [m]
dtl = 0.5 ! large time interval [s]
dts = 0.5 ! small time interval [s]
dmpstp = 50 ! dumping time step
        ! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"
fname = "initial.nc" ! data for axisymmetric profiles
foname = "result.nc" ! result data
ni = 10000 ! radial grid number in "fname"
nl_flag = .false. ! flag of non-linear term
        ! "false" is not calculating a non linear terms
r_dmp = 600000.0 ! effective radius for Rayleigh damping
        ! the damping is forced outside this radius
time_flag = '1' ! time scheme :
        ! [1] = 4th order's Runge-Kutta
```

```

! [2] = Leap Frog
! [3] = 1th Explicit Euler
force_flag = 'ooooooooxxx' ! forcing flag
! 'o' = calculating, 'x' = neglecting
! force_flag(1:1) = linear advection term
! force_flag(2:2) = corioli term
! force_flag(3:3) = diffusion term
! force_flag(4:4) = Reiley dumping term
! force_flag(5:5) = non-linear advection term
! force_flag(6:6) = centifugal force term
! force_flag(7:7) = divergence term [only "depth"]
! force_flag(8:8) = gravity wave term
! force_flag(9:9) = temporary value [not using]
! force_flag(10:10) = temporary value [not using]

diff_r = 1.0 ! radial diffusion coefficient [m^2/s]
diff_t = 1.0 ! tangential diffusion coefficient [m^2/s]
init_n = -1 ! initial non-axisymmtric wave number
! -1 = random wave
/
&para
proc = 2 ! MPI parallel number (nodes number)
/

```

計算結果

結果はシングル版と同じ (図 4.34 参照).

描画

同ディレクトリに格納されている描画プログラム `draw_polar` を実行することで描画が可能である. このプログラムの使用法は付録 ?? 参照.

4.2.23 Karman

2次元流におけるカルマン渦をシミュレーションする有限差分モデルである (参考文献: 中道, 2006).

座標系はデカルト座標系 (x, y) 、微分の評価は2次精度の中心差分を採用した。非線形移流項として、Arakawa Jacobian (Arakawa, 1966) を採用している*2。

コンパイル

1. 以下のコマンドにより, 実行ファイル (Karman) を生成する.

```
$ make
```

*2方程式系などのモデルの詳細は付録??参照.

2. Karman はネームリスト（後述）で設定された初期データファイル `fname` のデータを元にして流線関数-渦度法を用いて渦度の時間発展を計算する。

実行方法

以下のコマンドを実行する。

```
$ export OMP_NUM_THREADS=number
$ ./Karman < namelist.nml
```

- `OMP_NUM_THREADS` は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり、もし、コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば、この環境変数の設定によって並列計算が可能である。[`number`] には並列数を入力する。
- Karman を実行すると、計算が開始する。その結果は `namelist.nml` の `foname` で設定しているファイルに出力される。

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

```
&input
nx = 400      ! X-coordinate grid number
ny = 100      ! Y-coordinate grid number
nt = 100000   ! calculating time step
xmin = 0.0    ! X-coordinate original point
ymin = 0.0    ! Y-coordinate original point
dx = 0.1      ! X-coordinate grid interval [m]
dy = 0.1      ! Y-coordinate grid interval [m]
dt = 0.001    ! time interval [s]
dmpstp = 1000 ! dumping time step
               ! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"
fname = ""    ! initial data file name.
               ! if there is no, automatically,
               ! being made by the program.
foname = "result.nc" ! result data
inner_file = 'colum.txt' ! inner boundary file
time_flag = '1' ! time scheme :
               ! [1] = 4th order's Runge-Kutta
               ! [2] = Leap Frog
               ! [3] = 1th Explicit Euler
undef = -999.0 ! undefined value
init_type = 'psi' ! the tpe of initial value.
               ! 'psi' = strem line, 'omg' = vorticity.
ubar = 1.0      ! mean flow [m/s]
eps = 1.0e-4    ! convergent condition for poisson solver
nu = 0.01       ! diffusion coefficient
/
```

未定義領域の指定

最も重要な設定は, `colum.txt` ファイルの設定である. このファイルはカルマン渦を計算する際に設置される柱の占有領域を設定するテキストファイルである.

ここでは, 以下の条件を仮定したときの `colum.txt` の設定方法を記述する.

- x, y 方向の格子数は 20×10 点.
- 柱は正方形 (この形は設定次第で任意の形を指定できる) で長さは格子点について 2×2 の大きさとする (柱の実際の大きさは "格子点数 \times 格子点間隔").
- 柱の位置は格子点で数えて左から 4 点目, 下から 4 点目とする.
- 柱の境界条件はディリクレ型. (ポアソンソルバ用ルーチンの境界条件指定で 1 番が指定される)

このとき, `colum.txt` の指定方法として以下の決まりが存在する.

- テキストファイルの 2 行目から書き始める. 1 行目はダミー用なので何らかの任意の文字列を設定しておくこと (文字は何でもよい).
- 1 行の文字数は x 方向の格子点数と同じ. 1 列の文字数は y 方向の格子点数と上記のダミー用 1 行分を足し合わせた分に同じである (上の例の場合, 1 行の文字数は 20, 1 列の文字数は 11).
- 計算を行う領域は "0", 計算を行わない領域は "-" で指定する. この "-" の格子点が柱の存在する領域となる.
- 柱の境界は "0" ではない境界条件の種類を指定する数値が入る. (境界条件の種類と指定すべき数値は Poisson ソルバルーチンの内部境界条件設定と同じにしてある).
- "-" と "0" は隣接してはならない. 必ず, 境界条件指定の数値が入らなければならない.
- 注意すべきは, テキストで記述される y 方向の格子は上から順に読み込まれるので, y 座標の下端はテキストでいうと 2 行めに記述される.

これらの決まりを守りながら, 上の仮定に基づいて設定した `colum.txt` の例は以下である.

描画

同ディレクトリに格納されている描画プログラム `draw_anim` を実行することで描画が可能である。このプログラムの使用方法は付録 ?? 参照。

4.2.24 WK04

2次元流におけるカルマン渦をシミュレーションする有限差分モデルである (Weisman and Klemp 2004)。

座標系はデカルト座標系 (x, y) 、微分の評価は2次精度の中心差分を採用した。非線形移流項として、Arakawa Jacobian (Arakawa, 1966) を採用している^{*3}。

コンパイル

1. 以下のコマンドにより、実行ファイル (WK04) を生成する。

```
$ make
```

2. WK04 はネームリスト (後述) で設定された初期データファイル `fname` のデータを元にして流線関数-渦度法を用いて渦度の時間発展を計算する。また、規格化された浮力の移流拡散も計算する。

実行方法

以下のコマンドを実行する。

```
$ export OMP_NUM_THREADS=number  
$ ./WK04 < namelist.nml
```

- `OMP_NUM_THREADS` は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり、もし、コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば、この環境変数の設定によって並列計算が可能である。[`number`] には並列数を入力する。
- WK04 を実行すると、計算が開始する。その結果は `namelist.nml` の `fname` で設定しているファイルに出力される。

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

```
&input  
nx = 960      ! X-coordinate grid number
```

^{*3}方程式系などのモデルの詳細は付録 5.9.8 参照。

```

ny = 80      ! Y-coordinate grid number
nt = 10000 ! calculating time step
xmin = -12.0 ! X-coordinate original point
ymin = 0.0  ! Y-coordinate original point
dx = 0.025  ! X-coordinate grid interval [m]
dy = 0.025  ! Y-coordinate grid interval [m]
dt = 0.001  ! time interval [s]
dmpstp = 100 ! dumping time step
              ! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"
filename = "" ! initial data file name.
              ! if there is no, automatically,
              ! being made by the program.
foname = "result.nc" ! result data
inner_file = 'colum.txt' ! inner boundary file
time_flag = '1' ! time scheme :
                ! [1] = 4th order's Runge-Kutta
                ! [2] = Leap Frog
                ! [3] = 1th Explicit Euler
undef = -999.0 ! undefined value
init_type = 'psi' ! the tpe of initial value.
                ! 'psi' = strem line, 'omg' = vorticity.
ubar = 0.5      ! mean flow [m/s]
eps = 1.0e-3    ! convergent condition for poisson solver
nu = 0.002      ! diffusion coefficient
/

```

計算結果

本プログラムの結果から得られた相対渦度と流線関数の分布は図 4.36 に示す。

描画

同ディレクトリに格納されている描画プログラム `draw_anim` を実行することで描画が可能である。このプログラムの使用方法は付録 ?? 参照。

4.2.25 BAROVOR

順圧非発散流体において渦の非線形時間発展をシミュレーションするモデルである (参考文献：石岡, 2004)。

座標系はデカルト座標系 (x, y) 、微分の評価は二重フーリエ級数によるスペクトル法を採用した。非線形移流項として変換法を用いている^{*4}。

コンパイル

^{*4}方程式系などのモデルの詳細は付録 5.9.5 参照。

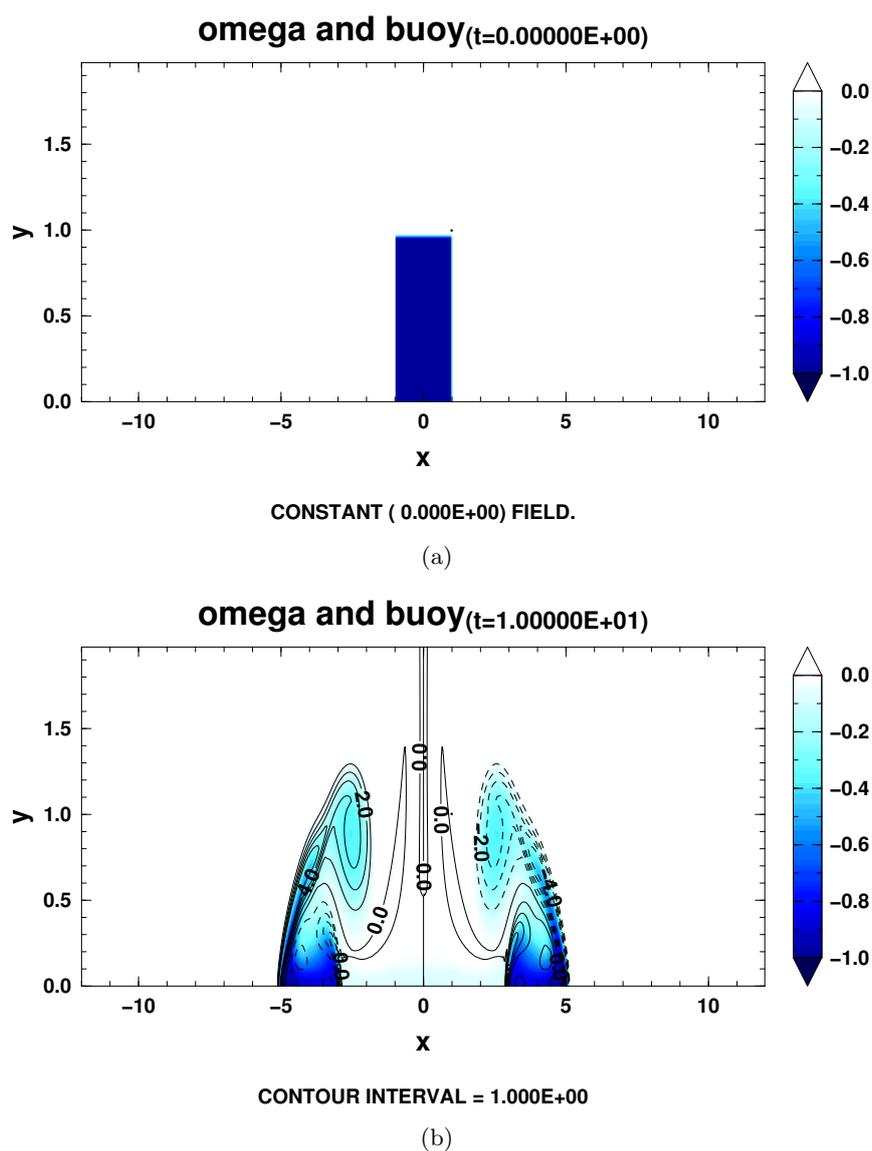


図 4.36: 初期時刻 (上) とある程度時間が経過したとき (下) の規格化浮力 (カラー) と規格化渦度 (等値線).

1. 以下のコマンドにより, 実行ファイル (FFT_BAROVOR) を生成する.

```
$ make fft
```

2. FFT_BAROVOR はネームリスト (後述) で設定された初期データファイル `iname` で与えられる渦度のデータを元にして流線関数の時間発展を計算する.

実行方法

以下のコマンドを実行する.

```
$ export OMP_NUM_THREADS=number
$ ./FFT_BAROVOR < FFT_BAROVOR.nml
```

- OMP_NUM_THREADS は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり、もし、コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば、この環境変数の設定によって並列計算が可能である。[number] には並列数を入力する。
- FFT_BAROVOR を実行すると、計算が開始する。その結果は FFT_BAROVOR.nml の foname で設定しているファイルに出力される。

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

```
&input
nxi = 1000 ! X-coordinate grid number of initial data
nyi = 1000 ! Y-coordinate grid number of initial data
nx = 500   ! X-coordinate grid number
ny = 500   ! Y-coordinate grid number
nt = 180000 ! calculating time step
xmin = 0.0 ! X-coordinate original point
ymin = 0.0 ! Y-coordinate original point
dx = 2.0e3 ! X-coordinate grid interval [m]
dy = 2.0e3 ! Y-coordinate grid interval [m]
dt = 1.0e0 ! time interval [s]
dmpstp = 3600 ! dumping time step
! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"
ininame = "initial.nc" ! initial data file name.
! if there is no, automatically,
! being made by the program.
inix = 'x' ! X-coordinate name
iniy = 'y' ! Y-coordinate name
iniz = 'zeta' ! vorticity name
foname = "result.nc" ! result data
time_flag = 'RK4' ! time scheme :
eps = 5.0e0 ! convergent condition for poisson solver
nu = 0.01 ! diffusion coefficient
betaf = 1.0e-11 ! beta coefficient
adv_flag = 'f'
boundary = '1111' ! boundary condition
/
```

計算結果

本プログラムの結果から得られた相対渦度の分布は図 4.37 に示す。

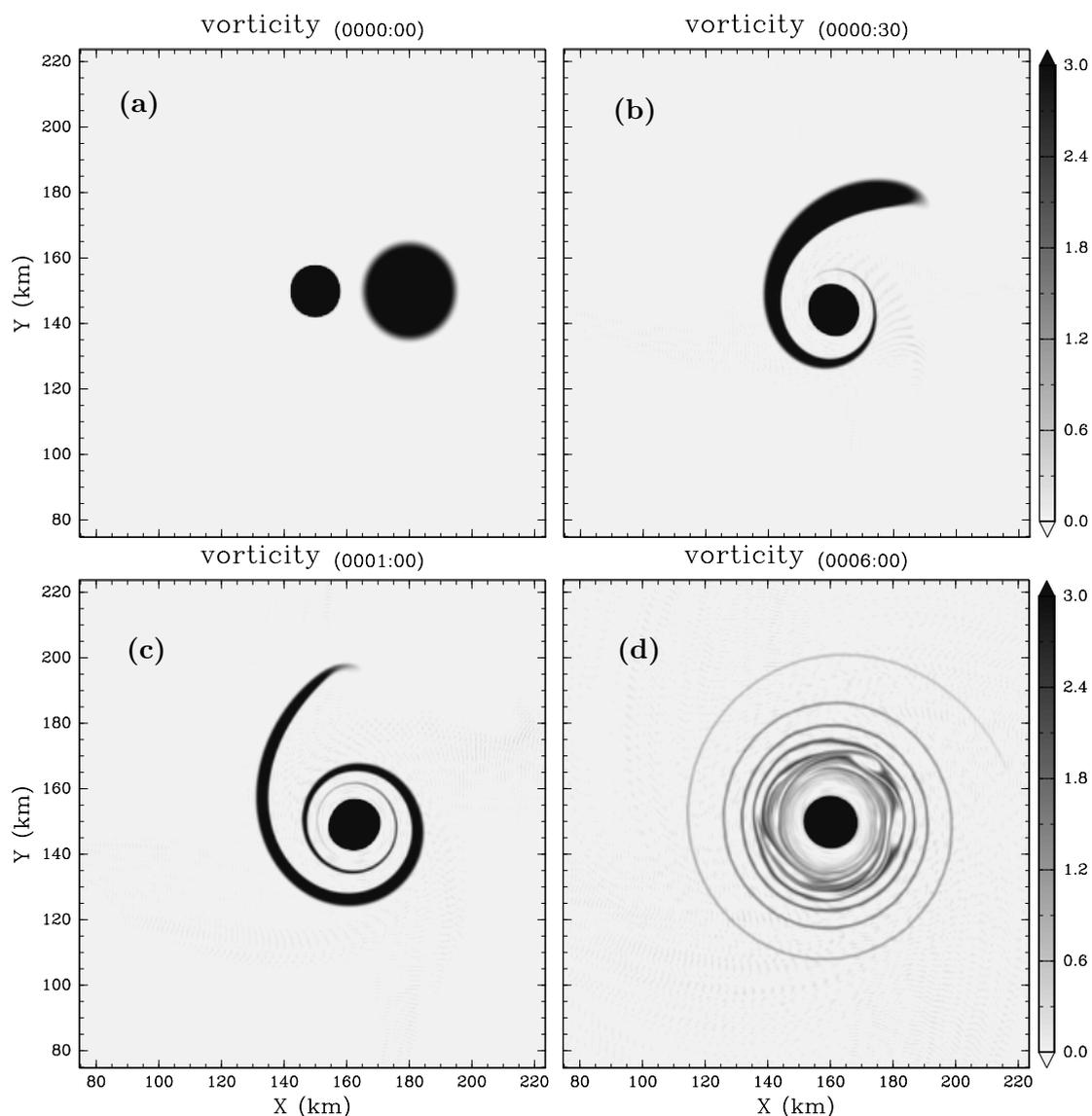


図 4.37: 渦対の非線形時間発展. (a) 初期時刻 から (b) 30 分, (c) 1 時間, (d) 6 時間後の相対渦度.

4.2.26 QGPV

本プログラムは準地衡流近似のもとで渦位解析を行うプログラムである. 具体的には, 球面上の緯度経度座標と鉛直圧力座標で定義されたジオポテンシャル場のデータを用いて,

- ジオポテンシャルの傾向診断,
- 鉛直オメガ速度診断,
- 準地衡流渦位 (QGPV) のアノマリから逆変換を行い, ジオポテンシャル, 地衡流, 静

力学温度場診断

を行うプログラムである^{*5}.

コンパイル

1. 以下のコマンドにより, 実行ファイル (QGPV) を生成する.

```
$ make
```

2. QGPV はネームリスト (後述) で設定されたリストファイル `listname` のデータを元にして, ジオポテンシャル場から各種渦位解析を行う.

実行方法

以下のコマンドを実行する.

```
$ export OMP_NUM_THREADS=number
$ ulimit -s unlimited
$ ./QGPV < QGPV.nml
```

- `OMP_NUM_THREADS` は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり, もし, コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば, この環境変数の設定によって並列計算が可能である. `[number]` には並列数を入力する.
- QGPV を実行すると, 計算が開始する. その結果は `QGPV.nml` の `listname` に記載されている各読み込みファイルの拡張子に `.QGPV` がついたファイルとして出力される.

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである.

```
&input
listname = 'list.dat'
nx = 140
ny = 80
nz = 12
lonmin = 110.0
latmin = 20.0
dlon = 0.5
dlat = 0.5
pres = 1000.0e3, 925.e3, 850.e3, 700.e3, 600.e3, 500.e3, 400.e3, 300.e3, 250.e3, 200.e3,
zord = 1
```

^{*5}方程式系などのモデルの詳細は付録??参照.

```
tord = 18  
diaqord = 0  
undef = -1.0e35  
/
```

計算結果

本プログラムの結果から得られた相対渦度と流線関数の分布は図 4.2.26 に示す.

描画

本出力結果は NetCDF 形式で出力されるため, 適当な描画プログラムを用いて描画する.

第5章 付録

Ver.1.0.0.0 で完成予定. 現在必要不可欠なもののみ掲載.

5.1 ellip_slv の付録

5.1.1 境界条件の設定

各楕円型方程式の求積ルーチンには, 境界条件設定引数 `bound` があるが, この引数は文字型であり, 各文字に数字を代入することで計算領域境界の境界条件を指定することができる.

2次元ルーチンの場合

引数 `bound` は 4 文字であり, 各文字は図 5.1 の左のような順番で設定される.

3次元ルーチンの場合

引数 `bound` は 6 文字であり, 各文字は図 5.1 の右のような順番で設定される.

5.1.2 2次元楕円型方程式の求解法

ここでは, 2次元デカルト座標系における楕円型方程式の離散化を定式化する。基礎となる方程式は以下である。

$$a(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y) \psi = \rho(x, y). \quad (5.1.1)$$

ここで, x, y は座標変数, $\psi = \psi(x, y)$ は求める解, $\rho(x, y)$ はポアソン方程式の強制, a, b, c, d, e, f は各係数である。ルーチンでは, これらの係数を引数として与えることで, 計算したい方程式系を陽に指定することができるようにしてある。以下の離散化において,

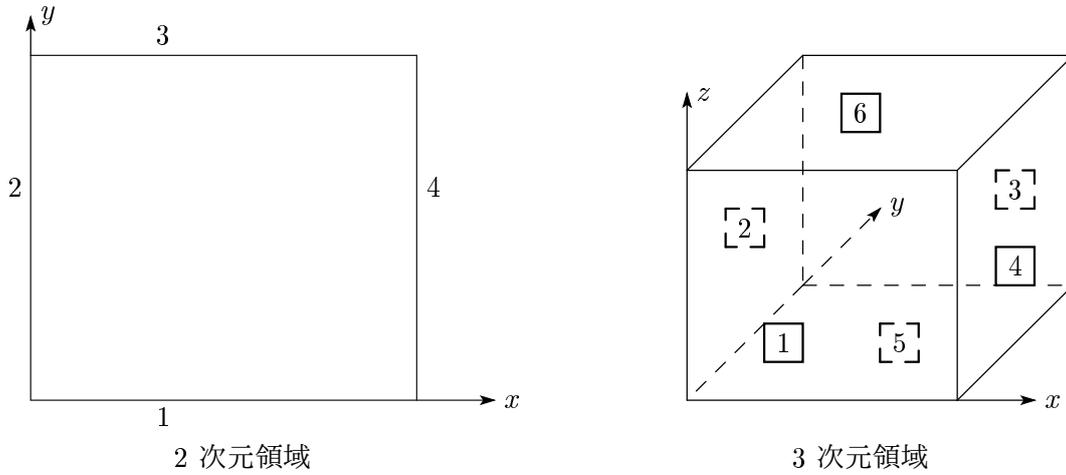


図 5.1: Ellip.Slv の各ルーチンにおける境界条件の順番. 左が 2 次元版, 右が 3 次元版を表し, 数値が引数 `bound` の何文字目に相当するかを表している.

x, y 方向の離散要素をそれぞれ i, j とする. また, 各微分は 2 次精度の中心差分スキームを用いて評価することにする. このとき, 各項を離散化すると,

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= h_{i,j} \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j}}{\Delta x^2}, \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - (\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1}) \} \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j}}{\Delta y^2}, \\
 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y}
 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

となる. ここで, h は任意のスカラー変数であり, 微分に係る係数, 強制項はすべてこれで評価した. また, 微分のクロスタームについては,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right)
 \end{aligned}$$

という過程を経て計算したものである。なお、本ルーチンは不等間隔座標にも対応しており、実際の計算では

$$\Delta x = \Delta x_i = 0.5 \times (x_{i+1} - x_{i-1}), \quad \Delta y = \Delta y_j = 0.5 \times (y_{j+1} - y_{j-1})$$

という計算を行っている。(5.1.2) 式を用いると、(5.1.1) 式は

$$\begin{aligned} & a_{i,j} \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j}}{\Delta x^2} \\ & + b_{i,j} \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - (\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1})\} \\ & + c_{i,j} \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j}}{\Delta y^2} \\ & + d_{i,j} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ & + e_{i,j} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ & + f_{i,j} \psi_{i,j} \\ & = \rho_{i,j}. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

となる。これを、反復法が使える形に直すと、

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} = & \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \times \\ & \left[\psi_{i+1,j} \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j}}{2\Delta x} \right) + \psi_{i,j+1} \left(\frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} + \frac{e_{i,j}}{2\Delta y} \right) \right. \\ & + \psi_{i-1,j} \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{d_{i,j}}{2\Delta x} \right) + \psi_{i,j-1} \left(\frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{e_{i,j}}{2\Delta y} \right) \\ & \left. + \frac{b_{i,j}}{4\Delta x \Delta y} \{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - (\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1})\} \right. \\ & \left. - \rho_{i,j} \right] \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

となる。実際の計算では、領域内部については、

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} = & ADP_{i,j} \psi_{i+1,j} + CEP_{i,j} \psi_{i,j+1} + ADM_{i,j} \psi_{i-1,j} + CEM_{i,j} \psi_{i,j-1} \\ & + BT_{i,j} \{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - (\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1})\} \\ & - AC_{i,j} \rho_{i,j} \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

という式を用いて計算を行っている。ここで、

$$\begin{aligned} ADP_{i,j} & \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j}}{2\Delta x} \right), \\ ADM_{i,j} & \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{d_{i,j}}{2\Delta x} \right), \\ CEP_{i,j} & \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \left(\frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} + \frac{e_{i,j}}{2\Delta y} \right), \end{aligned}$$

$$CEM_{i,j} \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \left(\frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{e_{i,j}}{2\Delta y} \right),$$

$$BT_{i,j} \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \frac{b_{i,j}}{4\Delta x \Delta y},$$

$$AC_{i,j} \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1}$$

である*1。

次に、境界条件について述べる。本ルーチンでは境界条件は以下の3種類をサポートしている。

- ディレクレ条件（固定端条件）
- ノイマン条件（自由端条件）
- 周期境界条件

このうち、周期境界条件は計算領域の外側でしか設定できない。他2つの境界条件については、内部境界条件において設定することができる。ポアソン方程式計算用ルーチンのオプション引数 `inner_bound` は内部に境界が存在する場合、その境界点を数値によって設定するための引数である。図??には、内部領域が存在するときに `inner_bound` を設定すべき格子点の例が示されている。図のうち、黒点が各格子点である。このとき、網掛けのような形の内部境界が存在するとき、細い丸で囲まれた格子点が `inner_bound` に境界条件を設定しなければならない点である*2。また、太い丸で囲まれた格子点は反復計算を行わないことを示す値(10)が代入されなければならない。この引数に設定可能な境界条件とそれに対応する値は以下に限られる。

*1この形にしておけば係数部分は反復法の外側ループで計算することができる。

*2ただし、計算領域の外縁境界は別の引数 `bound` で設定されている値を自動的に代入処理するので、ユーザが陽に指定する必要はない。

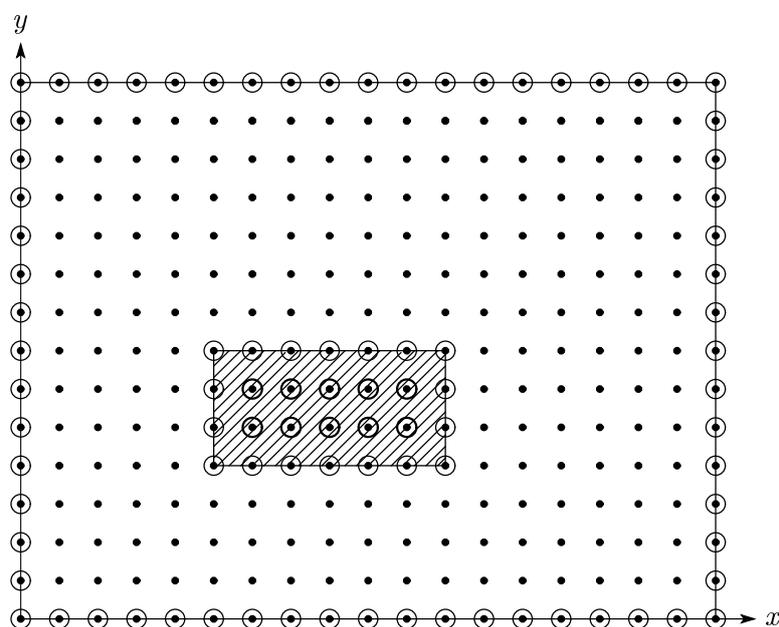


図 5.2: `inner_bound` で設定される格子点。

内部境界として設定できる値

設定値 0 計算領域。

設定値 1 固定端条件。

設定値 3 周期境界条件

設定値 10 内部境界領域内。この格子点では反復計算を行わない。

以下は自由境界条件である。

設定値	境界 (i, j) に対する参照格子点	対応する図
2	(i + 1, j)	図 5.3 の 1
-2	(i - 1, j)	図 5.3 の 2
4	(i, j + 1)	図 5.3 の 3
-4	(i, j - 1)	図 5.3 の 4
8	(i + 1, j + 1)	図 5.3 の 5
8	(i - 1, j - 1)	図 5.3 の 8
-8	(i + 1, j - 1)	図 5.3 の 6
-8	(i - 1, j + 1)	図 5.3 の 7
7	(i - 1, j), (i, j - 1)	図 5.3 の 9
7	(i + 1, j), (i, j + 1)	図 5.3 の 12
-7	(i + 1, j), (i, j - 1)	図 5.3 の 10
-7	(i - 1, j), (i, j + 1)	図 5.3 の 11

このとき、ある境界点 (i, j) の応答の値 $\psi_{i,j}$ を求める式はそれぞれ、以下のようになる：

設定値 1

$$\psi_{i,j} = f_{i,j}$$

設定値 3

$$\psi_{i,j} = \begin{cases} \psi_{nx-1,j}, & (i = 1) \\ \psi_{2,j}, & (i = nx) \\ \psi_{i,ny-1}, & (j = 1) \\ \psi_{i,2}, & (j = ny) \end{cases}$$

ここでは、線上境界における式を表記しているが、点上境界 (隅の点) においても適切な境界値が設定される。そのような他の面の境界と接する点では、先に示した境界条件の優先順位に従って境界値が決定される。例えば、隣接 2 面が固定境界と周期境界で設定されている場合、固定境界として値が設定される。

設定値 2(図 5.3 の 1)

$$\psi_{i,j} = \psi_{i+1,j} - f_{i,j} \times \Delta x$$

設定値 -2(図 5.3 の 2)

$$\psi_{i,j} = \psi_{i-1,j} + f_{i,j} \times \Delta x$$

設定値 4(図 5.3 の 3)

$$\psi_{i,j} = \psi_{i,j+1} - f_{i,j} \times \Delta y$$

設定値 -4(図 5.3 の 4)

$$\psi_{i,j} = \psi_{i,j-1} + f_{i,j} \times \Delta y$$

設定値 8(図 5.3 の 5, 8)

- 5 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} \times \Delta y\} + \{\psi_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i+1,j+1} - \frac{1}{2} [f_{i+1,j} \times \Delta y + f_{i,j+1} \times \Delta x] \end{aligned}$$

- 8 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j-1} + f_{i-1,j} \times \Delta y\} + \{\psi_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i-1,j-1} + \frac{1}{2} [f_{i-1,j} \times \Delta y + f_{i,j-1} \times \Delta x] \end{aligned}$$

設定値 -8(図 5.3 の 6, 7)

- 6 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j+1} - f_{i-1,j} \times \Delta y\} + \{\psi_{i-1,j+1} + f_{i,j+1} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i-1,j+1} + \frac{1}{2} [-f_{i-1,j} \times \Delta y + f_{i,j+1} \times \Delta x] \end{aligned}$$

- 7 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j-1} + f_{i+1,j} \times \Delta y\} + \{\psi_{i+1,j-1} - f_{i,j-1} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i+1,j-1} + \frac{1}{2} [f_{i+1,j} \times \Delta y - f_{i,j-1} \times \Delta x] \end{aligned}$$

設定値 7(図 5.3 の 9, 12)

- 9 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j+1} + f_{i,j+1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i+1,j-1} + f_{i+1,j} \times \Delta y\}] \\ &= \frac{1}{2} [\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1}] + \frac{1}{2} [f_{i,j+1} \times \Delta x + f_{i+1,j} \times \Delta y] \end{aligned}$$

- 12 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j-1} - f_{i,j-1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i-1,j+1} - f_{i-1,j} \times \Delta y\}] \\ &= \frac{1}{2} [\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j+1}] - \frac{1}{2} [f_{i,j-1} \times \Delta x + f_{i-1,j} \times \Delta y]\end{aligned}$$

設定値 -7(図 5.3 の 10, 11)

- 10 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i-1,j-1} + f_{i-1,j} \times \Delta y\}] \\ &= \frac{1}{2} [\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}] + \frac{1}{2} [-f_{i,j+1} \times \Delta x + f_{i-1,j} \times \Delta y]\end{aligned}$$

- 11 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} \times \Delta y\}] \\ &= \frac{1}{2} [\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j+1}] + \frac{1}{2} [f_{i,j-1} \times \Delta x - f_{i+1,j} \times \Delta y]\end{aligned}$$

ここで、 $f_{i,j}$ は `bound_opt` で指定される値である。この境界値は設定される境界条件によって果たす役割が異なる。固定端境界のときはそのまま境界値を表し、自由端境界のときは、境界での勾配値を表す。このとき、勾配は必ず正の方向に計算されることに注意。特に自由端境界は複雑であるので、図 5.3 に概念図を示す。

なお、計算領域の隅および、内部領域の隅は上もしくは下、および左もしくは右で 2 通りの境界条件が設定されている。その場合、適用される境界条件の優先度は

$$1 > 3 > \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

である。つまり、固定端境界がもっとも優先度が高い^{*3}。

5.1.3 3次元楕円型方程式の求解法

ここでは、3次元デカルト座標系における楕円型方程式の離散化を定式化する。基礎となる方程式は以下である。

$$\begin{aligned}& X(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Y(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + Z(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ & + a(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + b(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + c(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \\ & + d(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + g(x, y, z) \psi(x, y, z) \\ & = \rho(x, y, z).\end{aligned}\tag{5.1.6}$$

^{*3}例えば、領域の左端点は右隣の点と上隣の点の境界条件によって変化する。もし右隣が固定端で上隣が自由端であるなら、左下点は固定端条件として計算される。

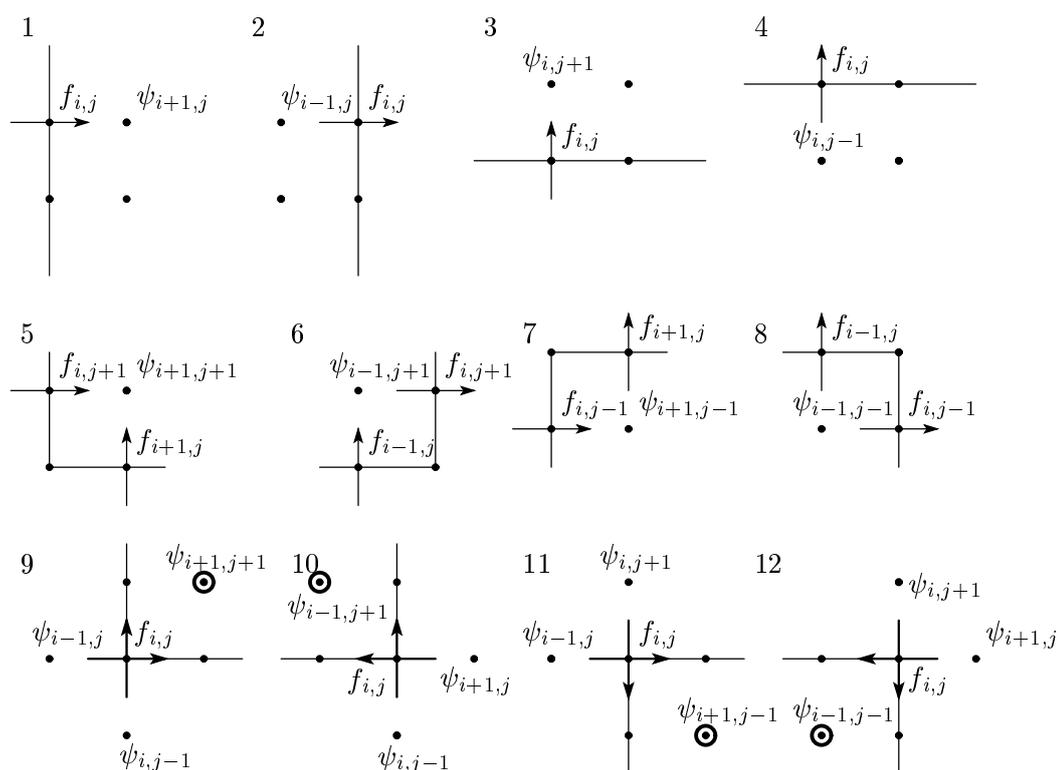


図 5.3: 本ルーチンでサポートされている自由端境界条件。1-8 は格子点 (i, j) における値をその点で設定された境界値 bound_opt と隣接点 ψ から求める種類。矢印は定義される勾配の向き。9-12 は内部未定義領域がある場合の境界計算。黒線で縁取られた点は未定義領域。

ここで、 x, y, z は座標変数、 $\psi = \psi(x, y, z)$ は求める解、 $\rho(x, y, z)$ はポアソン方程式の強制、 $X, Y, Z, a, b, c, d, e, f, g$ は各係数である。ルーチンでは、これらの係数を引数として与えることで、計算したい方程式系を陽に指定することができるようにしてある。以下の離散化において、 x, y, z 方向の離散要素をそれぞれ i, j, k とする。また、各微分は 2 次精度の中心差分スキームを用いて評価することにする。このとき、各項を離散化すると、

$$\begin{aligned}
h(x, y, z) &= h_{i,j,k} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\psi_{i+1,j,k} + \psi_{i-1,j,k} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta x^2}, \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\psi_{i,j+1,k} + \psi_{i,j-1,k} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta y^2}, \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{\psi_{i,j,k+1} + \psi_{i,j,k-1} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta z^2}, \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ \psi_{i+1,j+1,k} + \psi_{i-1,j-1,k} - (\psi_{i-1,j+1,k} + \psi_{i+1,j-1,k}) \} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{4\Delta y \Delta z} \{ \psi_{i,j+1,k+1} + \psi_{i,j-1,k-1} - (\psi_{i,j+1,k-1} + \psi_{i,j-1,k+1}) \} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} &= \frac{1}{4\Delta z \Delta x} \{ \psi_{i+1,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k-1} - (\psi_{i-1,j,k+1} + \psi_{i+1,j,k-1}) \} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\psi_{i,j+1,k} - \psi_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \\
\frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\psi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k-1}}{2\Delta z}
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

となる。ここで、 h は任意のスカラー変数であり、微分に係る係数、強制項はすべてこれで評価した。また、微分のクロスタームについては以下、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
&= \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right)
\end{aligned}$$

という過程を経て計算したものである^{*4}。なお、本ルーチンは不等間隔座標にも対応しており、実際の計算では

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta x_i = 0.5 \times (x_{i+1} - x_{i-1}), \\
\Delta y &= \Delta y_j = 0.5 \times (y_{j+1} - y_{j-1}), \\
\Delta z &= \Delta z_k = 0.5 \times (z_{k+1} - z_{k-1})
\end{aligned}$$

^{*4}他のクロスタームについても同様の計算を行う。

という計算を行っている。(5.1.7) 式を用いると、(5.1.6) 式は

$$\begin{aligned}
& X_{i,j,k} \frac{\psi_{i+1,j,k} + \psi_{i-1,j,k} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta x^2} \\
& + Y_{i,j,k} \frac{\psi_{i,j+1,k} + \psi_{i,j-1,k} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta y^2} \\
& + Z_{i,j,k} \frac{\psi_{i,j,k+1} + \psi_{i,j,k-1} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta z^2} \\
& + a_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ \psi_{i+1,j+1,k} + \psi_{i-1,j-1,k} - (\psi_{i-1,j+1,k} + \psi_{i+1,j-1,k}) \} \\
& + b_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta y \Delta z} \{ \psi_{i,j+1,k+1} + \psi_{i,j-1,k-1} - (\psi_{i,j+1,k-1} + \psi_{i,j-1,k+1}) \} \\
& + c_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta z \Delta x} \{ \psi_{i+1,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k-1} - (\psi_{i-1,j,k+1} + \psi_{i+1,j,k-1}) \} \\
& + d_{i,j,k} \frac{\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\
& + e_{i,j,k} \frac{\psi_{i,j+1,k} - \psi_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \\
& + f_{i,j,k} \frac{\psi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \\
& + g_{i,j,k} \psi_{i,j,k} \\
& = \rho_{i,j,k}.
\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

となる。これを、反復法が使える形に直すと、

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} = & \left\{ 2 \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) - g_{i,j,k} \right\}^{-1} \times \\
& \left[\psi_{i+1,j,k} \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j,k}}{2\Delta x} \right) + \psi_{i-1,j,k} \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{d_{i,j,k}}{2\Delta x} \right) \right. \\
& + \psi_{i,j+1,k} \left(\frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{e_{i,j,k}}{2\Delta y} \right) + \psi_{i,j-1,k} \left(\frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{e_{i,j,k}}{2\Delta y} \right) \\
& + \psi_{i,j,k+1} \left(\frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} + \frac{f_{i,j,k}}{2\Delta z} \right) + \psi_{i,j,k-1} \left(\frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{f_{i,j,k}}{2\Delta z} \right) \\
& + a_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ \psi_{i+1,j+1,k} + \psi_{i-1,j-1,k} - (\psi_{i-1,j+1,k} + \psi_{i+1,j-1,k}) \} \\
& + b_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta y \Delta z} \{ \psi_{i,j+1,k+1} + \psi_{i,j-1,k-1} - (\psi_{i,j+1,k-1} + \psi_{i,j-1,k+1}) \} \\
& + c_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta z \Delta x} \{ \psi_{i+1,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k-1} - (\psi_{i-1,j,k+1} + \psi_{i+1,j,k-1}) \} \\
& \left. - \rho_{i,j,k} \right]
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

となる. 実際の計算では, 領域内部については,

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} = & XDP_{i,j,k}\psi_{i+1,j,k} + YEP_{i,j,k}\psi_{i,j+1,k} + ZFP_{i,j,k}\psi_{i,j,k+1} \\
& + XDM_{i,j,k}\psi_{i-1,j,k} + YEM_{i,j,k}\psi_{i,j-1,k} + ZFM_{i,j,k}\psi_{i,j,k-1} \\
& + AT_{i,j,k} \{ \psi_{i+1,j+1,k} + \psi_{i-1,j-1,k} - (\psi_{i-1,j+1,k} + \psi_{i+1,j-1,k}) \} \\
& + BT_{i,j,k} \{ \psi_{i,j+1,k+1} + \psi_{i,j-1,k-1} - (\psi_{i,j+1,k-1} + \psi_{i,j-1,k+1}) \} \\
& + CT_{i,j,k} \{ \psi_{i+1,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k-1} - (\psi_{i-1,j,k+1} + \psi_{i+1,j,k-1}) \} \\
& - XYZ_{i,j,k}\rho_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

という式を用いて計算を行っている。ここで、

$$\begin{aligned}
XYZ_{i,j,k} & \equiv \left\{ 2 \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) - g_{i,j,k} \right\}^{-1} \\
XDP_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j,k}}{2\Delta x} \right), \\
XDM_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{d_{i,j,k}}{2\Delta x} \right), \\
YEP_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{e_{i,j,k}}{2\Delta y} \right), \\
YEM_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{e_{i,j,k}}{2\Delta y} \right), \\
ZFP_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} + \frac{f_{i,j,k}}{2\Delta z} \right), \\
ZFM_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{f_{i,j,k}}{2\Delta z} \right), \\
AT_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta x \Delta y}, \\
BT_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta y \Delta z}, \\
CT_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta z \Delta x},
\end{aligned}$$

である。

次に、境界条件について述べる。本ルーチンでは境界条件は以下の 3 種類をサポートしている。

- ディレクレ条件 (固定端条件)
- ノイマン条件 (自由端条件)
- 周期境界条件

このうち、周期境界条件は計算領域の外側でしか設定できない。他 2 つの境界条件については、内部境界条件において設定することができる。ポアソン方程式計算用ルーチンのオプション引数 `inner_bound` は内部に境界が存在する場合、その境界点を数値によって設定するための引数である。この引数に設定可能な境界条件とそれに対応する値は以下に限られる。

—— 内部境界として設定できる値 (その 1) ——

以下には、境界条件として設定できる値のうち、自由境界条件以外を示す。

設定値 0 計算領域。

設定値 1 固定端条件。

設定値 3 周期境界条件

設定値 10 内部境界領域内。この格子点では反復計算を行わない。

— 内部境界として設定できる値 (その 2) —

以下には、境界条件として設定できる値のうち、境界格子が面上 (隣接 8 点が全て同一面内に存在) と边上 (隣接 2 点が全て同一線内に存在) で設定可能な自由境界条件の詳細を示す。

面上設定値

設定値	境界 (i, j, k) に対する参照格子点 (i, j, k)	対応する図
2	$(i + 1, j, k)$	図 5.3 の 1
-2	$(i - 1, j, k)$	図 5.3 の 2
4	$(i, j + 1, k)$	図 5.3 の 3
-4	$(i, j - 1, k)$	図 5.3 の 4
6	$(i, j, k + 1)$	参照図なし
-6	$(i, j, k - 1)$	参照図なし

边上設定値

設定値	境界 (i, j, k) に対する参照格子点 (i, j, k)	対応する図
8	$(i + 1, j + 1, k)$	図 5.3 の 5
8	$(i - 1, j - 1, k)$	図 5.3 の 8
-8	$(i + 1, j - 1, k)$	図 5.3 の 6
-8	$(i - 1, j + 1, k)$	図 5.3 の 7
12	$(i + 1, j, k + 1)$	参照図なし
12	$(i - 1, j, k - 1)$	参照図なし
-12	$(i + 1, j, k - 1)$	参照図なし
-12	$(i - 1, j, k + 1)$	参照図なし
24	$(i, j + 1, k + 1)$	参照図なし
24	$(i, j - 1, k - 1)$	参照図なし
-24	$(i, j + 1, k - 1)$	参照図なし
-24	$(i, j - 1, k + 1)$	参照図なし

内部境界として設定できる値 (その 3)

以下には、境界条件として設定できる値のうち、境界格子が点 (計算領域の隅) で設定可能な自由境界条件の詳細を示す。

設定値	境界 (i, j, k) に対する参照格子点 (i, j, k)	対応する図
11	(i + 1, j + 1, k + 1)	図 5.4 の 1
13	(i - 1, j + 1, k + 1)	図 5.4 の 2
17	(i + 1, j - 1, k + 1)	図 5.4 の 3
19	(i - 1, j - 1, k + 1)	図 5.4 の 4
23	(i + 1, j + 1, k - 1)	図 5.4 の 5
29	(i - 1, j + 1, k - 1)	図 5.4 の 6
31	(i + 1, j - 1, k - 1)	図 5.4 の 7
37	(i - 1, j - 1, k - 1)	図 5.4 の 8

設定値	境界 (i, j, k) に対する未定義点 (i, j, k)	対応する図
-11	(i + 1, j + 1, k + 1)	図 5.5 の 1
-13	(i - 1, j + 1, k + 1)	図 5.5 の 2
-17	(i + 1, j - 1, k + 1)	図 5.5 の 3
-19	(i - 1, j - 1, k + 1)	図 5.5 の 4
-23	(i + 1, j + 1, k - 1)	図 5.5 の 5
-29	(i - 1, j + 1, k - 1)	図 5.5 の 6
-31	(i + 1, j - 1, k - 1)	図 5.5 の 7
-37	(i - 1, j - 1, k - 1)	図 5.5 の 8

このとき、ある境界点 (i, j) の応答の値 $\psi_{i,j,k}$ を求める式はそれぞれ、以下のようになる：

設定値 1

$$\psi_{i,j,k} = f_{i,j,k}$$

設定値 3

$$\psi_{i,j,k} = \begin{cases} \psi_{nx-1,j,k}, & (i = 1) \\ \psi_{2,j,k}, & (i = nx) \\ \psi_{i,ny-1,k}, & (j = 1) \\ \psi_{i,2,k}, & (j = ny) \\ \psi_{i,j,nz-1}, & (k = 1) \\ \psi_{i,j,2}, & (k = nz) \end{cases}$$

ここでは、面上境界における式を表記しているが、辺上境界、点上境界 (隅の点) においても適切な境界値が設定される。そのような他の面の境界と接する点では、先に示した境界条件の優先順位に従って境界値が決定される。例えば、隣接 2 面が固定境界と周期境界で設定されている場合、固定境界として値が設定される。

設定値 2(図 5.3 の 1)

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i+1,j,k} - f_{i,j,k} \times \Delta x$$

設定値 -2(図 5.3 の 2)

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i-1,j,k} + f_{i,j,k} \times \Delta x$$

設定値 4(図 5.3 の 3)

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i,j+1,k} - f_{i,j,k} \times \Delta y$$

設定値 -4(図 5.3 の 4)

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i,j-1,k} + f_{i,j,k} \times \Delta y$$

設定値 6

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i,j,k+1} - f_{i,j,k} \times \Delta z$$

設定値 -6

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i,j,k-1} + f_{i,j,k} \times \Delta z$$

設定値 8(図 5.3 の 5, 8)

- 5 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j+1,k} - f_{i+1,j,k} \times \Delta y\} + \{\psi_{i+1,j+1,k} - f_{i,j+1,k} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i+1,j+1,k} - \frac{1}{2} [f_{i+1,j,k} \times \Delta y + f_{i,j+1,k} \times \Delta x] \end{aligned}$$

- 8 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j-1,k} + f_{i-1,j,k} \times \Delta y\} + \{\psi_{i-1,j-1,k} + f_{i,j-1,k} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i-1,j-1,k} + \frac{1}{2} [f_{i-1,j,k} \times \Delta y + f_{i,j-1,k} \times \Delta x] \end{aligned}$$

設定値 12

- 設定値 8(図 5.3 の 5) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j,k+1} - f_{i,j,k+1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i+1,j,k+1} - f_{i+1,j,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i+1,j,k+1} - \frac{1}{2} [f_{i,j,k+1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k} \times \Delta z] \end{aligned}$$

- 設定値 8(図 5.3 の 8) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j,k-1} + f_{i,j,k-1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i-1,j,k-1} + f_{i-1,j,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i-1,j,k-1} + \frac{1}{2} [f_{i,j,k-1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k} \times \Delta z] \end{aligned}$$

設定値 -12

- 設定値 8(図 5.3 の 6) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j,k-1} - f_{i,j,k-1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i+1,j,k-1} + f_{i+1,j,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i+1,j,k-1} + \frac{1}{2} [-f_{i,j,k-1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

- 設定値 8(図 5.3 の 7) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j,k+1} + f_{i,j,k+1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i-1,j,k+1} - f_{i-1,j,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i-1,j,k+1} + \frac{1}{2} [f_{i,j,k+1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

設定値 24

- 設定値 8(図 5.3 の 5) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i,j+1,k+1} - f_{i,j,k+1} \times \Delta y\} + \{\psi_{i,j+1,k+1} - f_{i,j+1,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i,j+1,k+1} - \frac{1}{2} [f_{i,j,k+1} \times \Delta y + f_{i,j+1,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

- 設定値 8(図 5.3 の 8) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i,j-1,k-1} + f_{i,j,k-1} \times \Delta y\} + \{\psi_{i,j-1,k-1} + f_{i,j-1,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i,j-1,k-1} + \frac{1}{2} [f_{i,j,k-1} \times \Delta y + f_{i,j-1,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

設定値 -24

- 設定値 8(図 5.3 の 6) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i,j-1,k+1} + f_{i,j,k+1} \times \Delta y\} + \{\psi_{i,j-1,k+1} - f_{i,j-1,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i,j-1,k+1} + \frac{1}{2} [f_{i,j,k+1} \times \Delta y - f_{i,j-1,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

- 設定値 8(図 5.3 の 7) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i,j+1,k-1} - f_{i,j,k-1} \times \Delta y\} + \{\psi_{i,j+1,k-1} + f_{i,j+1,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i,j+1,k-1} + \frac{1}{2} [-f_{i,j,k-1} \times \Delta y + f_{i,j+1,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

設定値 11(図 5.4 の 1)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i+1,j+1,k+1} - \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 13(図 5.4 の 2)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j+1,k+1} + f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k+1} - f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k+1} - f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i-1,j+1,k+1} + \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y - f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 17(図 5.4 の 3)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j-1,k+1} - f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k+1} + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k+1} - f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i+1,j-1,k+1} + \frac{1}{3} [-f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y - f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 19(図 5.4 の 4)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j-1,k+1} + f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k+1} + f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k+1} - f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i-1,j-1,k+1} + \frac{1}{3} [f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y - f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 23(図 5.4 の 5)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j+1,k-1} - f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k-1} - f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k-1} + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i+1,j+1,k-1} + \frac{1}{3} [-f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x - f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 29(図 5.4 の 6)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j+1,k-1} + f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k-1} - f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k-1} + f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i-1,j+1,k-1} + \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y + f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 31(図 5.4 の 7)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j-1,k-1} - f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k-1} + f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k-1} + f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i+1,j-1,k-1} + \frac{1}{3} [-f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y + f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 37(図 5.4 の 8)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i-1,j+1,k-1} + \frac{1}{3} [f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y + f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 -11(図 5.5 の 1)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j+1,k+1} + f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k+1} + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k-1} + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \frac{1}{3} [\psi_{i-1,j+1,k+1} + \psi_{i+1,j-1,k+1} + \psi_{i+1,j+1,k-1}] \\
 &\quad + \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 -13(図 5.5 の 2)

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x\} \\
&\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k+1} + f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
&\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k-1} + f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
&= \frac{1}{3} [\psi_{i+1,j+1,k+1} + \psi_{i-1,j-1,k+1} + \psi_{i-1,j+1,k-1}] \\
&\quad + \frac{1}{3} [-f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z]
\end{aligned}$$

設定値 -17(図 5.5 の 3)

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j-1,k+1} + f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x\} \\
&\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
&\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k-1} + f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
&= \frac{1}{3} [\psi_{i-1,j-1,k+1} + \psi_{i+1,j+1,k+1} + \psi_{i+1,j-1,k-1}] \\
&\quad + \frac{1}{3} [f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x - f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z]
\end{aligned}$$

設定値 -19(図 5.5 の 4)

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j-1,k+1} - f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x\} \\
&\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k+1} - f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
&\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
&= \frac{1}{3} [\psi_{i+1,j-1,k+1} + \psi_{i-1,j+1,k+1} + \psi_{i-1,j-1,k-1}] \\
&\quad + \frac{1}{3} [-f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z]
\end{aligned}$$

設定値 -23(図 5.5 の 5)

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j+1,k-1} + f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x\} \\
&\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k-1} + f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
&\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
&= \frac{1}{3} [\psi_{i-1,j+1,k-1} + \psi_{i+1,j-1,k-1} + \psi_{i+1,j+1,k+1}] \\
&\quad + \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y - f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z]
\end{aligned}$$

設定値 -29(図 5.5 の 6)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j+1,k-1} - f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k+1} - f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \frac{1}{3} [\psi_{i+1,j+1,k-1} + \psi_{i-1,j-1,k-1} + \psi_{i-1,j+1,k+1}] \\
 &\quad + \frac{1}{3} [-f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y - f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 -31(図 5.5 の 7)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k-1} - f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k+1} - f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \frac{1}{3} [\psi_{i-1,j-1,k-1} + \psi_{i+1,j+1,k-1} + \psi_{i+1,j-1,k+1}] \\
 &\quad + \frac{1}{3} [f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x - f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y - f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 -37(図 5.5 の 8)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j-1,k-1} - f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k-1} - f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k+1} - f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \frac{1}{3} [\psi_{i+1,j-1,k-1} + \psi_{i-1,j+1,k-1} + \psi_{i-1,j-1,k+1}] \\
 &\quad + \frac{1}{3} [-f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y - f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

ここで、 $f_{i,j,k}$ は `bound_opt` で指定される値である。この境界値は設定される境界条件によって果たす役割が異なる。固定端境界のときはそのまま境界値を表し、自由端境界のときは、境界での勾配値を表す。このとき、勾配は必ず正の方向に計算されることに注意。

なお、計算領域の隅および、内部領域の隅は上もしくは下、および左もしくは右で 2 通りの境界条件が設定されている。その場合、適用される境界条件の優先度は

$$1 > 3 > \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

である。つまり、固定端境界がもっとも優先度が高い^{*5}。

^{*5}例えば、領域の左端点は右隣の点と上隣の点の境界条件によって変化する。もし右隣が固定端で上隣が自由端であるなら、左下点は固定端条件として計算される。

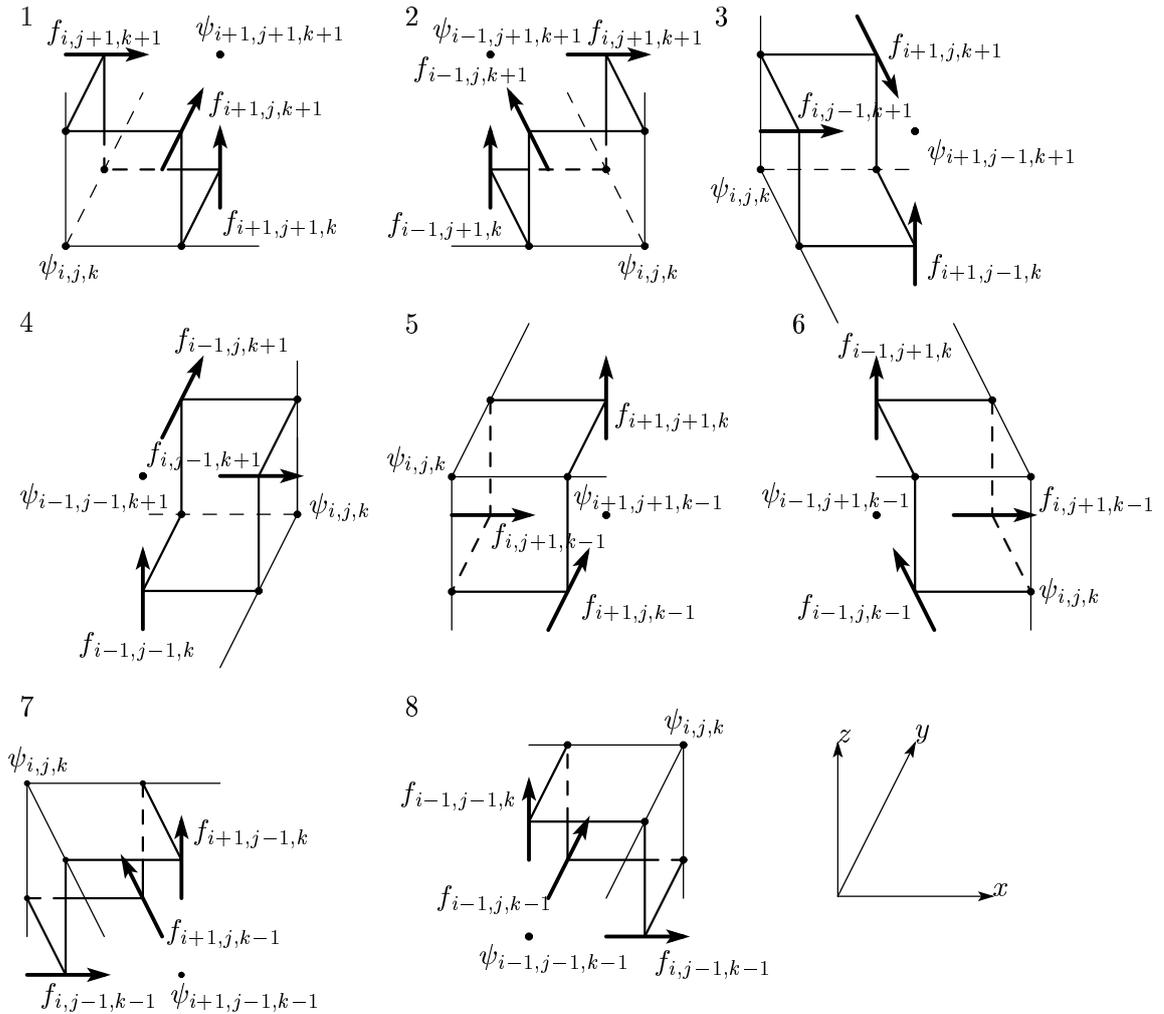


図 5.4: 本ルーチンでサポートされている自由端境界条件。格子点 (i, j, k) における値をその点で設定された境界値 `bound_opt` と隣接点 ψ から求める種類。矢印は定義される勾配の向き。

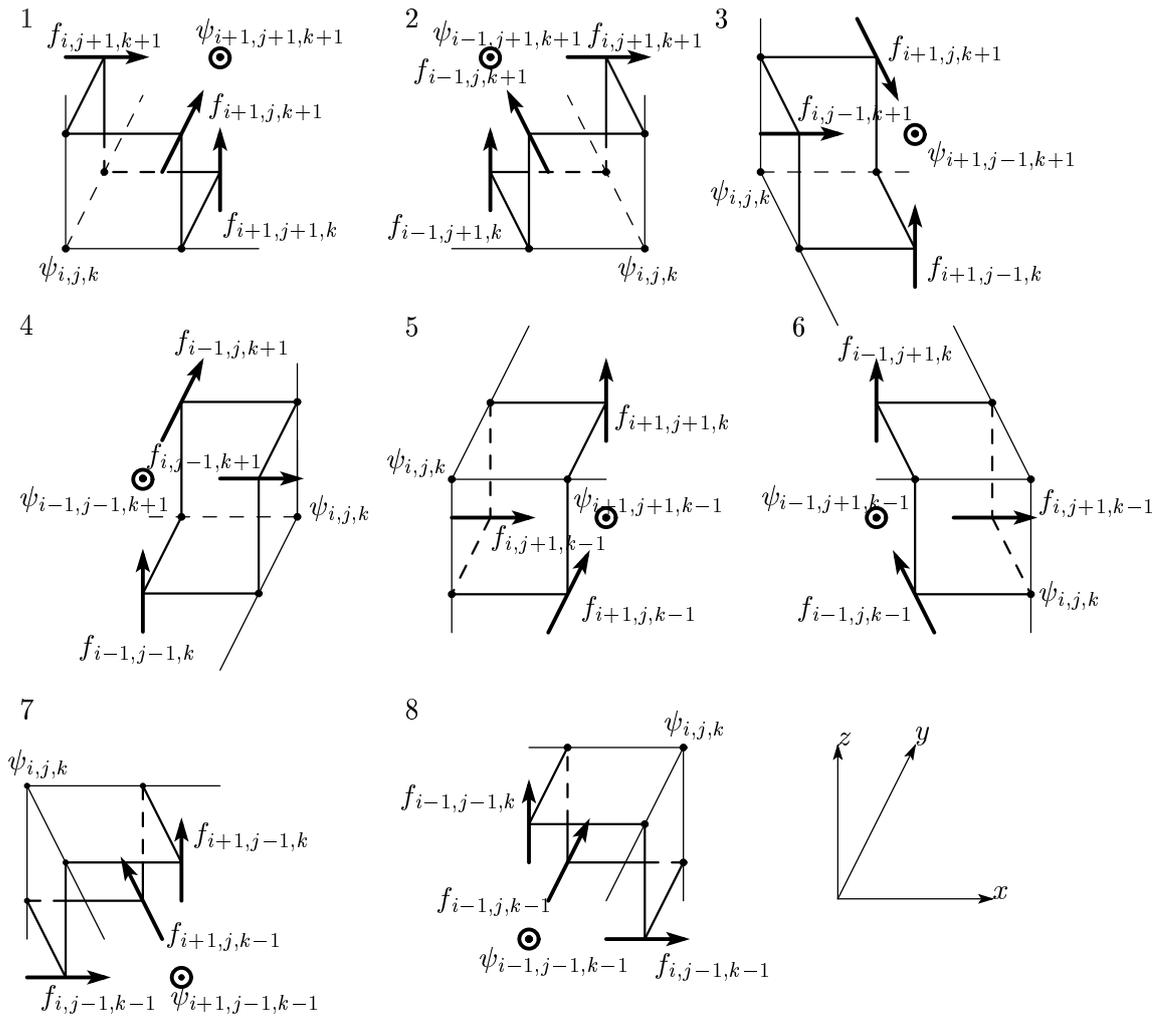


図 5.5: 図 5.4 と同じ。ただし、内部未定義領域がある場合の境界計算。黒線で縁取られた点は未定義領域。

5.1.4 デカルト座標系以外への適用

`ellip_slv` の楕円型方程式求積ルーチンにおける方程式はデカルト座標系を基底座標として採用している。しかし、これらのルーチンで用いる方程式は、一般化された楕円型偏微分方程式である。そのため、各微分係数を適切に設定することでこれらのルーチンは一般直交曲線座標系で定義される任意の線形楕円型方程式に適用可能である。

以下には、これらのルーチンをデカルト座標系以外の楕円型方程式に適用する例である。適用する基礎方程式は物理学でよく用いられるスツルム・リウビル型方程式（自己随伴系方程式）：

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = \rho$$

と仮定する。ここで、 ∇ は 3 次元の勾配演算子ベクトル、 σ, ρ は 3 次元座標を変数にもつ任意の関数、 ϕ は求めたいスカラー物理量である。

デカルト座標系

原点から直交する 3 方向の座標を (x, y, z) としたとき、上記の自己随伴方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \rho \\ \Rightarrow & \sigma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho \end{aligned}$$

と変形できるので、(5.1.6) 式の各係数と対応させると、

$$X = Y = Z = \sigma, \quad a = b = c = 0, \quad d = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad e = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad f = \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

という関係になる。よって、自己随伴系方程式を本ルーチンで求積する際はこのような係数を引数として与えればよい。

円筒座標系

原点から動径方向、同位角方向、鉛直方向座標をそれぞれ (r, θ, z) としたとき、

$$\begin{aligned} & \sigma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\sigma}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho \end{aligned}$$

と変形できるので、(5.1.6) 式の各係数と対応させると、

$$X = Z = \sigma, \quad Y = \frac{\sigma}{r^2}, \quad a = b = c = 0,$$

$$d = \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\sigma}{r}, \quad e = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \quad f = \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

という関係になる。よって、自己随伴系方程式を本ルーチンで求積する際はこのような係数を引数として与えればよい。

球座標系

原点から経度方向、緯度方向、半径方向座標をそれぞれ (λ, θ, r) としたとき、

$$\begin{aligned} & \sigma \left(\frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} - \sigma \tan \theta \right) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{2\sigma}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} = \rho \end{aligned}$$

と変形できるので、(5.1.6) 式の各係数と対応させると、

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sigma}{r^2 \cos^2 \theta}, \quad Y = \frac{\sigma}{r^2}, \quad Z = \sigma, \quad a = b = c = 0, \\ d &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}, \quad e = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} - \sigma \tan \theta \right), \quad f = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{2\sigma}{r} \right) \end{aligned}$$

という関係になる。よって、自己随伴系方程式を本ルーチンで求積する際はこのような係数を引数として与えればよい。

5.2 Thermo_Advanced_Function の付録

5.2.1 レーダ反射強度の導出

本節では、気象研究ノート 200 号 第 1 章 (石原) および CReSS ユーザーマニュアルを参考に、数値モデルで得られる凝結物混合比および数濃度から擬似的なレーダ反射強度の算出式を導出する。

気象レーダは定性的に以下のような過程を通じて大気中の降水物質を観測している：

1. レーダから決まった電力 (電磁波の強さ; P_t) をもつ電磁波が大気中に向けて射出される。
2. 射出された電磁波は大気中に存在する降水物質に遭遇すると、一部は反射、一部は散乱される (もちろん、大気自体でも一部散乱を受ける)。
3. 反射、散乱された電磁波は電力 P_r となって再びレーダまで戻る。

我々は気象レーダがこの再びレーダまで戻った電磁波の電力 (受信電力) を測定することで大気中に存在する降水粒子の大きさや数を推定できる。

レーダから射出される電磁波を球面波と仮定する。すると、光速 c で伝播する電磁波は射出から時間 t 後には射出源から $r = ct$ という距離だけ離れた球面上に広がる。この球面上での電力密度 S は

$$S = \frac{P_t}{4\pi r^2}.$$

しかし、実際のレーダは指向性アンテナを使用するため球面状での電力の分布に偏りが生じる。図?? は射出される電磁波が無指向性の場合と指向性の場合の電力密度の違いを示した図である。射出源から射出される電磁波の電力が同じ場合、無指向性の場合は上式で、一方指向性の場合は

$$S' = \frac{P_t}{A} \quad (5.2.11)$$

で表される。この A はアンテナの性能 (ビーム幅^{*6}など) 図から $A < 4\pi r^2$ であるため、電力密度で考えると送信電力が同じ場合、指向性の方が電力密度が高いことが明らかである。このとき、指向性の電力密度と無指向性の電力密度の比

$$G \equiv \frac{S'}{S}$$

を「アンテナ利得」と呼ぶ。明らかにビーム幅が狭い (指向性のよい) 方が利得が大きいことがわかる。このパラメータを用いると、指向性射出源から射出される電磁波の電力密度は

$$S' = SG = \frac{P_t G}{4\pi r^2}$$

となる。

次に、レーダから距離 r 離れた場所に有限体積の単一目標が存在する場合を考える。この目標のレーダビームに直交する断面積を A_s とすると、射出された電力 P_t のうち、距離 r で遮られる電力 P_a は射出された電磁波の電力密度から

$$P_a = A_s S' = \frac{P_t G}{4\pi r^2} A_s.$$

もし目標の断面積が指向性のアンテナのビーム幅面積 A に等しい場合は、 $A_s = A$ となり、(5.2.11) から

$$P_a = P_t$$

となる。これは射出した電磁波のすべてが遮られるということを表している。この目標が遮った電力 P_a が吸収されることなくすべて一様方向に放射されると仮定すると、先と同様に今度はこの目標物が無指向性射出源となり、その放射される電磁波の電力密度 S_a は距離 R において

$$S_a = \frac{P_a}{4\pi R^2} = \frac{P_t G}{(4\pi)^2 R^2 r^2} A_s$$

となる。この目標物から射出された電磁波を距離 r にあるもとのアンテナが P_r という電力で受信する。この場合、射出源は目標物、吸収源はアンテナとなるので、このときの受信電力 P_r は目標物が射出した電磁波の電力のうち、アンテナの面積 A_e でどれだけ遮ることができたかで決まる。目標物から射出される電磁波の電力密度は S_a なので、それを面積 A_e のアンテナが遮ることのできる電力 P_r は

$$P_r = S_a A_e = \frac{P_t G}{(4\pi r^2)^2} A_s A_e. \quad (5.2.12)$$

^{*6}指向性の射出源を用いても、完全に特定の方向にのみ電磁波を射出することは難しく、ある幅の広がりを持って電磁波を射出することになる。この広がりを持った電磁波の電力のうち、最も電力の高い射出方向をメインローブ、それ以外の電力が相対的に低い射出方向をサイドローブと呼ぶ。最大電力値をとるメインローブから周囲の、ある閾値電力を超える領域の幅をビーム幅と呼び、レーダの観測解像度に影響する。

Peebles (1998) などによると、アンテナが射出する電磁波の波長を λ とすると、アンテナの面積 A_e (アンテナ有効面積) はアンテナ利得と

$$G = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$$

という関係をもつので、(5.2.12) は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} A_s.$$

上の式はレーダが射出した電磁波のうち、目標物が遮った電力がすべて無指向射出されると仮定している。実際は目標物も形状によって指向性の射出、および一部吸収をすることが考えられるので、 A_s は単純に目標物の断面積ではなく後方散乱断面積 σ で表すのが適当である。この σ は目標物の大きさを受け取った電磁波を射出する能率で決まる。よって上式は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sigma.$$

さらに、目標物が直径 D の単一な球であったと仮定する。この D が電磁波の波長 λ に比べて十分に小さい場合、レイリー散乱が卓越するので、後方散乱断面積 σ は理論から

$$\sigma = \frac{\pi^5 |K^2| D^6}{\lambda^4}, \quad (D/\lambda < 1/16) \quad (5.2.13)$$

で与えられる。ここで K は

$$|K^2| \equiv \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2$$

で与えられる。 ε は複素屈折率であり、目標物の物性で決まる。水の場合、3-10 cm の電磁波で $|K^2| = 0.930$ 、氷の球の場合 $|K^2| = 0.197$ 程度になる。

実際の大气中の降水物質は単一ではなく集団であり、純粋な球形であることも稀である。降水粒子が微小大气中に集団で存在する場合、レーダに返ってくる受信電力 (P_r) はそれぞれの降水粒子から射出される電力 (p_r) の総和に等しいので、

$$P_r = \sum_i p_r(i) = \sum_i \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sigma_i = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \sum_i \sigma'_i. \quad (5.2.14)$$

ここで、最終式への変形は粒子ごとに依存しない (添字 i のつかない) 係数を外に出し、空气中の単位体積あたりの後方散乱断面積総和

$$\sum_i \sigma'_i \equiv \frac{\sum_i \sigma_i}{V}, \quad V = \text{レーダのサンプリング体積}$$

として新たに定義した。サンプリング体積を用いる理由はレーダで受信する電力が距離 r の面上に存在する粒子からの反射電力ではなく、ある奥行きをもった体積中に存在する粒子の総反射電力として測定されるからである (図??)。このあたりは同じく、気象研究ノート (2001) の第 1, 2 章に掲載されている測定原理を参照のこと。サンプリング体積の奥行きを h とすると、ビーム幅 θ とレーダからの距離 r を用いた円筒形の領域 (図??) に等しく、

$$V = \pi \left(\frac{r\theta}{2} \right) \frac{h}{2}.$$

よって、体積 V はレーダの性能にのみ依存する物理量であることがわかる^{*7}。さらに、(5.2.13) のレイリー散乱を仮定すると、(5.2.14) は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \frac{\pi^5}{\lambda^4} \sum_i |K_j|^2 D_{i,j}^6. \quad (5.2.15)$$

ここで総和演算は単位体積内の総和であることに注意する。また、 $D_{i,j}$ は i 番目の物性 j という粒子の直径を表す。 K_j は物性に依存するので、サンプリング体積内に物性の異なる粒子が入っていることを考慮して総和演算の中にとどめてある。降雨粒子の誘電率を K とし、相対値で表現すると、上式は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \frac{\pi^5 |K|^2}{\lambda^4} \sum_i m_j^2 D_{i,j}^6, \quad m_j^2 \equiv \frac{|K_j|^2}{|K|^2}. \quad (5.2.16)$$

粒子を物性別でソートし直すと、上式の総和演算は

$$\sum_j m_j^2 \sum_k D_k^6$$

と書き換えられる。よって (5.2.16) は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \frac{\pi^5 |K|^2}{\lambda^4} \sum_j m_j^2 \sum_k D_k^6, \quad m_j^2 \equiv \frac{|K_j|^2}{|K|^2}. \quad (5.2.17)$$

ここまでで (5.2.17) 式は

$$P_r = C \sum_j m_j^2 \sum_k D_k^6, \quad C \equiv \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \frac{\pi^5 |K|^2}{\lambda^4} \quad (5.2.18)$$

とまとめることができる。これは、レーダが受信する電力が降水粒子の個数・大きさに由来する因子とレーダの性能に由来する因子の積として分けることができるということを意味している^{*8}。つまり、レーダの受信電力は同じ降水粒子が同じ個数・大きさに空気中の単位体積に存在していたとしても、レーダの種類やレーダと降水粒子の距離によって受信電力に差が生じることになる。この差をなくし、異なるレーダで同じ降水粒子の存在を測定する尺度として、レーダ反射因子「radar reflectivity factor」が導入された。これは

$$Z \equiv \sum_i D_i^6$$

として定義されるが、粒子による誘電率の違いを考慮すると、

$$Z \equiv \sum_j m_j^2 \sum_{k_j} D_{k_j}^6, \quad (\text{単位; } [\text{mm}^6 \text{ m}^{-3}]). \quad (5.2.19)$$

^{*7}円筒の高さを h ではなく $h/2$ にする理由は気象研究ノート (2001) の図 1.3 による。

^{*8}厳密には C は対象物までの距離 r に由来する成分も含まれるが、これはレーダからの電波の送信時刻と受信時刻の差から測定できる観測値なので、降水粒子に依らない測定可能な物理量である。

(5.2.18) を用いると,

$$(Z =) \sum_j m_j^2 \sum_{k_j} D_{k_j}^6 = \frac{P_r}{C} \quad (5.2.20)$$

となり, 上の関係から Z がレーダの性能等に依存するパラメータ C に依らず粒子の大きさと個数分布のみを表現できる尺度となっていることが明らかとなる.

(5.2.20) 式から Z は, レーダ観測された受信電力 P_r とレーダの性能パラメータを用いて表現することができるため, 受信電力から直接 Z を計算することが可能である. 一方, (5.2.20) の左辺を直接積分すれば, 大気モデルの情報を用いて Z を求めることが可能である. レーダ観測では具体的な D_i の空間分布がわからないため P_r, C を用いることで Z を計算したが, 大気モデルにおいては

$$\sum_{k_j} D_{k_j}^6 = \int_0^\infty D^6 N_j(D) dD$$

という関係を用いることで $N_j(D)$ の分布が得られていれば直接積分が可能となる. ここで, $N_j(D)$ は単位空間体積内に存在するある種類 j の粒子群の中の微小粒形区間 dD あたりに含まれる粒子の個数を表した物理量であり, 単位は $\text{mm}^{-1} \text{m}^{-3}$ である*9. この関係を用いると, Z は

$$Z = \sum_j m_j^2 \int_0^\infty D^6 N_j(D) dD. \quad (5.2.21)$$

バルク法微物理過程を含む大気モデルでは, 各降水物質の混合比 (質量) と総数濃度 (個数) を用いて, その粒径分布をなんらかの関数形を仮定することで近似する手法が採用される*10. この手法では降水物質の混合比と数濃度という 2 つのパラメータのみで粒径分布が規定される. 例えば, 指数関数分布を仮定すると, 単位体積あたりの単位粒径あたりに含まれる粒子の個数 $N(D)$ は

$$N(D) = N_0 e^{-\lambda D}$$

となる. このとき, N_0 が粒径分布の y 切片数濃度, λ が粒径分布を決める傾きパラメータである. よって, 単位体積に存在する粒子の総数 n は

$$n = \int_0^\infty N(D) dD = \int_0^\infty N_0 e^{-\lambda D} dD = \frac{N_0}{\lambda}, \quad (5.2.22)$$

*9 $\sum_{k_j} D_{k_j}^6$ は粒子を D の小さい方から順にソートすることで, D から $D + dD$ という微小直径区間に含まれる粒子の個数分だけその粒子がもつ D^6 を足しあわせていけばよいことになる. よって, 粒子が D から $D + dD$ の区間に存在する単位体積あたりの粒子の個数が $N_j(D)$ 個であった場合,

$$\sum_{k_j=k'+1}^{k'+N} D_{k_j}^6 = D^6 N_j(D) dD$$

となるので, $0 \leq D < \infty$ で積分すれば総和演算に等しくなることが明らかである. 粒子が存在しない粒形区間では $N_j(D) = 0$ となるので積分区間を上記のようにとっても, 総和演算には影響しない.

*10 つまり, バルク法は各降水物質の数濃度の粒径分布の時間変化は混合比と総数濃度の時間変化だけで決まり, 具体的な粒径分布は指定された関数系で表現される. 一方, 実際の大气における降水物質の数濃度の粒径分布は各粒径ごとに独立に時間変化することが想像される. 例えば, 重たい粒子ほど早く落下するなど. しかし, それを大気モデルにおいて実現するためには 1 つの降水物質の時間変化を計算するのに微小粒径ごとにビンを分けてそれぞれ時間発展を計算させなければならなくなる (ビン法微物理過程). これは予報変数の莫大な増加を引き起こすため, 計算資源の都合から多くのモデルではまだ行われていない.

単位体積あたりの降水物質の総質量 $\bar{\rho}q$ は

$$\bar{\rho}q = \int_0^{\infty} v\rho N(D)dD.$$

ここで, $\bar{\rho}$, q , ρ , v はそれぞれ大気の平均密度, 凝結物質の混合比, 凝結物質の密度, 凝結物質の体積である.

$$v = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6}$$

であることを利用すると,

$$\bar{\rho}q = \int_0^{\infty} \frac{\pi D^3}{6} \rho N_0 e^{-\lambda D} dD = \frac{\pi}{6} \rho N_0 \Gamma(4) \frac{1}{\lambda^4} = \frac{\pi \rho N_0}{\lambda^4}. \quad (5.2.23)$$

このとき, $\Gamma(4)$ はガンマ関数で $\Gamma(4) = 3!$ を用いた. これらの関係を用いると, (5.2.21) 式は

$$Z = \sum_j m_j^2 \int_0^{\infty} D^6 N_{j0} e^{-\lambda_j D} dD = \sum_j m_j^2 N_{j0} \Gamma(7) \frac{1}{\lambda_j^7} = 720 \sum_j \frac{m_j^2 N_{j0}}{\lambda_j^7}. \quad (5.2.24)$$

これに (5.2.22), (5.2.23) 式を代入して, 混合比 q と総数濃度 n のみの形に書き換えると,

$$\begin{aligned} Z &= 720 \sum_j m_j^2 n_j \left(\frac{\bar{\rho}q_j}{\pi \rho_j n_j} \right)^2 [\text{mm}^6 \text{m}^{-3}] \\ &= 720 \sum_j m_j^2 n_j \left(\frac{\bar{\rho}q_j}{\pi \rho_j n_j} \right)^2 \times 10^{18} [\text{m}^3] \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

上式が 2 モーメントバルク法 (各降水物質の混合比 q と総数濃度 n の時間発展を予測する微物理過程) におけるレーダ反射因子を計算する表式である.

(5.2.21) 式は他のバルク法にも適用可能である. 例えば, 1 モーメントバルク法 (各降水物質の混合比 q のみの時間発展を予測する微物理過程) でも同様にして Z の計算式が導出できる. 1 モーメントバルク法での数濃度粒径分布は

$$N_j(D) = N_{0j} e^{-\lambda_j D}, \quad N_{0j} = \text{定数}.$$

という形で定義されており, y 切片数濃度が定数のため, (5.2.23) 式と同様に単位体積あたりの降水物質の総質量を求めると,

$$\bar{\rho}q = \frac{\pi \rho N_0}{\lambda^4}. \quad (5.2.26)$$

だけで粒径の傾きが決まってしまう. つまり, 1 モーメントバルク法の場合には Z の評価に単位体積あたりの粒子の総数濃度 n は必要ないことになる. 上式を (5.2.21) 式に代入すれば,

$$Z = \Gamma(7) \sum_j \frac{m_j^2 N_{0j}}{\lambda_j^7} = 720 \sum_j m_j^2 N_{0j} \left(\frac{\bar{\rho}q_j}{\pi \rho_j N_{0j}} \right)^{7/4}. \quad (5.2.27)$$

よって,

$$\begin{aligned} Z &= 720 \sum_j m_j^2 N_{0j} \left(\frac{\bar{\rho} q_j}{\pi \rho_j N_{0j}} \right)^{7/4} [\text{mm}^6 \text{m}^{-3}] \\ &= 720 \sum_j m_j^2 N_{0j} \left(\frac{\bar{\rho} q_j}{\pi \rho_j N_{0j}} \right)^{7/4} \times 10^{18} [\text{m}^3] \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

が 1 モーメントバルク法微物理過程における Z の表式となる.

なお, レーダ方程式に関するさらに詳細な導出は Peebles (1998) を参照.

5.3 map_function の付録

5.3.1 球面三角法

ここでは, `map_function` モジュールに定義されている球面上での緯度・経度点の算出, 球面円弧の計算等で用いられている各計算式について, 球面三角法による導出を行う.

まず, 球面三角形における各数学定理は以下の通りである.

— 正弦定理 —

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (5.3.29)$$

— 余弦定理 —

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \quad (5.3.30)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \quad (5.3.31)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (5.3.32)$$

— 正弦余弦定理 —

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \quad (5.3.33)$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \quad (5.3.34)$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad (5.3.35)$$

このとき, a, b, c, A, B, C は図 5.6 の通りである.

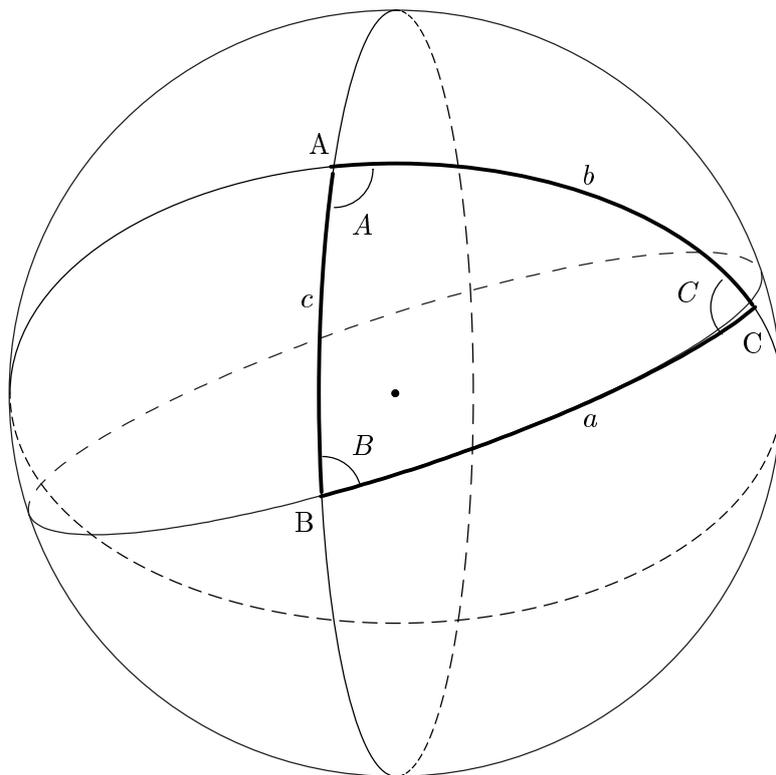


図 5.6: 半径 1 の単位球において定義される球面三角形 ABC. この球面三角形を構成する各円弧は球の中心を通る円の弧である.

これらの定理は図 5.7 のように考えると, そのまま球面座標系の緯度経度に適用することができる.

関数 `ll2radi` は図 5.7 において,

$$\phi_1, \lambda_1, \phi_2, \lambda_2$$

を既知の値とし, これらの 2 点間の円弧距離 r を求める関数である. これを求めるには, (5.3.32) 式において,

$$b = \frac{\pi}{2} - \phi_2, c = \frac{\pi}{2} - \phi_1, A = \lambda_2 - \lambda_1, a = r$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \cos r &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \\ &= \sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

となる. よって, 求める式は

$$r = \arccos[\sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)] \quad (5.3.36)$$

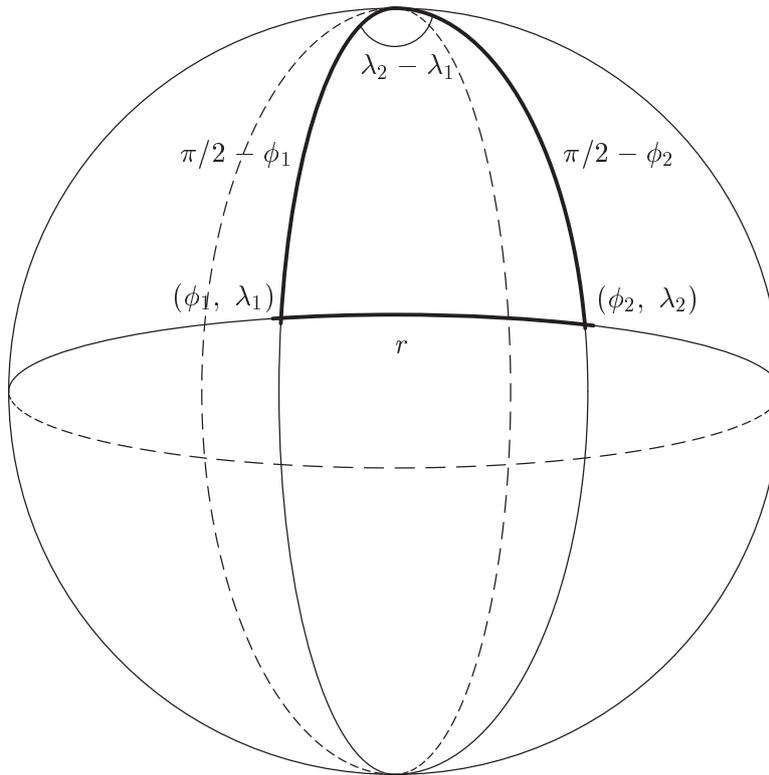


図 5.7: 子午線を 2 辺にもつ球面三角形. これらの辺のもう一方の辺の長さ r を求めるのが関数 `l12radi` である. 子午線を 2 辺にもつので, それらが成す各は 2 辺の経度差となり, 成す点は極点に一致する.

となる. ここで, r は単位球における角度であるので, 半径 R の球においては, rR とすることで角度 r 分の球面上での円弧の長さを求められるということに注意する^{*11}. なぜなら, 球面三角形の各円弧はそれぞれ, 球の中心を通る円周の一部だからである^{*12}. さらに, 点 (ϕ_1, λ_1) を原点とし, 同一点を接点にもつ接平面を考える. この接平面に円弧の距離 r を同じ距離で投影したものが正距図法である. このとき, 接平面をデカルト系としたとき, y 軸を子午線に一致させると, x 軸は点 (ϕ_1, λ_1) を通り, その子午線に直交する円弧に一致する. この円弧は球の中心を通っている. この手法で球面上の各点を接平面に投影したものを正距方位図法という.

`l12rt` は `l12radi` による距離計算に加えて, 角度も計算しており, このルーチンを用いると, 接平面上に球面の各点を正確に投影できる. 接平面への投影は原点から各球面までの距離と y 軸を子午線に一致させた角度をそれぞれ平面に投影する. この投影はまさに正距方位図法である. 上では距離の計算のみ示したので, 以下では球面上の 2 点間の角度^{*13} φ を先ほどと同様に球面三角法を用いて導出する. この φ は x 軸から左回りを正にと

^{*11}実際の `l12radi` は角度 r を求めた後, 地球の半径をかけて実際の距離に直している.

^{*12}地球上の緯度で与えられる緯度円とは異なることに注意. 緯度円の場合は円の半径は緯度に依存して変化する.

^{*13}この角度は上述のとおり, 片方の点を原点とした接平面上にデカルト座標 (もしくは平面極座標) で, y 軸

り, x 軸上でゼロとなるように取られる. もちろん, y 軸は x 軸と直交しているので, y 軸上で $\varphi = \pm\pi/2$ である. 既知の量は r の計算と同様の 2 点での緯度経度とこれらの量から導出した 2 点間の距離 r である. ただし, ここでの球面三角法は単位円を仮定して計算するので, 距離 r は単位円での円弧の長さ, つまり角度 [rad] に等しいことに注意する. すると, 上と同様に A, B, C, a, b, c のそれぞれには

$$a = r, b = \frac{\pi}{2} - \phi_2, c = \frac{\pi}{2} - \phi_1, A = \lambda_2 - \lambda_1, B = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

が対応する. ここで, 点 (ϕ_1, λ_1) は接平面の原点であり, 接平面の x 軸は原点を通る球面上の子午線に直交している. これは, 接平面上に投影される球面上で x 軸に対応する円弧もまた子午線に直交していることを示している. 求めたい φ はこの x 軸に対応する円弧からの角度なので, x 軸上の円弧と子午線が直交していることから, B は φ の余角になる. すると正弦定理 (5.3.29) から

$$\frac{\sin r}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\sin(\pi/2 - \phi_2)}{\sin(\pi/2 - \varphi)}$$

となるので,

$$\cos \varphi = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin r} \cos \phi_2 \quad (5.3.37)$$

が得られる. このままでも φ を求めることは可能であるが, 少し工夫すると, r を求める必要がなくなる. (5.3.35) 式から

$$\begin{aligned} \sin r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \Rightarrow \sin \varphi &= \frac{1}{\sin r} \sin \phi_2 \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \sin \phi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

となるので, これと (5.3.37) を合わせると,

$$\tan \varphi = \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \sin \phi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \phi_2} \quad (5.3.38)$$

となる. よって r を陽に必要とせず φ を求めることが可能となる.

次に, サブルーチン `rt211` は緯度 ϕ_0 , 経度 λ_0 において原点をもつ, 極座標 (r_0, θ_0) で示される点での緯度 ϕ_x と経度 λ_x を求めるものである. ここで考えている極座標は図 5.8 のような座標である. この座標の動径方向の距離は直線ではなく, 球面上に沿った円弧の距離で測られる. また, 同位角方向の角度は球面上の点 ϕ_0, λ_0 での接平面を考えたとき^{*14}, 子午面北向きを $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, 子午面南向きを $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ としてとられる. すなわち, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 上の任意の距離 r_0 は経度で見たとき, λ_0 という経度で一定である (子午線上に乗っている) ということに注意する. したがって, $\theta_0 = 0, \pm\pi, 2\pi$ 上の任意の距離 r_0 は緯度円上に完全に一致せず, 少しずれる. このような座標系において, r_0, θ_0 での点を ϕ_x, λ_x で表そうと考えると, まず既知の値は

$$\phi_0, \lambda_0, \theta_0, r_0$$

上に球の子午線が投影されるように定義する. つまり, 赤道を除いて, x 軸上が同緯度にならない.

^{*14}すなわち, この平面は球の中心から点 (ϕ_0, λ_0) に伸ばした直線と直交する.

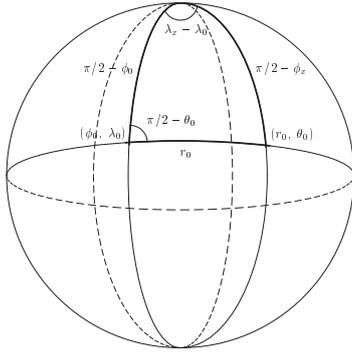


図 5.8: 図 5.7 と同じ三角形. ただし, ここでは (ϕ_x, λ_x) が未知の変数である. 極座標は球面緯度経度上で点 (ϕ_0, λ_0) に原点を持ち, 極座標表記で (r_0, θ_0) となる点の緯度経度 (ϕ_x, λ_x) を計算する. ここで, θ_0 のとりうる値は $-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2$, $3\pi/2 < \theta_0 \leq 2\pi$

なので,

$$A = \lambda_x - \lambda_0, B = \frac{\pi}{2} - \theta_0, a = r_0, b = \frac{\pi}{2} - \phi_x, c = \frac{\pi}{2} - \phi_0 \quad (5.3.39)$$

という対応関係をもつ. ここで注意しなければならないのは, 上式は球面三角形の点 B が極座標の原点とした場合の式である. つまり, この式は θ_0 の値が $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ までしか取り得ない. もし, $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$ の範囲に θ_0 があるときは, 点 C を極座標の原点として値を入れ直す必要がある. このときの対応関係は

$$A = \lambda_0 - \lambda_x, C = \theta_0 - \frac{\pi}{2}, a = r_0, b = \frac{\pi}{2} - \phi_0, c = \frac{\pi}{2} - \phi_x \quad (5.3.40)$$

となる. よって, 以下では, $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ までの領域を reg1, $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$ の範囲を reg2, $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ を reg3 としてそれぞれ定式化する.

reg1 対応するのは図 5.8 である.

ここでは, 計算に角度 C を用いないので, (5.3.30) に (5.3.39) を用いて,

$$\sin \phi_x = \sin \phi_0 \cos r_0 + \cos \phi_0 \sin r_0 \sin \theta_0, \quad (5.3.41)$$

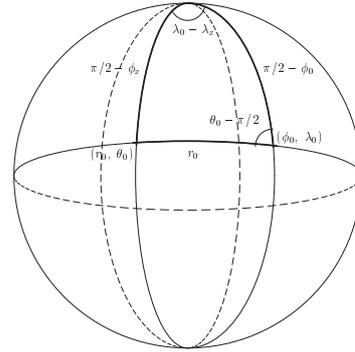
が得られる. これを ϕ_x について整理すると,

$$\phi_x = \arcsin [\sin \phi_0 \cos r_0 + \cos \phi_0 \sin r_0 \sin \theta_0], \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \quad (5.3.42)$$

となる. ϕ_x が得られたので, この値を (5.3.39) とともに (5.3.29) に代入すると,

$$\sin (\lambda_x - \lambda_0) = \frac{\cos \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0$$

図 5.9: 図 5.8 と同じ三角形. ただし, $\pi/2 < \theta_0 < 3\pi/2$, $-\pi \leq \theta_0 < -\pi/2$ の間の状態.



となるので、これより λ_x は

$$\lambda_x = \lambda_0 + \arcsin \left[\frac{\cos \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0 \right] \quad (5.3.43)$$

となる.

reg2 対応するのは図 5.9 である.

ここでは、計算に角度 B を用いないので、(5.3.31) に (5.3.40) を用いて、

$$\sin \phi_x = \cos r_0 \sin \phi_0 + \sin r_0 \cos \phi_0 \sin \theta_0, \quad (5.3.44)$$

が得られる. これを ϕ_x について整理すると、

$$\phi_x = \arcsin [\sin \phi_0 \cos r_0 + \cos \phi_0 \sin r_0 \sin \theta_0], \quad \frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}, \quad -\pi \leq \theta_0 < -\frac{\pi}{2} \quad (5.3.45)$$

となる. 実はこの式は (5.3.42) と同じなので、 ϕ_x の導出においては、 θ_0 の範囲を気にすることなく同一の式で計算することが可能である. ϕ_x が得られたので、この値を (5.3.40) ととともに (5.3.29) に代入すると、

$$\sin (\lambda_0 - \lambda_x) = -\frac{\sin \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0$$

となるので、これより λ_x は

$$\lambda_x = \lambda_0 - \arcsin \left[-\frac{\cos \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0 \right] \quad (5.3.46)$$

となる.

reg3 この領域では、求める点が極座標原点と同じ経度となる. ゆえに、

$$\lambda_x = \lambda_0. \quad (5.3.47)$$

また、子午線上であることから、極座標における距離 r はそのまま極座標原点での緯度値を用いて、

$$\phi_x = \phi_0 \pm r_0. \quad (5.3.48)$$

ここで、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時は正号、 $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ の時は負号となる.

以上が球面上における座標の諸変換である. ここで、上の議論は全て単位球を仮定しているので、単位球面上の距離は rad 単位の角度と等価となる. よって、実際の距離を求める際は、得られる角度に球の半径をかけることで計算できる.

5.3.2 直交座標系における基底ベクトルの変換

2 種類の直交座標系 (x_1, x_2, x_3) , (ξ_1, ξ_2, ξ_3) を考える. 各座標系でのスケール因子は $(h_{x_1}, h_{x_2}, h_{x_3})$, $(h_{\xi_1}, h_{\xi_2}, h_{\xi_3})$ とする. このとき, それぞれの座標系に張られる基底ベクトルを

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \quad (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$$

とする. この空間上に任意の微小ベクトル $\delta \mathbf{x}$ を張ったとき, それぞれの座標系において

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 h_{x_1} \delta x_1 + \mathbf{x}_2 h_{x_2} \delta x_2 + \mathbf{x}_3 h_{x_3} \delta x_3 \\ &= \boldsymbol{\xi}_1 h_{\xi_1} \delta \xi_1 + \boldsymbol{\xi}_2 h_{\xi_2} \delta \xi_2 + \boldsymbol{\xi}_3 h_{\xi_3} \delta \xi_3 \end{aligned}$$

と表現できる. 上式の右辺 2 段の式から

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \frac{h_{x_2}}{h_{x_1}} \frac{\delta x_2}{\delta x_1} + \mathbf{x}_3 \frac{h_{x_3}}{h_{x_1}} \frac{\delta x_3}{\delta x_1} = \boldsymbol{\xi}_1 \frac{h_{\xi_1}}{h_{x_1}} \frac{\delta \xi_1}{\delta x_1} + \boldsymbol{\xi}_2 \frac{h_{\xi_2}}{h_{x_1}} \frac{\delta \xi_2}{\delta x_1} + \boldsymbol{\xi}_3 \frac{h_{\xi_3}}{h_{x_1}} \frac{\delta \xi_3}{\delta x_1}.$$

この微小ベクトルについて, $\delta x_1 \rightarrow 0$ の極限を考えると,

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \frac{h_{x_2}}{h_{x_1}} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \mathbf{x}_3 \frac{h_{x_3}}{h_{x_1}} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \boldsymbol{\xi}_1 \frac{h_{\xi_1}}{h_{x_1}} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \boldsymbol{\xi}_2 \frac{h_{\xi_2}}{h_{x_1}} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \boldsymbol{\xi}_3 \frac{h_{\xi_3}}{h_{x_1}} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}.$$

同じ座標系に張られる互いの基底ベクトルは独立であるため,

$$\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 \frac{h_{\xi_1}}{h_{x_1}} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \boldsymbol{\xi}_2 \frac{h_{\xi_2}}{h_{x_1}} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \boldsymbol{\xi}_3 \frac{h_{\xi_3}}{h_{x_1}} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}. \quad (5.3.49)$$

$\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ のいずれも上記と同様の方法で求めることができる.

これを一般のベクトルに応用すると, ある直交座標系において定義される任意ベクトルの各成分を別の直交座標系における各成分に変換する関係式が得られる. ベクトル \mathbf{v} がデカルト座標系 (x, y, z) で表現されているとする. このベクトルを球座標系 (λ, ϕ, r) に変換することを考える. それぞれの座標系の間での関係式は

$$x = r \cos \phi \cos \lambda, \quad y = r \cos \phi \sin \lambda, \quad z = r \sin \phi$$

と表現されるとする. この関係式は原点座標が両方で一致していることを表している. デカルト座標系の基底ベクトルを $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ としたとき, ベクトルは

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

と表される. (v_x, v_y, v_z) はそれぞれの基底ベクトル方向の成分を表す. 上のベクトルは球座標系において

$$\mathbf{v} = v_\lambda \mathbf{e}_\lambda + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_r \mathbf{e}_r.$$

ここで, 球座標系での基底ベクトルを $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_r)$ とし, それぞれの成分を (v_λ, v_ϕ, v_r) とした. 上の 2 式から

$$v_\lambda \mathbf{e}_\lambda + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_r \mathbf{e}_r = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

である。同じ座標系での基底は互いに独立なので、例えば上式両辺に e_λ をかけると、

$$v_\lambda = v_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_\lambda + v_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\lambda + v_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\lambda \quad (5.3.50)$$

となり、デカルト座標系でのベクトル成分から球座標系での成分を求める関係式が得られる。異なる直交座標系間の基底ベクトルの関係は (5.3.49) から得られる。具体的には

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\lambda &= \mathbf{i} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \mathbf{k} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{i} \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \mathbf{j} \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \mathbf{k} \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial r} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial r} + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial r} \end{aligned}$$

より、デカルト座標系と球座標系の関係式を用いて上式の空間微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\lambda &= -\mathbf{i} \sin \lambda + \mathbf{j} \cos \lambda \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{i} \sin \phi \cos \lambda - \mathbf{j} \sin \phi \sin \lambda + \mathbf{k} \cos \phi \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos \phi \cos \lambda + \mathbf{j} \cos \phi \sin \lambda + \mathbf{k} \sin \phi \end{aligned}$$

が得られる。よって、(5.3.50) 式は

$$v_\lambda = -v_x \sin \lambda + v_y \cos \lambda \quad (5.3.51)$$

と変換される。同じやり方で v_ϕ , v_r も得られる。

以上の事実は、異なる直交座標系間の関係式が与えられれば、任意のベクトルについて、これらの座標間での変換関係が求められ、具体的にベクトルの成分変換が可能であることを示している。

5.3.3 地図投影

ここでは、緯度経度空間で定義される格子点をデカルト座標系と関係づけるいくつかの地図投影と投影のための変換関係を示す。ここで示された変換関係は後節の緯度経度座標から各地図投影されたデカルト座標系へのベクトル成分の変換式導出のために利用される。

そもそも、地図投影は球面上の任意の点を水平面の 1 点に対応させるための変換手法である。球面を平面に変換するため、球面上での性質（長さ、面積など）は球面上でのものと等しくさせることはできない（いずれかの性質において歪が発生する）。地図投影の理解において重要な点は投影先の平面がどのような形であるかということと、光源がどのような種類かを正確に認識することである。以下で示す地図投影ではそれらを明記したのち、変換式を導出する。なお、各投影法の性質や特徴・利点などは本書の範囲を超えるので詳細は省略する。

メルカトル図法

図??で示されるように、投影面が赤道に接する円筒状に配置され、光源が地球の中心にある地図投影を円筒図法と呼ぶ。後で詳細に示すが、メルカトル図法は単なる円筒図法ではなく、等角写像であるため、円筒面に球面を投影したあと、各投影点での方角が元の球面上での方角と正しくなるように距離が修正される。言うまでもなく、赤道での長さが正確に表現される。

地球上の経度、緯度 (λ, ϕ) は図??のようになり、この各点が円筒面上に投影されたとき、 $(\lambda, \phi) = (\lambda_0, 0)$ となる赤道上的点を投影先で定義されるデカルト座標系の原点 $(x, y) = (0, 0)$ に対応させる。以下では、ここで定義されたデカルト座標系が球面上での緯度経度とどのような対応関係をもつかを幾何的に考察する。

まず、 x 方向は図??から、緯度に依存することなく y 軸に平行に経度の等しい線が投影される。したがって、明らかに

$$x = a(\lambda - \lambda_0) \quad (5.3.52)$$

である。ここで、 a は地球半径である^{*15}。次に y 方向は図??から、赤道面から角度 ϕ (緯度) の方向に伸びる線と円筒面が交わる点が緯度 ϕ の球面上の点を投影している。したがって、

$$y = a \tan \phi \quad (5.3.53)$$

となる。(5.3.52), (5.3.53) が「円筒投影図法」で投影された球面上の点と投影面上での点の関係式となる。

ところで、図??で示されるように、球面上でのある微小面積 $A'B'C'D'$ とそれに対応して円筒投影図法で投影された投影面上での微小面積 $ABCD$ では、対角方向への角度 (方角) が異なっていることがわかる。これは、単なる円筒投影が等角性を保存しない投影図法だからである。面積 $A'B'C'D'$ において、点 A' から C' への方角を θ' とすると、球面三角法の関係から

$$\frac{\sin \theta'}{\sin B'C'} = \frac{\sin (\angle A'C'B')}{\sin A'B'}$$

となる。面積 $A'B'C'D'$ は各点の角度が全て $\pi/2$ であるため、上式は

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \delta \phi} = \frac{\sin (\pi/2 - \theta')}{\sin (\delta \lambda \cos \phi)}$$

となる。よって、

$$\tan \theta' = \frac{\sin \delta \phi}{\sin (\delta \lambda \cos \phi)} \approx \frac{\delta \phi}{\delta \lambda \cos \phi}. \quad (5.3.54)$$

これが、球面上での方角である。最終式への変形は $\delta \phi$, $\delta \lambda \ll 1$ であることを用いている。もし円筒投影法が等角性を保存するのであれば、投影先の面積 $ABCD$ における点 A から点 C への方角を θ が θ' に一致しなければならない。実際、面積 $ABCD$ において、

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\tan (\phi + \delta \phi) - \tan \phi}{\delta \lambda} = \frac{\delta y}{\delta x} \quad (5.3.55)$$

^{*15}本書の議論では、計算を簡単にするため地球は真球であると仮定する。

となり, 明らかに $\theta \neq \theta'$ である. このとき, x 方向を変化させずに, y を α 倍することで y' となる新しい座標系

$$y' \equiv \alpha y = \alpha a \tan \phi$$

を投影面上に構築する. この α は

$$\tan \theta' = \alpha \tan \theta$$

となるようにとられる. すると, (5.3.55) を用いて

$$\tan \theta' = \alpha \tan \theta = \frac{\alpha \delta y}{\delta x} = \frac{\delta y'}{\delta x}$$

と表現できる. これは, 面積 ABCD の領域を図??のように, 面積 ABEF に縮めたことに対応する. 縮めることで方角を投影前と一致させている. (5.3.54) と上式を用いると,

$$\frac{\delta \phi}{\delta \lambda \cos \phi} = \frac{\delta y'}{\delta x}$$

となる. $\delta x = a \delta \lambda$ であるため,

$$a \frac{\delta \phi}{\cos \phi} = \delta y'.$$

y' は y の定数倍であるため, 上式を y' 方向に積分すれば, y' の各点における球面上の対応緯度 ϕ が得られる. 具体的には上式から

$$a \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos \phi'} = \int_0^{y'} dy''$$

$$\Rightarrow y' = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}$$

となる. これまでの説明から, y' がメルカトル投影 (等角円筒投影) によって投影面に投影された緯度と対応する座標を表す. 以上より, メルカトル投影された球面上での緯度経度 (λ, ϕ) と投影面上でのデカルト座標 (x, y) の関係は

$$x = a(\lambda - \lambda_0), \quad y = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\},$$

$$\lambda = \frac{x}{a} + \lambda_0, \quad \phi = 2 \arctan \left\{ \left[\exp \left(\frac{y}{a} \right) \right] \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\} - \frac{\pi}{2}$$
(5.3.56)

と導かれる. 二段目の式は一段目の式を逆に解いたものである.

さらに, (λ_0, ϕ_0) をデカルト座標の原点 $(x, y) = (0, 0)$ とおいた場合, 原点から任意の緯度経度までの距離 r は

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= a \sqrt{(\lambda - \lambda_0)^2 + \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}^2}$$
(5.3.57)

と表現できるため, 緯度経度座標の値が得られている場合, 上式からメルカトル投影した際の原点からの距離を求めることができる.

ランベルト正角円錐図法

図??で示されるように、球面の両極軸に一致した天頂軸をもつ円錐状の投影面を考える。この円錐投影面は球面上の2つの異なる基準緯度 ϕ_1, ϕ_2 で球面と交わっている^{*16}。同図から明らかなように、投影された円錐の展開図は角度 β の扇状になる。球面上の緯度は扇の中心から等しい距離上に投影され、球面上の経度は扇の中心から放射状に投影される。

このとき、球面上の任意の点 $(\lambda, \phi) = (\lambda_0, \phi_0)$ に対応する投影面上の点において、原点 $(x, y) = (0, 0)$ を置き、図??に示されるように、経度線を北極に向かう方向を y 軸と一致させるようなデカルト座標を張る。一方、このデカルト座標とは異なり、図??に示されるような別のデカルト座標系 (w, v) を張る。このデカルト座標系は投影面上の経度線 $\lambda = \lambda_0$ を北極から赤道に向かう方向に w 軸を設定し、右手系直交方向に v 軸を設定する。したがって、 (x, y) と (w, v) の座標の関係は明らかに

$$x = v, \quad y = w_0 - w, \quad w_0 = w(\phi = \phi_0) \quad (5.3.58)$$

である。

まず、デカルト座標系 (w, v) と投影面での緯度経度との対応関係を調べる。先述のとおり、扇の投影面上で緯度は扇の中心から等距離上に投影され、経度は中心から放射状に投影されている。したがって、

$$w = r \cos \alpha, \quad v = r \sin \alpha \quad (5.3.59)$$

が成り立つ。ここで、 r, α は扇の中心からの距離と $\lambda = \lambda_0$ に対応する w 軸からの角度である。この2つのパラメータが投影面上で取りうる範囲は

$$\alpha(\lambda = 0) \leq \alpha \leq \alpha(\lambda = 2\pi), \quad r(\phi = \pi/2) \leq r \leq r(\phi = -\pi/2).$$

ただし、

$$\alpha(\lambda = 2\pi) - \alpha(\lambda = 0) = \beta, \quad r(\phi = \pi/2) = 0$$

であることに注意する。以降、これらのパラメータが緯度経度とどのような関係にあるかを幾何的に考察する。

扇の角度 α は $\alpha = 0$ から $\alpha = \beta$ までの間で等間隔に経度が投影される。したがって、

$$(\lambda - \lambda_0) = \frac{2\pi}{\beta} \alpha \quad (5.3.60)$$

という関係が得られる。ところで、円錐天頂の断面角 θ は図??から ΔTSL について

$$\angle TSL = \frac{\pi}{2} - \theta$$

である。また、

$$\angle OSL + \angle TSL = \frac{\pi}{2}$$

^{*16}ランベルト正角円錐図法はこのように基準緯度を2つもち、それぞれの点が球面と交わる投影面を設定する場合、基準緯度を！つしか持たず、その緯度で投影面が球面と接するような設定を行う場合がある。ここでは、前者の基準緯度を2つ有する場合を考察する。

かつ、点 S は 2 つの基準緯度の中間緯度角が投影面と交わる点なので、

$$\angle OSL = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

が成り立つ。したがって、 $\angle TSL$ は

$$\angle TSL = \frac{\pi}{2} - \angle OSL = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}.$$

これを用いると、 θ は

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \angle TSL = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}. \quad (5.3.61)$$

このとき、円錐と球面の交点 R で天頂軸に垂直に円錐を切り取ったときの底面の円弧の長さ s は、

$$s = 2\pi RP = 2\pi a \cos \phi_2.$$

この s は円錐を展開したとき、 ϕ_2 に対応する円弧の中心からの距離 $r(\phi_2)$ における扇の円弧の長さ ($= r(\phi_2)\beta$) に等しい。したがって、

$$2\pi a \cos \phi_2 = r(\phi_2)\beta = \frac{RP}{\sin \theta} \beta = \frac{a \cos \phi_2}{\sin \theta} \beta.$$

2 式から 3 式への変形は図??から円錐の断面 $\triangle TPR$ を考えたとき、 $RT = r(\phi_2)$ となることから、 $r(\phi_2) \sin \theta = RP$ であることを用いた。よって、上式から β についての関係式

$$\beta = 2\pi \sin \theta = 2\pi \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \quad (5.3.62)$$

が得られる。円錐の天頂から球の中心までの距離 (円錐の高さ) TO は $\triangle TRO$ を考えると、平面三角形の正弦定理より

$$\frac{\sin \theta}{a} = \frac{\sin \angle TRO}{TO}.$$

図??から $\angle TRO = \pi/2 - \theta + \phi_2$ なので、上式は

$$TO = \frac{a}{\sin \theta} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \phi_2 \right) = \frac{a}{\sin \theta} \cos (\theta - \phi_2). \quad (5.3.63)$$

以上から、線分 TQ 上の任意の点 X ($TX = r(\phi)$) によって作られる $\triangle TXO$ について、正弦定理から

$$\begin{aligned} \frac{\sin (\pi/2 - \phi)}{r(\phi)} &= \frac{\sin \angle TXO}{TO} = \frac{\sin (\pi/2 - \theta + \phi) \sin \theta}{a \cos (\theta - \phi_2)} = \frac{\cos (\theta - \phi) \sin \theta}{a \cos (\theta - \phi_2)} \\ \Rightarrow r(\phi) &= a \cos \phi \frac{\cos (\theta - \phi_2)}{\cos (\theta - \phi) \sin \theta} \end{aligned} \quad (5.3.64)$$

となる。このとき、 $\angle TXO = \pi/2 - \theta + \phi$ と (5.3.63) を用いた。

ところで、図??で示されるように、球面上でのある微小面積 $A'B'C'D'$ とそれに対応して円錐投影図法で投影された投影面上での微小面積 $ABCD$ では、対角方向への角度 (方角) が異なっていることがわかる。これは、単なる円錐投影が等角性を保存しない投影図法だ

からである。面積 $A'B'C'D'$ において、点 A' から C' への方角を Θ' とすると、球面三角法の関係から

$$\frac{\sin \Theta'}{\sin B'C'} = \frac{\sin(\angle A'C'B')}{\sin A'B'}$$

となる。面積 $A'B'C'D'$ は各点の角度が全て $\pi/2$ であるため、上式は

$$\frac{\sin \Theta'}{\sin \delta\phi} = \frac{\sin(\pi/2 - \Theta')}{\sin(\delta\lambda \cos \phi)}$$

となる。よって、

$$\tan \Theta' = \frac{\sin \delta\phi}{\sin(\delta\lambda \cos \phi)} \approx \frac{\delta\phi}{\delta\lambda \cos \phi}. \quad (5.3.65)$$

これが、球面上での方角である。最終式への変形は $\delta\phi$, $\delta\lambda \ll 1$ であることを用いている。もし円錐投影法が等角性を保存するのであれば、投影先の面積 $ABCD$ における点 A から点 C への方角を Θ が Θ' に一致しなければならない。実際、面積 $ABCD$ において、

$$\tan \Theta = \frac{BC}{AB} = \frac{-\delta r}{r\delta\alpha} = \frac{-\delta r}{r \sin \theta \delta\lambda} \quad (5.3.66)$$

となり、明らかに $\Theta \neq \Theta'$ である^{*17}。上式の途中変換には (5.3.60), (5.3.62) を用いた。また、辺 BC は辺 $B'C'$ と座標軸の向きが逆であるため、点 B から C への変化がなす角 Θ は、 $-\delta r$ と負号がつくことに注意する。このとき、 r 方向を変化させずに、 α を f 倍することで α' となる新しい座標系

$$\alpha' \equiv f\alpha$$

を投影面上に構築する。これにより、(5.3.58), (5.3.59) で定義される投影面上でのデカルト座標系 (x, y) および (w, v) は等角ではない単なる円錐投影における投影面でのデカルト座標を表している。ここでは新たに等角円錐投影のためのデカルト座標として (x', y') , (w', v') を張り直す。このとき、(5.3.59) から明らかに

$$w' = \frac{r}{f} \cos \alpha', \quad v' = \frac{r}{f} \sin \alpha' \quad (5.3.67)$$

となるように (w', v') は張られる^{*18}。同様に、(5.3.58) は

$$x' = v', \quad y' = w'_0 - w', \quad w'_0 = w'(\phi = \phi_0) \quad (5.3.68)$$

^{*17}一見一致しないかどうか判然としないが、以下のように示すことができる。(5.3.64) から

$$\begin{aligned} \delta r &= a \frac{\cos(\theta - \phi_2)}{\sin \theta} \delta \left[\frac{\cos \phi}{\cos(\theta - \phi)} \right] \\ &= a \frac{\cos(\theta - \phi_2)}{\sin \theta} \left[\frac{-\sin \phi \cos(\theta - \phi) - \cos \phi \sin(\theta - \phi)}{\cos^2(\theta - \phi)} \right] \delta \phi \\ &= -a \frac{\cos \phi \cos(\theta - \phi_2)}{\sin \theta \cos(\theta - \phi)} [\tan \phi + \tan(\theta - \phi)] \delta \phi \\ &= -r [\tan \phi + \tan(\theta - \phi)] \delta \phi \end{aligned}$$

を (5.3.66) に用いて

$$\tan \Theta = \frac{\tan \phi + \tan(\theta - \phi)}{\sin \theta \delta\lambda} \delta\phi$$

となるため、 $\tan \Theta' \neq \tan \Theta$ は明らか。

^{*18}このとき、 f は定数倍なので、 (w', v') 系は (w, v) 系より長さが伸縮していることに注意する。ここで $1/f$ をかけたのは、最後の式を簡潔にするためであるがこの処理を行っても一般性は失われない。

となる。また (5.3.66) は

$$\frac{1}{f} \tan \Theta = \frac{-\delta r}{fr \sin \theta \delta \lambda} = \frac{-\delta r}{r \sin \theta \delta \lambda'} \quad (5.3.69)$$

となる。この座標変換によって、

$$\tan \Theta' = \frac{1}{f} \tan \Theta$$

が満たされるなら、(5.3.65), (5.3.69) から

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi}{\delta \lambda \cos \phi} &= \frac{-\delta r}{fr \sin \theta \delta \lambda} = \frac{-\delta r}{r \sin \theta \delta \lambda'} \\ \Rightarrow \frac{\delta \phi}{\delta \lambda \cos \phi} &= \frac{-\delta r}{fr \sin \theta \delta \lambda} \\ \Rightarrow \frac{\delta \phi}{\cos \phi} &= \frac{-\delta r}{fr \sin \theta} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、上式を $r(\phi)$ 方向に積分すると

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos \phi'} &= -\frac{1}{f \sin \theta} \int_{r(\phi_1)}^{r(\phi)} \frac{dr'}{r'} \\ \Rightarrow \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] &= -\frac{1}{f \sin \theta} \ln \left[\frac{r(\phi)}{r(\phi_1)} \right] \\ \Rightarrow \frac{r(\phi)}{r(\phi_1)} &= \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right]^{-f \sin \theta} \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

となり、 ϕ と $r(\phi)$ の関係が得られる^{*19}。(5.3.64) 式から ϕ と $r(\phi)$ の関係性は既に得られているため、上式と (5.3.64) から未定係数 f の値を求める。そのためには、 ϕ に具体的な値を

^{*19}ここで、 ϕ' についての積分は $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ 内における任意の範囲で行われるため、 $\sin \phi = t$ という変数変換を用いると ($\cos \phi = t$ とおくと $\sin \phi = \pm\sqrt{1-t^2}$ を表現するときに正負の場合分けが必要になるため最適ではない)。

$$\int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos \phi'} = \int_{T_1=t(\phi_1)}^{T(\phi)} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_{T_1=t(\phi_1)}^{T(\phi)} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] dt = \frac{1}{2} [-\ln(1-t) + \ln(1+t)]_{T_1=t(\phi_1)}^{T(\phi)}$$

と求められる。よって、

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos \phi'} &= \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} \right]_{\phi_1}^{\phi} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1 + 2 \sin(\phi'/2) \cos(\phi'/2)}{1 - 2 \sin(\phi'/2) \cos(\phi'/2)} \right]_{\phi_1}^{\phi} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\cos^{-2}(\phi'/2) + 2 \tan(\phi'/2)}{\cos^{-2}(\phi'/2) - 2 \tan(\phi'/2)} \right]_{\phi_1}^{\phi} \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1 + \tan(\phi'/2)}{1 - \tan(\phi'/2)} \right)^2 \right]_{\phi_1}^{\phi} = \left[\ln \frac{1 + \tan(\phi'/2)}{1 - \tan(\phi'/2)} \right]_{\phi_1}^{\phi} = \left[\ln \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) \right\} \right]_{\phi_1}^{\phi} \\ &= \ln \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

という積分結果が得られる。上式一段目では三角関数の倍角公式

$$\sin \phi = 2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2),$$

一段目から二段目への変形は三角関数の定義

$$1 + \tan^2(\phi/2) = 1/\cos^2(\phi/2),$$

代入すればよい. 上式について $\phi = \phi_2$ のとき, $f \sin \theta$ は

$$f \sin \theta = -\ln \left[\frac{r(\phi_2)}{r(\phi_1)} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1}$$

であると求められる. (5.3.64) を用いて r を置き換えると,

$$\begin{aligned} n \equiv f \sin \theta &= -\ln \left[\frac{\cos \phi_2 \cos(\theta - \phi_1)}{\cos \phi_1 \cos(\theta - \phi_2)} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \\ &= \ln \left[\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (5.3.71)$$

と求められる. ここで, 最終式への変形は $\theta = (\phi_1 + \phi_2)/2$ より

$$\frac{\cos(\theta - \phi_1)}{\cos(\theta - \phi_2)} = \frac{\cos[(\phi_2 - \phi_1)/2]}{\cos[(\phi_1 - \phi_2)/2]} = 1$$

であることを用いた*20.

以上の操作によって, 投影面上におけるデカルト座標 (w, v) と緯度経度を対応づけるためのパラメータ r, α の具体的な値が求められたことになる. (5.3.67) 式に (5.3.70), (5.3.60) を代入すると,

$$\begin{aligned} w'(\lambda', \phi) &= \frac{r(\phi_1)}{f} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \cos \left(\frac{\beta}{2\pi} (\lambda' - \lambda'_0) \right) \\ v'(\lambda', \phi) &= \frac{r(\phi_1)}{f} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \sin \left(\frac{\beta}{2\pi} (\lambda' - \lambda'_0) \right) \end{aligned}$$

β を (5.3.62) で置き換え, $\alpha' = f\alpha$ を思い出し λ' を λ で置き換えると,

$$\begin{aligned} w'(\lambda', \phi) &= \frac{r(\phi_1)}{f} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v'(\lambda', \phi) &= \frac{r(\phi_1)}{f} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \end{aligned}$$

$r(\phi_1)$ を (5.3.64) で置き換えると,

$$\begin{aligned} w'(\lambda', \phi) &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v'(\lambda', \phi) &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \end{aligned}$$

二段目最終変形は正接の加法定理

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

から, $\alpha = \pi/4, \beta = \phi/2$ とすると,

$$\tan(\pi/4 + \phi/2) = \frac{1 + \tan(\phi/2)}{1 - \tan(\phi/2)}$$

となることをそれぞれ用いて変形した.

*20

$$\cos(-x) = \cos x.$$

よって、最終的に上式を用いると (5.3.68) は

$$\begin{aligned}
 x' &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\
 y' &= w'_0 - a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\
 U(\phi) &\equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\
 n &\equiv \ln \left[\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \\
 w'_0 &\equiv w'(\lambda = \lambda_0, \phi = \phi_0) = a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi_0)} \right]^n
 \end{aligned} \tag{5.3.72}$$

と導かれる。また、この関係を逆に解くと、 λ について

$$\begin{aligned}
 \frac{x'}{y' - w'_0} &= -\tan [n(\lambda - \lambda_0)] \\
 \Rightarrow \lambda &= \lambda_0 + \frac{1}{n} \arctan \left(\frac{-x'}{y' - w'_0} \right)
 \end{aligned} \tag{5.3.73}$$

であることが、さらに ϕ について

$$\begin{aligned}
 x'^2 + (y' - w'_0)^2 &= \left(a \frac{\cos \phi_1}{n} \right)^2 \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^{2n} \\
 \Rightarrow U^{2n}(\phi) &= \frac{\left(a \frac{\cos \phi_1}{n} \right)^2}{x'^2 + (y' - w'_0)^2} U^{2n}(\phi_1) \\
 \Rightarrow U(\phi) &= \frac{\left(a \frac{\cos \phi_1}{n} \right)^{1/n}}{[x'^2 + (y' - w'_0)^2]^{1/2n}} U(\phi_1) \\
 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} &= \arctan \left\{ \frac{\left(a \frac{\cos \phi_1}{n} \right)^{1/n}}{[x'^2 + (y' - w'_0)^2]^{1/2n}} U(\phi_1) \right\} \\
 \Rightarrow \phi &= 2 \arctan \left\{ \left[\frac{a \cos \phi_1}{n \sqrt{x'^2 + (y' - w'_0)^2}} \right]^{1/n} U(\phi_1) \right\} - \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{5.3.74}$$

であることが得られる。

さらに、投影座標 (x', y') における原点 $(x, y) = (0, 0)$ を緯度経度 (λ_0, ϕ_0) に置いた場合、投

影座標の原点から任意の緯度経度 (λ, ϕ) までの距離 r は

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\
 &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sqrt{\sin^2 [n(\lambda - \lambda_0)] + \left\{ \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_0)} \right]^n - \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \right\}^2} \\
 &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sqrt{1 + \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_0)} \right]^{2n} - 2 \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_0)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)]} \quad (5.3.75)
 \end{aligned}$$

で表現される。

5.3.4 地図投影に伴うベクトル成分変換

ここでは、任意のベクトルについて、地図投影されたデカルト座標系上で定義されるベクトル成分を緯度経度座標系で定義されるベクトル成分に変換（およびその逆変換）するための関係式を導出する。考慮する座標系は前節と同じで、ランベルト正角円錐図法およびメルカトル図法である。

まず、2次元ベクトル \boldsymbol{v} について、デカルト座標系 (x, y) の各基底ベクトル方向の成分を (u, v) と表記する。このときの基底ベクトルは $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ と表記する。ここで定義された座標系は、ある地図投影法によって緯度経度座標 (λ, ϕ) と 1 対 1 で対応しているとする。このとき、緯度経度座標系において同じベクトルの成分は (u_λ, v_ϕ) 、基底ベクトルは $(\boldsymbol{e}_\lambda, \boldsymbol{e}_\phi)$ と定義する。(5.3.49) から

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{e}_x &= \boldsymbol{e}_\lambda \frac{h_\lambda}{h_x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{h_\phi}{h_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
 \boldsymbol{e}_y &= \boldsymbol{e}_\lambda \frac{h_\lambda}{h_y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{h_\phi}{h_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
 \boldsymbol{e}_\lambda &= \boldsymbol{e}_x \frac{h_x}{h_\lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \boldsymbol{e}_y \frac{h_y}{h_\lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\
 \boldsymbol{e}_\phi &= \boldsymbol{e}_x \frac{h_x}{h_\phi} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \boldsymbol{e}_y \frac{h_y}{h_\phi} \frac{\partial y}{\partial \phi}
 \end{aligned} \quad (5.3.76)$$

となる。 h_x, h_y は地図投影面上でのデカルト座標におけるスケール因子、 h_λ, h_ϕ は緯度経度座標におけるスケール因子を表す。ここで重要な点は地図投影上でのデカルト座標の場合、スケール因子は必ずしも $h_x = h_y = 1$ とならないことに注意する。それは、球面上の座標を投影する際に長さスケールが保存していない（投影の際に伸び縮みが起こる）からである。よって、上式から、任意の地図投影面座標のスケール因子は、その座標における基底ベクトルの長さを 1 にするように定義される。すなわち、上式 1, 2 段目についてノルムを

求める (両辺 2 乗する) と, $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1$ でなければならないので,

$$1 = \frac{1}{h_x} \sqrt{h_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + h_\phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2}$$

$$1 = \frac{1}{h_y} \sqrt{h_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + h_\phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2}$$

から,

$$h_x = \sqrt{h_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + h_\phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2}$$

$$h_y = \sqrt{h_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + h_\phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2}.$$
(5.3.77)

ここで, 緯度経度座標における基底ベクトルもその定義から $\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = 1$ であることを用いた.

次に, ベクトル \mathbf{v} は各座標系において,

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y = u_\lambda\mathbf{e}_\lambda + v_\phi\mathbf{e}_\phi$$

と表される^{*21}. この関係からそれぞれの座標系におけるベクトル成分間の関係は

$$u = u_\lambda\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_x + v_\phi\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_x$$

$$v = u_\lambda\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_y + v_\phi\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_y$$

$$u_\lambda = u\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\lambda + v\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\lambda$$

$$v_\phi = u\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\phi + v\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\phi$$

となるので, (5.3.76) から

$$u = u_\lambda \frac{h_x}{h_\lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{h_x}{h_\phi} \frac{\partial x}{\partial \phi}$$

$$v = u_\lambda \frac{h_y}{h_\lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{h_y}{h_\phi} \frac{\partial y}{\partial \phi}$$

$$u_\lambda = u \frac{h_x}{h_\lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + v \frac{h_y}{h_\lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$v_\phi = u \frac{h_x}{h_\phi} \frac{\partial x}{\partial \phi} + v \frac{h_y}{h_\phi} \frac{\partial y}{\partial \phi}$$

^{*21}このとき, ベクトル成分 u, v は地図上の座標で測られるベクトルではなく, 球面上での長さを保存して地図投影面上に投影されたベクトルであることを表す. 従って, 球面上での基底ベクトルの和で張られる任意のベクトルは, 投影面上での基底ベクトルの和で長さ, 向きを変えることなく, その座標上に張ることができる. 投影に伴う長さおよび向きの変化は全て投影座標におけるスケール因子に押し付ける. もし, 投影面上の座標で測られるベクトル成分として記述する場合は, 投影座標におけるスケール因子は全て 1 (単なるデカルト座標) となり, 投影前の球面上でのベクトルと投影面上でのベクトルは長さおよび向きを保存しなくなる. 本節において議論する投影面上でのベクトル成分は, 球面上での長さ向きを保存するベクトル成分である.

となる．球面座標系でのスケール因子は

$$h_\lambda = a \cos \phi, \quad h_\phi = a.$$

よって，

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_\lambda}{a \cos \phi} h_x \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{a} h_x \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ v &= \frac{u_\lambda}{a \cos \phi} h_y \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{a} h_y \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ u_\lambda &= \frac{u}{a \cos \phi} h_x \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{v}{a \cos \phi} h_y \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ v_\phi &= \frac{u}{a} h_x \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{v}{a} h_y \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{aligned} \tag{5.3.78}$$

であることがわかる．この関係式が地図投影されたデカルト座標系と緯度経度座標系でのベクトル成分の変換規則を示している．したがって，地図投影法に依存する $x = x(\lambda, \phi)$, $y = y(\lambda, \phi)$ を具体的に上式の空間勾配部分に当てはめれば，自動的にベクトル成分の座標変換規則が得られることになる．

メルカトル図法

緯度経度座標でのベクトル成分 (u_λ, v_ϕ) をメルカトル投影したときの投影面上でのベクトル成分 (u_M, v_M) の関係を求める．まず，各座標間の微分関係は (5.3.56) に基づくと，

$$\frac{\partial x_M}{\partial \phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x_M} = \frac{\partial y_M}{\partial \lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial y_M} = 0, \quad \frac{\partial x_M}{\partial \lambda} = a, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_M} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial y_M}{\partial \phi} = \frac{a}{\cos \phi},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_M} = 2 \left[\exp \left(\frac{2y_M}{a} \right) \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) + 1 \right]^{-1} \frac{1}{a} \exp \left(\frac{y_M}{a} \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) = \frac{\cos \phi}{a} = \left(\frac{\partial y_M}{\partial \phi} \right)^{-1}$$

という関係が得られる^{*22}．ここで，メルカトル投影面上でのデカルト座標を (x_M, y_M) とした．地図投影面座標でのスケール因子 h_x, h_y は (5.3.77) に (5.3.56) を代入すると，

$$h_x = \cos \phi, \quad h_y = a \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial y_M} \right)^2} = a \sqrt{\left(\frac{\partial y_M}{\partial \phi} \right)^{-2}}.$$

^{*22}三角関数の微分の関係として以下を用いた．

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d}{dx} [\ln(\tan x)] = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}.$$

また，(5.3.56) 式より

$$\tan \left(\frac{y_M}{a} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right)$$

を用いた．

緯度経度座標の関係式を (5.3.78) に代入すると, (x, y) が (x_M, y_M) に, u, v が u_M, v_M に置き換えられるので, 上で得た 3 つの式を用いると,

$$\begin{aligned} u_M &= \frac{u_\lambda}{a \cos \phi} h_x \frac{\partial x_M}{\partial \lambda} = u_\lambda, \\ v_M &= \frac{v_\phi}{a} h_y \frac{\partial y_M}{\partial \phi} = v_\phi, \\ u_\lambda &= \frac{u_M}{a \cos \phi} h_x \frac{\partial x_M}{\partial \lambda} = u_M, \\ v_\phi &= \frac{v_M}{a} h_y \frac{\partial y_M}{\partial \phi} = v_M \end{aligned} \tag{5.3.79}$$

となる. これらの関係式がメルカトル投影されたデカルト座標系と緯度経度座標系との間でのベクトル成分の関係規則である.

ランベルト正角円錐図法

緯度経度座標でのベクトル成分 (u_λ, v_ϕ) をランベルト投影したときの投影面上でのベクトル成分 (u_L, v_L) の関係を求める. まず, 各座標間の微分関係は (5.3.72), (5.3.73), (5.3.74) に基づくと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_L}{\partial \phi} &= -a \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)], \\ \frac{\partial y_L}{\partial \lambda} &= a \cos \phi_1 \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)], \\ \frac{\partial x_L}{\partial \lambda} &= a \cos \phi_1 \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)], \\ \frac{\partial y_L}{\partial \phi} &= a \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)], \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y_L} &= \frac{1}{a \cos \phi_1} \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_1)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)], \\ \frac{\partial \phi}{\partial y_L} &= \frac{\cos \phi}{a \cos \phi_1} \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_1)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)], \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_L} &= \frac{1}{a \cos \phi_1} \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_1)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)], \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_L} &= -\frac{\cos \phi}{a \cos \phi_1} \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_1)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)]. \end{aligned} \tag{5.3.80}$$

ここで、ランベルト投影面上でのデカルト座標を (x_L, y_L) とした。また、下 4 つの式は右辺が x_L, y_L で表記されるが、それを (5.3.72) 式を用いて λ, ϕ に置き直してある^{*23}。地図投影面座標でのスケール因子 h_x, h_y は (5.3.77) から与えられる。緯度経度座標の関係を (5.3.78) に代入すると、 (x, y) が (x_L, y_L) に、 u, v が u_L, v_L に置き換えられるので、地図投影面座標上でのスケール因子が (5.3.77) であることを用いて、上で得たランベルト投影座標と緯度経度座標の微分と (5.3.77) 式を用いて、(5.3.78) は

$$\begin{aligned} u_L &= \frac{u_\lambda}{\cos \phi} \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_L} \right)^2} \frac{\partial x_L}{\partial \lambda} + v_\phi \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_L} \right)^2} \frac{\partial x_L}{\partial \phi} \\ v_L &= \frac{u_\lambda}{\cos \phi} \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_L} \right)^2} \frac{\partial y_L}{\partial \lambda} + v_\phi \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_L} \right)^2} \frac{\partial y_L}{\partial \phi} \\ u_\lambda &= \frac{u_L}{\cos \phi} \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_L} \right)^2} \frac{\partial x_L}{\partial \lambda} + \frac{v_L}{\cos \phi} \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_L} \right)^2} \frac{\partial y_L}{\partial \lambda} \\ v_\phi &= u_L \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_L} \right)^2} \frac{\partial x_L}{\partial \phi} + v_L \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_L} \right)^2} \frac{\partial y_L}{\partial \phi} \end{aligned}$$

となる。上記の空間微分に (5.3.80) を代入すると、

$$\begin{aligned} u_L &= u_\lambda \cos [n(\lambda - \lambda_0)] - v_\phi \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v_L &= u_\lambda \sin [n(\lambda - \lambda_0)] + v_\phi \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\ u_\lambda &= u_L \cos [n(\lambda - \lambda_0)] + v_L \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v_\phi &= -u_L \sin [n(\lambda - \lambda_0)] + v_L \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \end{aligned} \tag{5.3.81}$$

^{*23} 上 4 つの式に関しては、 $U(\phi)$ の微分が

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{-n}}{\partial \phi} &= -nU^{-n} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \phi} = -nU^{-n} \frac{1}{U} \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^{-2} \\ &= -nU^{-n} \left[2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^{-1} = -nU^{-n} [\cos \phi]^{-1} \end{aligned}$$

となることを、さらに下 4 つの式に関しては、 $f(x, y) = -x/(y - w'_0)$ としたとき、

$$\frac{d}{dx} \arctan f = \frac{1}{f^2 + 1} \frac{df}{dx} = \frac{-f/x}{f^2 + 1}, \quad \frac{d}{dy} \arctan f = \frac{1}{f^2 + 1} \frac{df}{dy} = \frac{f^2/x}{f^2 + 1},$$

また $g(x, y) = \alpha [\beta \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-1/2}]^{1/n}$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arctan g &= \frac{1}{g^2 + 1} \frac{dg}{dx} = \frac{1}{g^2 + 1} \frac{\alpha}{n} [\beta \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-1/2}]^{1/n-1} \beta \left(-\frac{1}{2} 2x \right) \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-3/2} \\ &= -\frac{g}{g^2 + 1} \frac{x}{n} [\{x^2 + (y - w'_0)^2\}]^{-1}, \\ \frac{d}{dy} \arctan g &= \frac{1}{g^2 + 1} \frac{dg}{dy} = \frac{1}{g^2 + 1} \frac{\alpha}{n} [\beta \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-1/2}]^{1/n-1} \beta \left(-\frac{1}{2} 2(y - w'_0) \right) \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-3/2} \\ &= -\frac{g}{g^2 + 1} \frac{y - w'_0}{n} [\{x^2 + (y - w'_0)^2\}]^{-1} \end{aligned}$$

となることを用いた。

これらの関係式がランベルト投影されたデカルト座標系と緯度経度座標系との間でのベクトル成分の関係規則である。

5.3.5 線分の交差判定

直交直線座標系 (x, y) 上で定義される点 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ を結ぶ線分 AB と点 $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$ を結ぶ線分 CD の交差判定を行う。この 2 本の線分が交差することは、ベクトル \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{CD} が交点をもつということである。もし 2 本の線分が交差していれば、この交点はベクトル \overrightarrow{AB} の s 倍 ($0 < s < 1$) かつ、 \overrightarrow{CD} の t 倍 ($0 < t < 1$) した点となる。すなわち、

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{bmatrix}, \quad (0 < s < 1, 0 < t < 1).$$

これを s, t について解くと、

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = |F|^{-1} \begin{bmatrix} -(y_D - y_C) & x_D - x_C \\ -(y_B - y_A) & x_B - x_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{bmatrix}. \quad (5.3.82)$$

ただし、

$$|F| = -(x_B - x_A)(y_D - y_C) + (y_B - y_A)(x_D - x_C).$$

$0 < s$ かつ $0 < t$ なので、(5.3.82) から

$$0 < s = |F|^{-1} [-(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A)], \quad (5.3.83)$$

$$0 < t = |F|^{-1} [-(y_B - y_A)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A)]. \quad (5.3.84)$$

$|F|$ は正負どちらの場合もとりうるので、上の 2 式について、両辺 $|F|^2$ を乗すると符号を変えないことなく、

$$0 < |F| [-(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A)] (\equiv s_1), \quad (5.3.85)$$

$$0 < |F| [-(y_B - y_A)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A)] (\equiv t_1). \quad (5.3.86)$$

同様に、 $s < 1$ かつ $t < 1$ なので、(5.3.82) から

$$s = |F|^{-1} [-(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A)] < 1, \quad (5.3.87)$$

$$t = |F|^{-1} [-(y_B - y_A)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A)] < 1. \quad (5.3.88)$$

上式を整理して、

$$|F|^{-1} [-(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A) - |F|] < 0,$$

$$|F|^{-1} [-(y_B - y_A)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A) - |F|] < 0$$

とすれば、先と同様に符号を変えずに両辺 $|F|^2$ して、

$$|F| [-(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A) - |F|] (\equiv s_2) < 0, \quad (5.3.89)$$

$$|F| [-(y_B - y_A)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A) - |F|] (\equiv t_2) < 0. \quad (5.3.90)$$

s が一意の値をもち、 $0 < s < 1$ を満たすには $0 < s_1$ かつ $s_2 < 0$ を同時に満たさなければならない。すなわち、

$$s_1 s_2 < 0 \quad (5.3.91)$$

が満たされると、 $0 < s < 1$ が満たされたことになる^{*24}。同様に $0 < t < 1$ を満たすには、

$$t_1 t_2 < 0 \quad (5.3.92)$$

でなければならない。これらを具体的な x, y 座標で表現すると、

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= |F|^2 [-(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A)] \\ &\quad \times [-(y_D - y_C)(x_C - x_B) + (x_D - x_C)(y_C - y_B)] < 0, \\ t_1 t_2 &= |F|^2 [-(y_B - y_A)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A)] \\ &\quad \times [-(y_B - y_A)(x_D - x_A) + (x_B - x_A)(y_D - y_A)] < 0. \end{aligned}$$

$|F|^2$ は正なので、2 線分 AB, CD が交差するための条件は

$$\begin{aligned} & [-(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A)] \\ & \times [-(y_D - y_C)(x_C - x_B) + (x_D - x_C)(y_C - y_B)] < 0, \end{aligned} \quad (5.3.93)$$

$$\begin{aligned} & [-(y_B - y_A)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A)] \\ & \times [-(y_B - y_A)(x_D - x_A) + (x_B - x_A)(y_D - y_A)] < 0 \end{aligned} \quad (5.3.94)$$

が同時に満たされることである。

5.3.6 三角形の内外判定

直交直線座標系 (x, y) 上の任意の点 $P(x_P, y_P)$ について、3 点 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ を頂点とする三角形の内外判定を考える。三角形は必ず領域内に重心 $G(x_G, y_G)$

^{*24}ここで、(5.3.91) は $0 > s_1$ かつ $s_2 > 0$ を同時に満たす場合でも満たされる。しかし、これは $0 < s$ かつ $s < 0$ となるので矛盾する。また 2 つのベクトルが (部分的な重なりを一切せずに) 平行の場合、 $s_1 = s_2$ となり異符号を持たない ($s_1 s_2 < 0$ とならない)。これは

$$\begin{aligned} s_1 &= |F| [-(y_D - y_C)(x_C - x_A) + (x_D - x_C)(y_C - y_A)] = |F| (\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AC}) \\ s_2 &= |F| [-(y_D - y_C)(x_C - x_B) + (x_D - x_C)(y_C - y_B)] = |F| (\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{BC}) \end{aligned}$$

から

$$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{BC}$$

であることから明らかである (平行条件から、 $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AB} = 0$)。最後に 2 ベクトルが平行でかつ、部分的な重なりをもつ場合、($\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{BC} = 0$) なので、 $s_1 s_2 = 0$ となり交差条件を満たさない。以上から、(5.3.91) を満たすだけで $0 < s < 1$ であることが判別できる。

をもつ^{*25}。したがって、三角形のいずれかの辺と線分 GP が交差していれば、点 P は三角形の外側に存在することになる。よって、2 線分の交差判定 (5.3.93), (5.3.94) を用いて、AB と GP の判定は

$$\begin{aligned} & [-(y_P - y_G)(x_G - x_A) + (x_P - x_G)(y_G - y_A)] \\ & \times [-(y_P - y_G)(x_G - x_B) + (x_P - x_G)(y_G - y_B)] < 0, \end{aligned} \quad (5.3.95)$$

$$\begin{aligned} & [-(y_B - y_A)(x_G - x_A) + (x_B - x_A)(y_G - y_A)] \\ & \times [-(y_B - y_A)(x_P - x_A) + (x_B - x_A)(y_P - y_A)] < 0. \end{aligned} \quad (5.3.96)$$

同様に、BC と GP の判定は

$$\begin{aligned} & [-(y_P - y_G)(x_G - x_B) + (x_P - x_G)(y_G - y_B)] \\ & \times [-(y_P - y_G)(x_G - x_C) + (x_P - x_G)(y_G - y_C)] < 0, \end{aligned} \quad (5.3.97)$$

$$\begin{aligned} & [-(y_C - y_B)(x_G - x_B) + (x_C - x_B)(y_G - y_B)] \\ & \times [-(y_C - y_B)(x_P - x_B) + (x_C - x_B)(y_P - y_B)] < 0. \end{aligned} \quad (5.3.98)$$

同様に、CA と GP の判定は

$$\begin{aligned} & [-(y_P - y_G)(x_G - x_C) + (x_P - x_G)(y_G - y_C)] \\ & \times [-(y_P - y_G)(x_G - x_A) + (x_P - x_G)(y_G - y_A)] < 0, \end{aligned} \quad (5.3.99)$$

$$\begin{aligned} & [-(y_C - y_B)(x_G - x_B) + (x_C - x_B)(y_G - y_B)] \\ & \times [-(y_C - y_B)(x_P - x_B) + (x_C - x_B)(y_P - y_B)] < 0. \end{aligned} \quad (5.3.100)$$

これら 3 つの判定でいずれも交差していなければ、点 P は三角形内に含まれる点である。なお、G の座標は三角形の頂点から

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

5.3.7 大円回転による円筒座標から球面座標の変換

球面上の経度緯度をそれぞれ (λ, ϕ) とすると、球の中心を原点とするデカルト座標系 $(x, y, z, O-xyz$ 系と表記) との関係は球の半径 (可変) を ρ として、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \phi \\ \sin \lambda \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (5.3.101)$$

一方、 (λ_c, ϕ_c) を原点とする局所円筒座標 (r, θ, ζ) を考える。この座標は図??で示されるように、球の極を上から見たときの経度 (Λ) と余緯度 (Φ) と以下のように関係付けられる:

$$r = \rho \sin \Phi, \quad \theta = \Lambda. \quad (5.3.102)$$

^{*25}ここでは基準を重心としたが、三角形の頂点座標から求められる、内部に含まれていることが明らかかな点であれば他のパラメータでも構わない。例えば内接円の中心 (内心) など。

この局所円筒座標も球の中心を原点とするデカルト座標 $(x_c, y_c, z_c, O-x_c y_c z_c$ 系と表記) と以下の関係をもつ:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \Lambda \sin \Phi \\ \sin \Lambda \sin \Phi \\ \cos \Phi \end{bmatrix}. \quad (5.3.103)$$

図??で示されるように, $O-xyz$ 系と $O-x_c y_c z_c$ 系は緯度経度について回転させた関係になっている. 具体的には, $O-x_c y_c z_c$ 座標を x_c 軸右回りに $\pi/2 - \phi_c$ だけ回転し, z_c 軸左回りに $3\pi/2 - \lambda_c$ だけ回転したものとなる. $O-x_c y_c z_c$ 系の座標 (x_{cp}, y_{cp}, z_{cp}) で表される点 P は $O-xyz$ 系の座標 (x_p, y_p, z_p) では

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = R_{z_c}(3\pi/2 - \lambda_c) R_{x_c}(-\pi/2 + \phi_c) \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \\ z_{cp} \end{bmatrix}. \quad (5.3.104)$$

$R_\alpha(\beta)$ は α 軸左回りに角度 β だけ回転させる作用である^{*26}. 具体的に行列の形で記載すると, (5.3.104) 式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(3\pi/2 - \lambda_c) & \sin(3\pi/2 - \lambda_c) & 0 \\ -\sin(3\pi/2 - \lambda_c) & \cos(3\pi/2 - \lambda_c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_c - \pi/2) & \sin(\phi_c - \pi/2) \\ 0 & -\sin(\phi_c - \pi/2) & \cos(\phi_c - \pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \\ z_{cp} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & -\cos \lambda_c & 0 \\ \cos \lambda_c & -\sin \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi_c & -\cos \phi_c \\ 0 & \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \\ z_{cp} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & -\cos \lambda_c \sin \phi_c & \cos \lambda_c \cos \phi_c \\ \cos \lambda_c & -\sin \lambda_c \sin \phi_c & \sin \lambda_c \cos \phi_c \\ 0 & \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \\ z_{cp} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3.105)$$

(x_p, y_p, z_p) は (5.3.101) 式, (x_{cp}, y_{cp}, z_{cp}) は (5.3.103) 式で表現できるので, (5.3.105) 式は

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \phi \\ \sin \lambda \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & -\cos \lambda_c \sin \phi_c & \cos \lambda_c \cos \phi_c \\ \cos \lambda_c & -\sin \lambda_c \sin \phi_c & \sin \lambda_c \cos \phi_c \\ 0 & \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Lambda \sin \Phi \\ \sin \Lambda \sin \Phi \\ \cos \Phi \end{bmatrix}, \quad (5.3.106)$$

あるいは, (5.3.102) 式を用いて,

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \phi \\ \sin \lambda \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & -\cos \lambda_c \sin \phi_c & \cos \lambda_c \cos \phi_c \\ \cos \lambda_c & -\sin \lambda_c \sin \phi_c & \sin \lambda_c \cos \phi_c \\ 0 & \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (r/\rho) \cos \theta \\ (r/\rho) \sin \theta \\ \sqrt{1 - (r/\rho)^2} \end{bmatrix}. \quad (5.3.107)$$

^{*26}この R は一般的な回転行列 (角度 θ だけ左回りに回転させる操作) と逆向きであることを注意する. 回転行列はある点 A を座標の原点を中心に回転させて点 A' に移す操作である. 今回は座標自体が回転しており, 標的の点は回転しない状況を考えている. 点が移動せずに座標が左回りに回転する操作は, 回転後の座標で見ると点を右回りに回転させる操作となるので, 回転行列で表すと, 角度 θ だけの左回り座標回転は $R(-\theta)$ で表現される.

(5.3.107) 式から

$$\phi = \arcsin \left[\frac{r}{\rho} \cos \phi_c \sin \theta + \sin \phi_c \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \right], \quad (5.3.108)$$

$$\lambda = \arcsin \left\{ \frac{1}{\cos \phi} \left[\frac{r}{\rho} (\cos \lambda_c \cos \theta - \sin \lambda_c \sin \phi_c \sin \theta) + \sin \lambda_c \cos \phi_c \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \right] \right\}, \quad (5.3.109)$$

$$\lambda = \arccos \left\{ \frac{1}{\cos \phi} \left[\frac{r}{\rho} (-\sin \lambda_c \cos \theta - \cos \lambda_c \sin \phi_c \sin \theta) + \cos \lambda_c \cos \phi_c \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \right] \right\}. \quad (5.3.110)$$

λ の決定には 2 つの評価式を用いる. 逆に, (5.3.105) 式 of 回転作用行列の逆行列を両辺にかけた

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi_c & \cos \phi_c \\ 0 & -\cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c & 0 \\ -\cos \lambda_c & -\sin \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \\ z_{cp} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c & 0 \\ -\cos \lambda_c \sin \phi_c & -\sin \lambda_c \sin \phi_c & \cos \phi_c \\ \cos \lambda_c \cos \phi_c & \sin \lambda_c \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \\ z_{cp} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c & 0 \\ -\cos \lambda_c \sin \phi_c & -\sin \lambda_c \sin \phi_c & \cos \phi_c \\ \cos \lambda_c \cos \phi_c & \sin \lambda_c \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \phi \\ \sin \lambda \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r/\rho) \cos \theta \\ (r/\rho) \sin \theta \\ \sqrt{1 - (r/\rho)^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3.111)$$

よって, (5.3.111) 式の第 1, 2 行から

$$\begin{aligned} & \frac{-\cos \lambda_c \sin \phi_c \cos \lambda \cos \phi - \sin \lambda_c \sin \phi_c \sin \lambda \cos \phi + \cos \phi_c \sin \phi}{-\sin \lambda_c \cos \lambda \cos \phi + \cos \lambda_c \sin \lambda \cos \phi} = \tan \theta \\ \Rightarrow & \frac{-\cos (\lambda - \lambda_c) \sin \phi_c \cos \phi + \cos \phi_c \sin \phi}{\sin (\lambda - \lambda_c) \cos \phi} = \tan \theta \\ \Rightarrow & \theta = \arctan \left[\frac{\cos \phi_c \sin \phi - \cos (\lambda - \lambda_c) \sin \phi_c \cos \phi}{\sin (\lambda - \lambda_c) \cos \phi} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.112)$$

同様に, (5.3.111) 式の第 3 行から

$$\begin{aligned} & \cos \lambda_c \cos \phi_c \cos \lambda \cos \phi + \sin \lambda_c \cos \phi_c \sin \lambda \cos \phi + \sin \phi_c \sin \phi = \sqrt{1 - (r/\rho)^2} \\ \Rightarrow & \cos (\lambda - \lambda_c) \cos \phi_c \cos \phi + \sin \phi_c \sin \phi = \sqrt{1 - (r/\rho)^2} \\ \Rightarrow & [\cos (\lambda - \lambda_c) \cos \phi_c \cos \phi + \sin \phi_c \sin \phi]^2 = 1 - (r/\rho)^2 \\ \Rightarrow & (r/\rho)^2 = 1 - [\cos (\lambda - \lambda_c) \cos \phi_c \cos \phi + \sin \phi_c \sin \phi]^2 \\ \Rightarrow & r = \rho \sqrt{1 - [\cos (\lambda - \lambda_c) \cos \phi_c \cos \phi + \sin \phi_c \sin \phi]^2}. \end{aligned} \quad (5.3.113)$$

次にベクトルの座標変換を考える。任意のベクトル \mathbf{A} を $O-xyz$ 系の基底ベクトル $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ で表記すると,

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z \quad (5.3.114)$$

となる。ここで, u, v, w はそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 方向のベクトル成分である。同じベクトルを $O-x_c y_c z_c$ 系の基底ベクトル $(\mathbf{e}_{x_c}, \mathbf{e}_{y_c}, \mathbf{e}_{z_c})$ で表記すると,

$$\mathbf{v} = u_c \mathbf{e}_{x_c} + v_c \mathbf{e}_{y_c} + w_c \mathbf{e}_{z_c}. \quad (5.3.115)$$

先と同様に u_c, v_c, w_c は $O-x_c y_c z_c$ 系での各成分である。さらに, $O-xyz$ 系の \mathbf{e}_z ベクトルを極にもつ球座標系 (λ, ϕ, ρ) での基底を $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\rho)$ とすると, ベクトル \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = u_\lambda \mathbf{e}_\lambda + v_\phi \mathbf{e}_\phi + w_\rho \mathbf{e}_\rho. \quad (5.3.116)$$

最後に, $O-x_c y_c z_c$ 系の \mathbf{e}_{z_c} ベクトルを極にもつ球座標系 (Λ, Φ, R) でのベクトル \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = u_\Lambda \mathbf{e}_\Lambda + v_\Phi \mathbf{e}_\Phi + w_R \mathbf{e}_R. \quad (5.3.117)$$

図??で示されるように, $O-x_c y_c z_c$ の基底ベクトルは $O-xyz$ 系から \mathbf{e}_z について左回りに $\lambda_c + \pi/2$ だけ回転させ, その後 \mathbf{e}_x 左回りに $\pi/2 - \phi_c$ 回転させると, $(\mathbf{e}_{x_c}, \mathbf{e}_{y_c}, \mathbf{e}_{z_c})$ に一致する。すなわち,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_c} \\ \mathbf{e}_{y_c} \\ \mathbf{e}_{z_c} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2 - \phi_c) & \sin(\pi/2 - \phi_c) \\ 0 & -\sin(\pi/2 - \phi_c) & \cos(\pi/2 - \phi_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + \lambda_c) & \sin(\pi/2 + \lambda_c) & 0 \\ -\sin(\pi/2 + \lambda_c) & \cos(\pi/2 + \lambda_c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi_c & \cos \phi_c \\ 0 & -\cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c & 0 \\ -\cos \lambda_c & -\sin \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c & 0 \\ -\sin \phi_c \cos \lambda_c & -\sin \phi_c \sin \lambda_c & \cos \phi_c \\ \cos \phi_c \cos \lambda_c & \cos \phi_c \sin \lambda_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}. \quad (5.3.118) \end{aligned}$$

さらに, $O-xyz$ 系の \mathbf{e}_z を極とする球座標系の基底ベクトル $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\rho)$ は基底ベクトルの定義から

$$\mathbf{e}_\rho \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \Big/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right|, \quad \mathbf{e}_\phi \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \Big/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right|, \quad \mathbf{e}_\lambda \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \Big/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right| \quad (5.3.119)$$

なので, 位置ベクトルの定義 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ と (5.3.101) 式を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} &= \cos \lambda \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \lambda \cos \phi \mathbf{e}_y + \sin \phi \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= \rho [-\cos \lambda \sin \phi \mathbf{e}_x - \sin \lambda \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \phi \mathbf{e}_z], \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} &= \rho [-\sin \lambda \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \lambda \cos \phi \mathbf{e}_y]. \end{aligned} \quad (5.3.120)$$

よって, (5.3.119) 式は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}. \quad (5.3.121)$$

同様にして, $O-x_c y_c z_c$ 系の基底と \mathbf{e}_{z_c} を極にした球座標系の基底は, 位置ベクトルの定義 $\mathbf{r} = x_c \mathbf{e}_{x_c} + y_c \mathbf{e}_{y_c} + z_c \mathbf{e}_{z_c}$ と (5.3.103) 式を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} &= \cos \Lambda \sin \Phi \mathbf{e}_{x_c} + \sin \Lambda \sin \Phi \mathbf{e}_{y_c} + \cos \Phi \mathbf{e}_{z_c}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi} &= \rho [\cos \Lambda \cos \Phi \mathbf{e}_{x_c} + \sin \Lambda \cos \Phi \mathbf{e}_{y_c} - \sin \Phi \mathbf{e}_{z_c}], \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Lambda} &= \rho [-\sin \Lambda \sin \Phi \mathbf{e}_{x_c} + \cos \Lambda \sin \Phi \mathbf{e}_{y_c}]. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_\Phi \\ \mathbf{e}_\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \Phi \cos \Lambda & \sin \Phi \sin \Lambda & \cos \Phi \\ \cos \Phi \cos \Lambda & \cos \Phi \sin \Lambda & -\sin \Phi \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_c} \\ \mathbf{e}_{y_c} \\ \mathbf{e}_{z_c} \end{bmatrix}. \quad (5.3.122)$$

よって, (5.3.117) 式は (5.3.122) 式を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= u_\Lambda [-\sin \Lambda \mathbf{e}_{x_c} + \cos \Lambda \mathbf{e}_{y_c}] \\ &\quad + v_\Phi [\cos \Phi \cos \Lambda \mathbf{e}_{x_c} + \cos \Phi \sin \Lambda \mathbf{e}_{y_c} - \sin \Phi \mathbf{e}_{z_c}] \\ &\quad + w_R [\sin \Phi \cos \Lambda \mathbf{e}_{x_c} + \sin \Phi \sin \Lambda \mathbf{e}_{y_c} + \cos \Phi \mathbf{e}_{z_c}] \\ &= [-u_\Lambda \sin \Lambda + v_\Phi \cos \Phi \cos \Lambda + w_R \sin \Phi \cos \Lambda] \mathbf{e}_{x_c} \\ &\quad + [u_\Lambda \cos \Lambda + v_\Phi \cos \Phi \sin \Lambda + w_R \sin \Phi \sin \Lambda] \mathbf{e}_{y_c} \\ &\quad + [-v_\Phi \sin \Phi + w_R \cos \Phi] \mathbf{e}_{z_c}. \end{aligned}$$

さらに, (5.3.118) 式を用いると,

$$\begin{aligned} &= [-u_\Lambda \sin \Lambda + v_\Phi \cos \Phi \cos \Lambda + w_R \sin \Phi \cos \Lambda] [-\sin \lambda_c \mathbf{e}_x + \cos \lambda_c \mathbf{e}_y] \\ &\quad + [u_\Lambda \cos \Lambda + v_\Phi \cos \Phi \sin \Lambda + w_R \sin \Phi \sin \Lambda] [-\sin \phi_c \cos \lambda_c \mathbf{e}_x - \sin \phi_c \sin \lambda_c \mathbf{e}_y + \cos \phi_c \mathbf{e}_z] \\ &\quad + [-v_\Phi \sin \Phi + w_R \cos \Phi] [\cos \phi_c \cos \lambda_c \mathbf{e}_x + \cos \phi_c \sin \lambda_c \mathbf{e}_y + \sin \phi_c \mathbf{e}_z] \\ &= \{u_\Lambda (\sin \Lambda \sin \lambda_c - \cos \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c) \\ &\quad - v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \sin \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \\ &\quad + w_R (-\sin \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c)\} \mathbf{e}_x \\ &\quad + \{-u_\Lambda (\sin \Lambda \cos \lambda_c + \cos \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c) \\ &\quad + v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c - \sin \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \\ &\quad + w_R (\sin \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c)\} \mathbf{e}_y \\ &\quad + \{u_\Lambda \cos \Lambda \cos \phi_c - v_\Phi (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c) \\ &\quad + w_R (\sin \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c)\} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.3.123)$$

$$\equiv U \mathbf{e}_x + V \mathbf{e}_y + W \mathbf{e}_z \quad (5.3.124)$$

一方で, (5.3.116) 式は (5.3.121) 式を用いて,

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{v} &= u_\lambda [-\sin \lambda \boldsymbol{e}_x + \cos \lambda \boldsymbol{e}_y] \\
 &\quad + v_\phi [-\sin \phi \cos \lambda \boldsymbol{e}_x - \sin \phi \sin \lambda \boldsymbol{e}_y + \cos \phi \boldsymbol{e}_z] \\
 &\quad + w_\rho [\cos \phi \cos \lambda \boldsymbol{e}_x + \cos \phi \sin \lambda \boldsymbol{e}_y + \sin \phi \boldsymbol{e}_z] \\
 &= [-u_\lambda \sin \lambda - v_\phi \sin \phi \cos \lambda + w_\rho \cos \phi \cos \lambda] \boldsymbol{e}_x \\
 &\quad + [u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda] \boldsymbol{e}_y \\
 &\quad + [v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi] \boldsymbol{e}_z.
 \end{aligned} \tag{5.3.125}$$

(5.3.124) 式と (5.3.125) 式から, 各基底ベクトルの成分には

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \sin \lambda \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\lambda \\ v_\phi \\ w_\rho \end{bmatrix} \tag{5.3.126}$$

という関係が存在する. ここで, n 次正方行列 A (i, j 成分を a_{ij}) の逆行列 A^{-1} は行列式 $|A|$ と余因子行列 $\text{adj}(A)$ を用いて,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$\text{adj}(A) \equiv (\Delta_{ij})^T = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

このとき, Δ_{ij} は a_{ij} の余因子である. (5.3.126) 式右辺の 3 次正方行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \sin \lambda \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{vmatrix} = -\cos \phi \begin{vmatrix} -\sin \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda \end{vmatrix} + \sin \phi \begin{vmatrix} -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda \end{vmatrix} = 1$$

であるので, これらを用いると (5.3.126) 式は

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_\lambda \\ v_\phi \\ w_\rho \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \sin \lambda \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{cc} -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \sin \lambda \\ \cos \phi & \sin \phi \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda \\ 0 & \sin \phi \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda \\ 0 & \cos \phi \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} -\sin \phi \cos \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi & \sin \phi \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} -\sin \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ 0 & \sin \phi \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda \\ 0 & \cos \phi \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} -\sin \phi \cos \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \sin \lambda \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} -\sin \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda \end{array} \right| \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \phi & \cos \lambda \cos \phi \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \phi & \sin \lambda \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda \sin \phi & -\sin \lambda \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \lambda \cos \phi & \sin \lambda \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -U \sin \lambda + V \cos \lambda \\ -U \cos \lambda \sin \phi - V \sin \lambda \sin \phi + W \cos \phi \\ U \cos \lambda \cos \phi + V \sin \lambda \cos \phi + W \sin \phi \end{bmatrix}. \tag{5.3.127}
\end{aligned}$$

具体的な U, V, W は (5.3.123) 式から与えられ, (5.3.127) 式が台風に伴う円筒座標での速

度成分と球座標系での速度成分の変換式である:

$$\begin{aligned}
u_\lambda &= -\{u_A (\sin \Lambda \sin \lambda_c - \cos \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c) \\
&\quad - v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \sin \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \\
&\quad + w_R (-\sin \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c)\} \sin \lambda \\
&\quad + \{-u_A (\sin \Lambda \cos \lambda_c + \cos \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c) \\
&\quad + v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c - \sin \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \\
&\quad + w_R (\sin \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c)\} \cos \lambda \\
&= -u_A (\sin \Lambda \sin \lambda_c - \cos \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c) \sin \lambda \\
&\quad - u_A (\sin \Lambda \cos \lambda_c + \cos \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c) \cos \lambda \\
&\quad + v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \sin \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \sin \lambda \\
&\quad + v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c - \sin \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \cos \lambda \\
&\quad - w_R (-\sin \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \sin \lambda \\
&\quad + w_R (\sin \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \cos \lambda \\
&= -u_A [\sin \Lambda (\sin \lambda_c \sin \lambda + \cos \lambda_c \cos \lambda) + \cos \Lambda \sin \phi_c (\sin \lambda_c \cos \lambda - \cos \lambda_c \sin \lambda)] \\
&\quad + v_\Phi [\cos \Phi \cos \Lambda (\sin \lambda_c \sin \lambda + \cos \lambda_c \cos \lambda) + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c (\cos \lambda_c \sin \lambda - \sin \lambda_c \cos \lambda) \\
&\quad \quad + \sin \Phi \cos \phi_c (\cos \lambda_c \sin \lambda - \sin \lambda_c \cos \lambda)] \\
&\quad - w_R [-\sin \Phi \cos \Lambda (\sin \lambda_c \sin \lambda + \cos \lambda_c \cos \lambda) + \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c (\sin \lambda_c \cos \lambda - \cos \lambda_c \sin \lambda) \\
&\quad \quad + \cos \Phi \cos \phi_c (\cos \lambda_c \sin \lambda - \sin \lambda_c \cos \lambda)].
\end{aligned}$$

(5.3.102) 式を用いて具体的に記述すると,

$$\begin{aligned}
&= -v_\theta [\sin \theta \cos (\lambda - \lambda_c) - \cos \theta \sin \phi_c \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad + u_r [\cos \Phi \cos \theta \cos (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \sin \theta \sin \phi_c + \sin \Phi \cos \phi_c) \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad - w_R [-\sin \Phi \cos \theta \cos (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \cos \phi_c - \sin \Phi \sin \theta \sin \phi_c) \sin (\lambda - \lambda_c)],
\end{aligned} \tag{5.3.128}$$

$$\begin{aligned}
v_\phi = & - \{u_\Lambda (\sin \Lambda \sin \lambda_c - \cos \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c) \\
& - v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \sin \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \\
& + w_R (-\sin \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c)\} \cos \lambda \sin \phi \\
& - \{-u_\Lambda (\sin \Lambda \cos \lambda_c + \cos \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c) \\
& + v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c - \sin \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \\
& + w_R (\sin \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c)\} \sin \lambda \sin \phi \\
& + \{u_\Lambda \cos \Lambda \cos \phi_c - v_\Phi (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c) \\
& + w_R (\sin \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c)\} \cos \phi \\
= & -u_\Lambda (\sin \Lambda \sin \lambda_c - \cos \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c) \cos \lambda \sin \phi \\
& + u_\Lambda (\sin \Lambda \cos \lambda_c + \cos \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c) \sin \lambda \sin \phi \\
& + u_\Lambda \cos \Lambda \cos \phi_c \cos \phi \\
& + v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \sin \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \cos \lambda \sin \phi \\
& - v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c - \sin \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \sin \lambda \sin \phi \\
& - v_\Phi (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c) \cos \phi \\
& - w_R (-\sin \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \cos \lambda \sin \phi \\
& - w_R (\sin \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \sin \lambda \sin \phi \\
& + w_R (\sin \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c) \cos \phi \\
= & u_\Lambda [\sin \Lambda \sin \phi (\cos \lambda_c \sin \lambda - \sin \lambda_c \cos \lambda) + \cos \Lambda \sin \phi_c \sin \phi (\sin \lambda_c \sin \lambda + \cos \lambda_c \cos \lambda) \\
& + \cos \Lambda \cos \phi_c \cos \phi] \\
& - v_\Phi [\cos \Phi \cos \Lambda \sin \phi (\cos \lambda_c \sin \lambda - \sin \lambda_c \cos \lambda) \\
& - \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \phi (\sin \lambda_c \sin \lambda + \cos \lambda_c \cos \lambda) \\
& - \sin \Phi \cos \phi_c \sin \phi (\sin \lambda_c \sin \lambda + \cos \lambda_c \cos \lambda) \\
& + \sin \Phi \sin \phi_c \cos \phi - \cos \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c \cos \phi] \\
& - w_R [\sin \Phi \cos \Lambda \sin \phi (\cos \lambda_c \sin \lambda - \sin \lambda_c \cos \lambda) \\
& - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \phi (\cos \lambda_c \cos \lambda + \sin \lambda_c \sin \lambda) \\
& + \cos \Phi \cos \phi_c \sin \phi (\cos \lambda_c \cos \lambda + \sin \lambda_c \sin \lambda)] \\
& + w_R (\sin \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c) \cos \phi \\
= & v_\theta [\sin \theta \sin \phi \sin (\lambda - \lambda_c) + \cos \theta \sin \phi_c \sin \phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \theta \cos \phi_c \cos \phi] \\
& - u_r [\cos \Phi \cos \theta \sin \phi \sin (\lambda - \lambda_c) - (\cos \Phi \sin \theta \sin \phi_c + \sin \Phi \cos \phi_c) \sin \phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
& + (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \theta \cos \phi_c) \cos \phi] \\
& - w_R [\sin \Phi \cos \theta \sin \phi \sin (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \cos \phi_c - \sin \Phi \sin \theta \sin \phi_c) \sin \phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
& - (\sin \Phi \sin \theta \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c) \cos \phi], \tag{5.3.129}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_\rho &= \{u_\Lambda (\sin \Lambda \sin \lambda_c - \cos \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c) \\
&\quad - v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \sin \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \\
&\quad + w_R (-\sin \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c)\} \cos \lambda \cos \phi \\
&+ \{-u_\Lambda (\sin \Lambda \cos \lambda_c + \cos \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c) \\
&\quad + v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c - \sin \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \\
&\quad + w_R (\sin \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c)\} \sin \lambda \cos \phi \\
&+ \{u_\Lambda \cos \Lambda \cos \phi_c \\
&\quad - v_\Phi (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c) \\
&\quad + w_R (\sin \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c)\} \sin \phi \\
&= u_\Lambda (\sin \Lambda \sin \lambda_c - \cos \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c) \cos \lambda \cos \phi \\
&\quad - u_\Lambda (\sin \Lambda \cos \lambda_c + \cos \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c) \sin \lambda \cos \phi \\
&\quad + u_\Lambda \cos \Lambda \cos \phi_c \sin \phi \\
&\quad - v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \sin \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \cos \lambda \cos \phi \\
&\quad + v_\Phi (\cos \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c - \sin \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \sin \lambda \cos \phi \\
&\quad - v_\Phi (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c) \sin \phi \\
&\quad + w_R (-\sin \Phi \cos \Lambda \sin \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \cos \lambda_c) \cos \lambda \cos \phi \\
&\quad + w_R (\sin \Phi \cos \Lambda \cos \lambda_c - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \sin \lambda_c + \cos \Phi \cos \phi_c \sin \lambda_c) \sin \lambda \cos \phi \\
&\quad + w_R (\sin \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c) \sin \phi \\
&= u_\Lambda [\sin \Lambda \cos \phi (\sin \lambda_c \cos \lambda - \cos \lambda_c \sin \lambda) - \cos \Lambda \sin \phi_c \cos \phi (\cos \lambda_c \cos \lambda + \sin \lambda_c \sin \lambda)] \\
&\quad + u_\Lambda \cos \Lambda \cos \phi_c \sin \phi \\
&\quad - v_\Phi [\cos \Phi \cos \Lambda \cos \phi (\sin \lambda_c \cos \lambda - \cos \lambda_c \sin \lambda) \\
&\quad\quad + \cos \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \phi (\cos \lambda_c \cos \lambda + \sin \lambda_c \sin \lambda) \\
&\quad\quad + \sin \Phi \cos \phi_c \cos \phi (\sin \lambda_c \sin \lambda + \cos \lambda_c \cos \lambda)] \\
&\quad - v_\Phi (\sin \Phi \sin \phi_c \sin \phi - \cos \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c \sin \phi) \\
&\quad + w_R [\sin \Phi \cos \Lambda \cos \phi (\cos \lambda_c \sin \lambda - \sin \lambda_c \cos \lambda) \\
&\quad\quad - \sin \Phi \sin \Lambda \sin \phi_c \cos \phi (\cos \lambda_c \cos \lambda + \sin \lambda_c \sin \lambda) \\
&\quad\quad + \cos \Phi \cos \phi_c \cos \phi (\cos \lambda_c \cos \lambda + \sin \lambda_c \sin \lambda)] \\
&\quad + w_R (\sin \Phi \sin \Lambda \cos \phi_c \sin \phi + \cos \Phi \sin \phi_c \sin \phi) \\
&= v_\theta [-\sin \theta \cos \phi \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \theta \sin \phi_c \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \theta \cos \phi_c \sin \phi] \\
&\quad - u_r [-\cos \Phi \cos \theta \cos \phi \sin (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \sin \theta \sin \phi_c + \sin \Phi \cos \phi_c) \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + (\sin \Phi \sin \phi_c - \cos \Phi \sin \theta \cos \phi_c) \sin \phi] \\
&\quad + w_R [\sin \Phi \cos \theta \cos \phi \sin (\lambda - \lambda_c) + (\cos \Phi \cos \phi_c - \sin \Phi \sin \theta \sin \phi_c) \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad\quad + (\sin \Phi \sin \theta \cos \phi_c + \cos \Phi \sin \phi_c) \sin \phi]. \tag{5.3.130}
\end{aligned}$$

逆変換は逆行列を作用させればよいが、計算が複雑となるため (5.3.125) 式から始める。

$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ を $(\mathbf{e}_{xc}, \mathbf{e}_{yc}, \mathbf{e}_{zc})$ に変換するには, (5.3.118) 式の逆行列を両辺に左から作用させればよいので,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & -\cos \lambda_c & 0 \\ \cos \lambda_c & -\sin \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi_c & -\cos \phi_c \\ 0 & \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xc} \\ \mathbf{e}_{yc} \\ \mathbf{e}_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & -\cos \lambda_c & 0 \\ \cos \lambda_c & -\sin \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi_c & -\cos \phi_c \\ 0 & \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xc} \\ \mathbf{e}_{yc} \\ \mathbf{e}_{zc} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_c & -\cos \lambda_c \sin \phi_c & \cos \lambda_c \cos \phi_c \\ \cos \lambda_c & -\sin \lambda_c \sin \phi_c & \sin \lambda_c \cos \phi_c \\ 0 & \cos \phi_c & \sin \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xc} \\ \mathbf{e}_{yc} \\ \mathbf{e}_{zc} \end{bmatrix} \quad (5.3.131) \end{aligned}$$

よって, (5.3.125) 式は

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [-u_\lambda \sin \lambda - v_\phi \sin \phi \cos \lambda + w_\rho \cos \phi \cos \lambda] (-\sin \lambda_c \mathbf{e}_{xc} - \cos \lambda_c \sin \phi_c \mathbf{e}_{yc} + \cos \lambda_c \cos \phi_c \mathbf{e}_{zc}) \\ &+ [u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda] (\cos \lambda_c \mathbf{e}_{xc} - \sin \lambda_c \sin \phi_c \mathbf{e}_{yc} + \sin \lambda_c \cos \phi_c \mathbf{e}_{zc}) \\ &+ [v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi] (\cos \phi_c \mathbf{e}_{yc} + \sin \phi_c \mathbf{e}_{zc}) \\ &= [-u_\lambda \sin \lambda - v_\phi \sin \phi \cos \lambda + w_\rho \cos \phi \cos \lambda] (-\sin \lambda_c \mathbf{e}_{xc}) \\ &+ [u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda] (\cos \lambda_c \mathbf{e}_{xc}) \\ &+ [-u_\lambda \sin \lambda - v_\phi \sin \phi \cos \lambda + w_\rho \cos \phi \cos \lambda] (-\cos \lambda_c \sin \phi_c \mathbf{e}_{yc}) \\ &+ [u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda] (-\sin \lambda_c \sin \phi_c \mathbf{e}_{yc}) \\ &+ [v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi] (\cos \phi_c \mathbf{e}_{yc}) \\ &+ [-u_\lambda \sin \lambda - v_\phi \sin \phi \cos \lambda + w_\rho \cos \phi \cos \lambda] (\cos \lambda_c \cos \phi_c \mathbf{e}_{zc}) \\ &+ [u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda] (\sin \lambda_c \cos \phi_c \mathbf{e}_{zc}) \\ &+ [v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi] (\sin \phi_c \mathbf{e}_{zc}) \\ &= [(u_\lambda \sin \lambda + v_\phi \sin \phi \cos \lambda - w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \sin \lambda_c \\ &+ (u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \cos \lambda_c] \mathbf{e}_{xc} \\ &+ [(u_\lambda \sin \lambda + v_\phi \sin \phi \cos \lambda - w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \cos \lambda_c \sin \phi_c \\ &+ (-u_\lambda \cos \lambda + v_\phi \sin \phi \sin \lambda - w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \sin \lambda_c \sin \phi_c \\ &+ (v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi) \cos \phi_c] \mathbf{e}_{yc} \\ &+ [(-u_\lambda \sin \lambda - v_\phi \sin \phi \cos \lambda + w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \cos \lambda_c \cos \phi_c \\ &+ (u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \sin \lambda_c \cos \phi_c \\ &+ (v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi) \sin \phi_c] \mathbf{e}_{zc} \quad (5.3.132) \end{aligned}$$

$$\equiv \hat{U} \mathbf{e}_{xc} + \hat{V} \mathbf{e}_{yc} + \hat{W} \mathbf{e}_{zc}. \quad (5.3.133)$$

(5.3.123) 式の途中変形における上から第 2 式と上式の各基底ベクトルの成分には,

$$\begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \Lambda & \cos \Phi \cos \Lambda & \sin \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Lambda & \cos \Phi \sin \Lambda & \sin \Phi \sin \Lambda \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\Lambda \\ v_\Phi \\ w_R \end{bmatrix} \quad (5.3.134)$$

という関係が存在する. よって,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_\Lambda \\ v_\Phi \\ w_R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin \Lambda & \cos \Phi \cos \Lambda & \sin \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Lambda & \cos \Phi \sin \Lambda & \sin \Phi \sin \Lambda \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{W} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \sin \Lambda & -\cos \Lambda \cos \Phi & -\cos \Lambda \sin \Phi \\ -\cos \Lambda & -\sin \Lambda \cos \Phi & -\sin \Lambda \sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & -\cos \Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{W} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ \cos \Lambda \cos \Phi & \sin \Lambda \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \cos \Lambda \sin \Phi & \sin \Lambda \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{W} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3.135)$$

以上より逆変換の具体的な表式は,

$$\begin{aligned}
u_A &= - [(u_\lambda \sin \lambda + v_\phi \sin \phi \cos \lambda - w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \sin \lambda_c \\
&\quad + (u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \cos \lambda_c] \sin A \\
&\quad + [(u_\lambda \sin \lambda + v_\phi \sin \phi \cos \lambda - w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \cos \lambda_c \sin \phi_c \\
&\quad + (-u_\lambda \cos \lambda + v_\phi \sin \phi \sin \lambda - w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \sin \lambda_c \sin \phi_c \\
&\quad + (v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi) \cos \phi_c] \cos A \\
&= (-u_\lambda \sin \lambda \sin \lambda_c \sin A - v_\phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda_c \sin A + w_\rho \cos \phi \cos \lambda \sin \lambda_c \sin A) \\
&\quad + (-u_\lambda \cos \lambda \sin A \cos \lambda_c + v_\phi \sin \phi \sin \lambda \sin A \cos \lambda_c - w_\rho \cos \phi \sin \lambda \cos \lambda_c \sin A) \\
&\quad + (u_\lambda \sin \lambda \cos A \cos \lambda_c \sin \phi_c + v_\phi \sin \phi \cos \lambda \cos A \cos \lambda_c \sin \phi_c - w_\rho \cos \phi \cos \lambda \cos A \cos \lambda_c \sin \phi_c) \\
&\quad + (-u_\lambda \cos \lambda \cos A \sin \lambda_c \sin \phi_c + v_\phi \sin \phi \sin \lambda \cos A \sin \lambda_c \sin \phi_c - w_\rho \cos \phi \sin \lambda \cos A \sin \lambda_c \sin \phi_c) \\
&\quad + (v_\phi \cos \phi \cos \phi_c \cos A + w_\rho \sin \phi \cos \phi_c \cos A) \\
&= u_\lambda (-\sin \lambda \sin \lambda_c \sin A - \cos \lambda \sin A \cos \lambda_c + \sin \lambda \cos A \cos \lambda_c \sin \phi_c - \cos \lambda \cos A \sin \lambda_c \sin \phi_c) \\
&\quad + v_\phi (-\sin \phi \cos \lambda \sin \lambda_c \sin A + \sin \phi \sin \lambda \sin A \cos \lambda_c + \sin \phi \cos \lambda \cos A \cos \lambda_c \sin \phi_c \\
&\quad \quad + \sin \phi \sin \lambda \cos A \sin \lambda_c \sin \phi_c + \cos \phi \cos \phi_c \cos A) \\
&\quad + w_\rho (\cos \phi \cos \lambda \sin \lambda_c \sin A - \cos \phi \sin \lambda \cos \lambda_c \sin A - \cos \phi \cos \lambda \cos A \cos \lambda_c \sin \phi_c \\
&\quad \quad - \cos \phi \sin \lambda \cos A \sin \lambda_c \sin \phi_c + \sin \phi \cos \phi_c \cos A) \\
&= u_\lambda [-\sin A (\sin \lambda \sin \lambda_c + \cos \lambda \cos \lambda_c) + \cos A \sin \phi_c (\sin \lambda \cos \lambda_c - \cos \lambda \sin \lambda_c)] \\
&\quad + v_\phi [\sin \phi \sin A (\sin \lambda \cos \lambda_c - \cos \lambda \sin \lambda_c) + \sin \phi \cos A \sin \phi_c (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad \quad + \cos \phi \cos \phi_c \cos A] \\
&\quad + w_\rho [\cos \phi \sin A (\cos \lambda \sin \lambda_c - \sin \lambda \cos \lambda_c) - \cos \phi \cos A \sin \phi_c (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad \quad + \sin \phi \cos \phi_c \cos A] \\
&= u_\lambda [-\sin \theta \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \theta \sin \phi_c \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad + v_\phi [\sin \phi \sin \theta \sin (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \cos \theta \sin \phi_c \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \phi \cos \phi_c \cos \theta] \\
&\quad + w_\rho [-\cos \phi \sin \theta \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi \cos \theta \sin \phi_c \cos (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \cos \phi_c \cos \theta],
\end{aligned} \tag{5.3.136}$$

$$\begin{aligned}
v_\Phi &= [(u_\lambda \sin \lambda + v_\phi \sin \phi \cos \lambda - w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \sin \lambda_c \\
&\quad + (u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \cos \lambda_c] \cos \Lambda \cos \Phi \\
&\quad + [(u_\lambda \sin \lambda + v_\phi \sin \phi \cos \lambda - w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \cos \lambda_c \sin \phi_c \\
&\quad + (-u_\lambda \cos \lambda + v_\phi \sin \phi \sin \lambda - w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \sin \lambda_c \sin \phi_c \\
&\quad + (v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi) \cos \phi_c] \sin \Lambda \cos \Phi \\
&\quad - [(-u_\lambda \sin \lambda - v_\phi \sin \phi \cos \lambda + w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \cos \lambda_c \cos \phi_c \\
&\quad + (u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \sin \lambda_c \cos \phi_c \\
&\quad + (v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi) \sin \phi_c] \sin \Phi \\
&= -u_\lambda [-\cos \Lambda \cos \Phi (\sin \lambda \sin \lambda_c + \cos \lambda \cos \lambda_c) + \sin \phi_c \sin \Lambda \cos \Phi (\cos \lambda \sin \lambda_c - \sin \lambda \cos \lambda_c) \\
&\quad + \cos \phi_c \sin \Phi (\cos \lambda \sin \lambda_c - \sin \lambda \cos \lambda_c)] \\
&\quad - v_\phi [\sin \phi \cos \Lambda \cos \Phi (\sin \lambda \cos \lambda_c - \cos \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad - \sin \phi \sin \phi_c \sin \Lambda \cos \Phi (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad - \cos \phi \cos \phi_c \sin \Lambda \cos \Phi - \sin \phi \cos \phi_c \sin \Phi (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) + \cos \phi \sin \phi_c \sin \Phi] \\
&\quad - w_\rho [\cos \phi \cos \Lambda \cos \Phi (\cos \lambda \sin \lambda_c - \sin \lambda \cos \lambda_c) + \cos \phi \sin \phi_c \sin \Lambda \cos \Phi (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad - \sin \phi \cos \phi_c \sin \Lambda \cos \Phi + \cos \phi \cos \phi_c \sin \Phi (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) + \sin \phi \sin \phi_c \sin \Phi] \\
&= u_\lambda [\cos \theta \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi_c \sin \theta \cos \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) + \cos \phi_c \sin \Phi \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad + v_\phi [-\sin \phi \cos \theta \cos \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \sin \phi_c \sin \theta \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad + \cos \phi \cos \phi_c \sin \theta \cos \Phi + \sin \phi \cos \phi_c \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi \sin \phi_c \sin \Phi] \\
&\quad + w_\rho [\cos \phi \cos \theta \cos \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi \sin \phi_c \sin \theta \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad + \sin \phi \cos \phi_c \sin \theta \cos \Phi - \cos \phi \cos \phi_c \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) - \sin \phi \sin \phi_c \sin \Phi], \\
\end{aligned} \tag{5.3.137}$$

$$\begin{aligned}
w_R &= [(u_\lambda \sin \lambda + v_\phi \sin \phi \cos \lambda - w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \sin \lambda_c \\
&\quad + (u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \cos \lambda_c] \cos \Lambda \sin \Phi \\
&\quad + [(u_\lambda \sin \lambda + v_\phi \sin \phi \cos \lambda - w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \cos \lambda_c \sin \phi_c \\
&\quad + (-u_\lambda \cos \lambda + v_\phi \sin \phi \sin \lambda - w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \sin \lambda_c \sin \phi_c \\
&\quad + (v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi) \cos \phi_c] \sin \Lambda \sin \Phi \\
&\quad + [(-u_\lambda \sin \lambda - v_\phi \sin \phi \cos \lambda + w_\rho \cos \phi \cos \lambda) \cos \lambda_c \cos \phi_c \\
&\quad + (u_\lambda \cos \lambda - v_\phi \sin \phi \sin \lambda + w_\rho \cos \phi \sin \lambda) \sin \lambda_c \cos \phi_c \\
&\quad + (v_\phi \cos \phi + w_\rho \sin \phi) \sin \phi_c] \cos \Phi \\
&= u_\lambda [\cos \Lambda \sin \Phi (\sin \lambda \sin \lambda_c + \cos \lambda \cos \lambda_c) + \sin \phi_c \sin \Lambda \sin \Phi (\sin \lambda \cos \lambda_c - \cos \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad - \cos \phi_c \cos \Phi (\sin \lambda \cos \lambda_c - \cos \lambda \sin \lambda_c)] \\
&\quad + v_\phi [\sin \phi \cos \Lambda \sin \Phi (\cos \lambda \sin \lambda_c - \sin \lambda \cos \lambda_c) \\
&\quad + \sin \phi \sin \phi_c \sin \Lambda \sin \Phi (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad + \cos \phi \cos \phi_c \sin \Lambda \sin \Phi - \sin \phi \cos \phi_c \cos \Phi (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) + \cos \phi \sin \phi_c \cos \Phi] \\
&\quad + w_\rho [\cos \phi \cos \Lambda \sin \Phi (\sin \lambda \cos \lambda_c - \cos \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad - \cos \phi \sin \phi_c \sin \Lambda \sin \Phi (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) \\
&\quad + \sin \phi \cos \phi_c \sin \Lambda \sin \Phi + \cos \phi \cos \phi_c \cos \Phi (\cos \lambda \cos \lambda_c + \sin \lambda \sin \lambda_c) + \sin \phi \sin \phi_c \cos \Phi] \\
&= u_\lambda [\cos \theta \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi_c \sin \theta \sin \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi_c \cos \Phi \sin (\lambda - \lambda_c)] \\
&\quad + v_\phi [-\sin \phi \cos \theta \sin \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \sin \phi_c \sin \theta \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad + \cos \phi \cos \phi_c \sin \theta \sin \Phi - \sin \phi \cos \phi_c \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \cos \phi \sin \phi_c \cos \Phi] \\
&\quad + w_\rho [\cos \phi \cos \theta \sin \Phi \sin (\lambda - \lambda_c) - \cos \phi \sin \phi_c \sin \theta \sin \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) \\
&\quad + \sin \phi \cos \phi_c \sin \theta \sin \Phi + \cos \phi \cos \phi_c \cos \Phi \cos (\lambda - \lambda_c) + \sin \phi \sin \phi_c \cos \Phi].
\end{aligned} \tag{5.3.138}$$

*27

5.4 Statistics の付録

5.4.1 最小自乗法

あるデータの組、 x, y が存在する。このデータの分布を x を変数とすると、

$$y = y(x)$$

という関係をもつ。このようなデータの組を x についての有限の多項式による線型結合で表すことを考える。ただし、その関数は x での y の値とそのときの関数の値の 2 乗差が最

*27 <https://www.dpac.dpri.kyoto-u.ac.jp/2018/02/26/tc-at-np.html>

小となるように選ばれるとする。

まず、簡単のために x について 1 次関数で表現することを考える。このときの関数を

$$F(x) = a_0 + a_1x \quad (5.4.139)$$

とする。ここで、 a_0, a_1 は x, y に依存しない定数である。実際のデータは離散データであるので、 x_i, y_i というデータの組み合わせとなる。すなわち、 i 番目のデータ対は

$$y_i = y(x_i)$$

である。同様に 1 次関数も

$$F(x) = F(x_i)$$

となる。この直線 $F(x_i)$ と y_i の 2 乗差を最小とすることを考える。つまり、これらの残差を R とすると、

$$R = \sum_{i=1}^N \{y(x_i) - F(x_i)\}^2 = \sum_{i=1}^N \{y(x_i) - a_0 - a_1x_i\}^2 \quad (5.4.140)$$

が最小となるようにとられなければならない。この条件を満たす関数 F を求めるには、 F の形状を決める x, y に独立な 2 定数 a_0, a_1 を (5.4.140) が最小となるようにとればよいということになる。このような問題を最小自乗法問題といい、次のような手順を用いて解かれる。

1. 残差 R を a_0, a_1 について微分する。
2. それらがともにゼロとなるような a_0, a_1 の値が R の極値である。
3. R はその定義から、 a_0, a_1 のパラメータ空間において、正値をとる下に凸な関数であるため、極値が存在すれば、そこが最小値であるということになる。

この手順にしたがい、

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = 0, \quad \text{and,} \quad \frac{\partial R}{\partial a_1} = 0 \quad (5.4.141)$$

を満たす a_0, a_1 を求める。(5.4.140) 式から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^N \{y(x_i) - a_0 - a_1x_i\} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^N x_i \{y(x_i) - a_0 - a_1x_i\} = 0 \end{aligned} \quad (5.4.142)$$

である。これを整理すると、

$$\begin{aligned} a_0N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i &= \sum_{i=1}^N y(x_i) \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N x_i y(x_i) \end{aligned} \quad (5.4.143)$$

という a_0, a_1 についての 1 次連立方程式が得られるので、これを解けば、 a_0, a_1 が得られ、最小自乗直線が得られる。(5.4.143) 式を解くと、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y(x_i) - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y(x_i)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} \\ a_1 &= \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y(x_i) - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y(x_i)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} \end{aligned} \quad (5.4.144)$$

が得られる。同様の考えを発展させると、任意の有限次数の多項式曲線によるフィッティングが可能であることがわかる。

そこで、ここでは、 $F(x) = \sum_{k=0}^M a_k x^k$ という多項式でフィッティングすることを考える。ここでも最小自乗法で用いた手法が適用できる^{*28}。残差 R は

$$R = \sum_{i=1}^N \{y_i - F(x_i)\}^2 = \sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \sum_{k=0}^M a_k x_i^k \right\}^2 \quad (5.4.145)$$

となり、この値を最小にするには、 $a_k, (k = 0, 1, \dots, M)$ の各係数について、それによる残差の微分がゼロとなればよい。つまり、

$$\frac{\partial R}{\partial a_j} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.146)$$

という $M + 1$ 個の 1 次連立方程式を立てることができる。未知係数 $M + 1$ 個について、独立な $M + 1$ 個の連立方程式が立てられるので、完全に閉じた系であることは明らかである。これは非常に一般化されているので、任意の $M + 1$ 次多項式で近似しても、同様の計算でフィッティングができることを示唆している。(5.4.146) 式を具体的に計算すると、

$$\sum_{i=1}^N x_i^j \left\{ y_i - \sum_{k=0}^M a_k x_i^k \right\} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M)$$

となり、これを整理すると、

$$\sum_{i=1}^N x_i^j y_i - \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M a_k x_i^{k+j} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.147)$$

となる。左辺第 2 項については、総和演算の順序が可換であるため、

$$\sum_{i=1}^N x_i^j y_i - \sum_{k=0}^M a_k \sum_{i=1}^N x_i^{k+j} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.148)$$

^{*28}以降では、表記の簡便さから、 $y(x_i) = y_i$ と表記する。

となる。これを具体的に展開すると、以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned}
 j = 0 & : a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \cdots + a_M \sum_{i=1}^N x_i^M = \sum_{i=1}^N y_i \\
 j = 1 & : a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + \cdots + a_M \sum_{i=1}^N x_i^{M+1} = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\
 & \vdots \\
 j = M & : a_0 \sum_{i=1}^N x_i^M + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{M+1} + \cdots + a_M \sum_{i=1}^N x_i^{2M} = \sum_{i=1}^N x_i^M y_i
 \end{aligned} \tag{5.4.149}$$

これを見ると、 $k = M + 1$ 行 $j = M + 1$ 列の正方行列と $M + 1$ 個の係数 a_j についての列ベクトルの積とすると、正方行列の逆行列を求めることで、完全に a_j が求められることになる。このとき、正方行列は対称行列となっていることに注意。

さらに変数が多変数の場合にも拡張ができる。ここでは、 $F(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^M a_k x_k$ という多変数多項式でフィッティングすることを考える。このとき、 x_k は互いに独立な変数であり、 \mathbf{x} はその集合である。上と同様にこのときの残差 R は

$$R = \sum_{i=1}^N \{y_i - F(\mathbf{x}_i)\}^2 = \sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \sum_{k=0}^M a_k x_{k,i} \right\}^2 \tag{5.4.150}$$

となり、この値を最小にするには、 a_k ($k = 0, 1, \dots, M$) の各係数について、それによる残差の微分がゼロとなればよい。つまり、

$$\frac{\partial R}{\partial a_j} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \tag{5.4.151}$$

という $M + 1$ 個の 1 次連立方程式を立てることができる。未知係数 $M + 1$ 個について、独立な $M + 1$ 個の連立方程式が立てられるので、完全に閉じた系であることは明らかである。(5.4.151) 式を具体的に計算すると、

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} \left\{ y_i - \sum_{k=0}^M a_k x_{k,i} \right\} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M)$$

となり、これを整理すると、

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} y_i - \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M a_k x_{k,i} x_{j,i} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \tag{5.4.152}$$

となる。左辺第 2 項については、総和演算の順序が可換であるため、

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} y_i - \sum_{k=0}^M a_k \sum_{i=1}^N x_{k,i} x_{j,i} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \tag{5.4.153}$$

となる。これを具体的に展開すると、以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned}
 j = 0 & : a_0 \sum_{i=1}^N x_{0,i}^2 + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1,i}x_{0,i} + \cdots + a_M \sum_{i=1}^N x_{M,i}x_{0,i} = \sum_{i=1}^N x_{0,i}y_i \\
 j = 1 & : a_0 \sum_{i=1}^N x_{0,i}x_{1,i} + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1,i}^2 + \cdots + a_M \sum_{i=1}^N x_{M,i}x_{1,i} = \sum_{i=1}^N x_{1,i}y_i \\
 & \vdots \\
 j = M & : a_0 \sum_{i=1}^N x_{0,i}x_{M,i} + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1,i}x_{M,i} + \cdots + a_M \sum_{i=1}^N x_{M,i}^2 = \sum_{i=1}^N x_{M,i}y_i
 \end{aligned} \tag{5.4.154}$$

これを見ると、 $k = M + 1$ 行 $j = M + 1$ 列の正方行列と $M + 1$ 個の係数 a_j についての列ベクトルの積とすると、正方行列の逆行列を求めることで、完全に a_j が求められることになる。このとき、正方行列は対称行列となっていることに注意。

5.4.2 線形内挿

ここでは、本ルーチンで行っている内挿方法について証明し、将来導入予定の内挿方法についても証明を行う。

まず、本ルーチンでは、すべての内挿ルーチンにおいて、線形内挿を行っている。この内挿方法は、参照点 2 点からその間の値を 2 点の直線で結び、その直線上に値が存在すると仮定した内挿法である。1 次元の模式図は図??に示されている。ある値 y_{i+1}, y_i が定義された異なる 2 点 x_{i+1}, x_i をもとに、その間に存在する内挿点 x_p での線形内挿の値 y_p は参照する 2 点から計算された直線の傾きを dx とすると、

$$y_p = y_i + dx * (x_p - x_i)$$

で計算することができる。このとき、 dx は $\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ となる。

この考えを 2 次元空間に拡張したのが、双線形内挿と呼ばれる方法であり、その模式図は図??に示されている。2 次元空間 x_i, y_j で定義された値 z_{ij} の、ある空間点 x_p, y_q での内挿値 z_{pq} は、以下のように計算される。

$$z_{pq} = z_{pj} + \frac{z_{pj+1} - z_{pj}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j)$$

これは、 y_j, y_{j+1} の 2 点について、それぞれ x_p における内挿値 $z_{p,j+1}, z_{p,j}$ を計算し、それらの値から y 方向に線形内挿して、 z_{pq} を求めるという手続きになる。上式を整理する

と以下のようになる。

$$\begin{aligned}
z_{pq} &= z_{pj} + \frac{z_{pj+1} - z_{pj}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) \\
&= z_{ij} + \frac{z_{i+1j} - z_{ij}}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) \\
&\quad + \left[z_{ij+1} + \frac{z_{i+1j+1} - z_{ij+1}}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) \right. \\
&\quad \left. - z_{ij} - \frac{z_{i+1j} - z_{ij}}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) \right] \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
&= z_{ij} + \frac{z_{i+1j} - z_{ij}}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) + \frac{z_{ij+1} - z_{ij}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) \\
&\quad [z_{i+1j+1} - z_{ij+1} - z_{i+1j} + z_{ij}] \frac{(x_p - x_i)(y_q - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)} \tag{5.4.155}
\end{aligned}$$

これより、双線形内挿は、 $F(x, y) = a + bx + cy + dxy$ という平面上に内挿値が存在するということを仮定した内挿であるということが示される。

同様の議論で 3 次元の線形内挿を計算すると^{*29}、3 次元空間 x_i, y_j, z_k で定義された値 u_{ijk} の、ある空間点 x_p, y_q, z_r での内挿値 u_{pqr} は、以下のように計算される。

$$u_{pqr} = u_{pqk} + \frac{u_{pqk+1} - u_{pqk}}{z_{k+1} - z_k} (z_r - z_k)$$

^{*29} 模式図は図??に示されている。

この計算手続きは 2 次元の内挿をさらに 3 次元に単純拡張しただけである。よって、上式をさらに整理すると、

$$\begin{aligned}
u_{pqr} &= u_{pqk} + \frac{u_{pqk+1} - u_{pqk}}{z_{k+1} - z_j} (z_r - z_k) \\
&= u_{pjk} + \frac{u_{pj+1k} - u_{pjk}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) \\
&\quad + \left[u_{pjk+1} + \frac{u_{pj+1k+1} - u_{pjk+1}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) - u_{pjk} - \frac{u_{pj+1k} - u_{pjk}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) \right] \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&= u_{pjk} + (u_{pj+1k} - u_{pjk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} + (u_{pjk+1} - u_{pjk}) \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + (u_{pj+1k+1} - u_{pjk+1} - u_{pj+1k} + u_{pjk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&= u_{ijk} + (u_{i+1jk} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\
&\quad + \left[u_{ij+1k} + (u_{i+1j+1k} - u_{ij+1k}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - u_{ijk} - (u_{i+1jk} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
&\quad + \left[u_{ijk+1} + (u_{i+1jk+1} - u_{ik+1}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - u_{ijk} - (u_{i+1jk} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + \left[u_{ij+1k+1} + (u_{i+1j+1k+1} - u_{ij+1k+1}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - u_{ijk+1} - (u_{i+1jk+1} - u_{ijk+1}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right. \\
&\quad \left. - u_{ij+1k} - (u_{i+1j+1k} - u_{ij+1k}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + u_{ijk} + (u_{i+1jk} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&= u_{ijk} + (u_{i+1jk} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + (u_{ij+1k} - u_{ijk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
&\quad + (u_{ijk+1} - u_{ijk}) \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + (u_{i+1j+1k} - u_{ij+1k} - u_{i+1jk} + u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
&\quad + (u_{i+1jk+1} - u_{ik+1} - u_{i+1jk} + u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + (u_{ij+1k+1} - u_{ijk+1} - u_{ij+1k} + u_{ijk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + (u_{i+1j+1k+1} - u_{ij+1k+1} - u_{i+1jk+1} + u_{ijk+1} - u_{i+1j+1k} + u_{ij+1k} + u_{i+1jk} - u_{ijk}) \\
&\quad \times \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \tag{5.4.156}
\end{aligned}$$

となる。

ここで示した内挿の式はデカルト座標系を仮定しているが、直交座標系のうち、各座標変数のスケール因子がそれぞれの座標変数を引数に持たないような座標系^{*30}であるなら、

^{*30}つまり、任意の座標系 (x_1, x_2, x_3) があつたとする。このとき、これらの座標に対するスケール因子 (h_1, h_2, h_3) が、

$$h_1 = h_1(x_2, x_3), \quad h_2 = h_2(x_3, x_1), \quad h_3 = h_3(x_1, x_2)$$

となるような座標系のこと。例えば、円筒座標系や球座標系はこれに該当する。

全て上の各式で内挿値を計算することができる。

5.4.3 スプライン補間

以下では $M = 3$ のときのスプライン補間公式を導出する。ここで得られるスプライン補間を特に 3 次スプライン補間と呼ぶ。データ点は先と同じように x_i ($i = 1, \dots, N$) 点で y_i と定義されているとする。このときのスプライン関数 $S_i(x)$ は

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \quad (5.4.157)$$

となる。ここで、 a_i, b_i, c_i, d_i は未知係数である。上式について、全データ点ではスプライン関数と実際のデータが一致するという条件から

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i, & S_{i-1}(x_i) &= y_i, & (i = 2, \dots, N-1) \\ S_1(x_1) &= y_1, & S_{N-1}(x_N) &= y_N \end{aligned} \quad (5.4.158)$$

が成り立ち、データ点 x_i ($i = 2, \dots, N-1$) での接続の定理から

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), \quad S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad (5.4.159)$$

という $4(N-1) - 2$ 個の関係式が得られる。(??) 式を用いて上の 4 つの式を具体的に表すと、 $i = 2, \dots, N-1$ について

$$d_i = y_i, \quad (5.4.160)$$

$$a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1} = y_i, \quad (5.4.161)$$

$$c_i = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}, \quad (5.4.162)$$

$$b_i = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + b_{i-1} \quad (5.4.163)$$

が成り立つ。これらをもとに、既知の値から未知係数 a_i, b_i, c_i, d_i を求める。まず、(5.4.160) から

$$d_i = y_i. \quad (5.4.164)$$

$h_i \equiv x_i - x_{i-1}$ と定義すると、(5.4.163) から

$$a_{i-1} = \frac{b_i - b_{i-1}}{3h_i}. \quad (5.4.165)$$

(5.4.161) から

$$c_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{b_i + 2b_{i-1}}{3}h_i. \quad (5.4.166)$$

これらを (5.4.162) に代入し b_i のみの式にすると、

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{b_{i+1} + 2b_i}{3}h_{i+1} &= (b_i - b_{i-1})h_i + 2b_{i-1}h_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{b_i + 2b_{i-1}}{3}h_i \\ \Rightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} &= \frac{h_{i+1}}{3}b_{i+1} + \frac{2}{3}[h_{i+1} + h_i]b_i + \frac{h_i}{3}b_{i-1}. \end{aligned} \quad (5.4.167)$$

という b_i についての線形連立方程式となる。ここで、上式が成り立つのは $i = 2, \dots, N-2$ であることに注意する。なぜなら、ここまでの議論はすべて $i = 2, \dots, N-1$ の場合の議論を行ってきたため、 a, c, d の各係数について d_i は (5.4.164) から $d_2 \sim d_{N-1}$ まで、 a_i は (5.4.165) から $a_1 \sim a_{N-2}$ まで、 c_i は (5.4.166) から $c_1 \sim c_{N-2}$ までのみの関係が与えられていることに注意する。つまり、漸化式 (5.4.162) は $i = N-1$ においてのみ b_i との関係式 (5.4.166) を用いることができないということである。 a_{N-1}, c_{N-1}, d_1 はそれぞれ以下に考える追加の条件から得られる関係式を用いて求めることになる。これが上で述べた (5.4.167) の適用範囲が $i = 2, \dots, N-2$ までとなる根拠である。 b_i は $N-1$ 個あるのに対し、上式は $N-3$ 個しかないので、追加が必要となる b_i についての式は 2 個となることがわかる。

関係式を 2 つ追加するために両端での微分条件を考える。ここでは一般性を失わないように、以下の 2 つの場合について考える：

$$\text{ケース 1 } S'(x_1) = T'_1, S'(x_N) = T'_N.$$

$$\text{ケース 2 } S''(x_1) = T''_1, S''(x_N) = T''_N.$$

ここで T'_1, T'_N, T''_1, T''_N はユーザが指定する値である。特に、ケース 2 の場合に $T''_1 = T''_N = 0$ であるなら、自然スプラインに一致する。

ケース 1 の場合、上の追加条件から

$$\begin{aligned} c_1 &= T'_1, \\ 3a_{N-1}(x_N - x_{N-1})^2 + 2b_{N-1}(x_N - x_{N-1}) + c_{N-1} &= T'_N \end{aligned} \quad (5.4.168)$$

とできる。これを用いると、 $i = 1, N$ の場合についても (5.4.160), (5.4.161), (5.4.168) あるいは (5.4.175) から

$$d_1 = y_1, \quad a_{N-1}h_N^3 + b_{N-1}h_N^2 + c_{N-1}h_N + y_{N-1} = y_N, \quad (5.4.169)$$

および、

$$c_1 = T'_1, \quad 3a_{N-1}h_N^2 + 2b_{N-1}h_N + c_{N-1} = T'_N, \quad (5.4.170)$$

から b_i についての式にする。(5.4.170) 第 1 式と (5.4.166) の $i = 2$ から c_1 を消去して

$$b_2 + 2b_1 = 3 \frac{y_2 - y_1}{h_2^2} - 3 \frac{T'_1}{h_2}, \quad (5.4.171)$$

(5.4.170) 第 2 式と (5.4.169) 第 2 式から a_{N-1} を消去して

$$c_{N-1} = -\frac{h_N}{2}b_{N-1} - \frac{T'_N}{2} + 3 \frac{y_N - y_{i-1}}{2h_N}. \quad (5.4.172)$$

これを $i = N-1$ のときの (5.4.162) に代入すると、

$$-\frac{h_N}{2}b_{N-1} - \frac{T'_N}{2} + 3 \frac{y_N - y_{i-1}}{2h_N} = 3a_{N-2}h_{N-1}^2 + 2b_{N-2}h_{N-1} + c_{N-2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{3}h_{N-1} + \frac{h_N}{2} \right] b_{N-1} + \frac{b_{N-2}}{3}h_{N-1} = -\frac{T'_N}{2} + 3\frac{y_N - y_{N-1}}{2h_N} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} \quad (5.4.173)$$

ここで、第 2 式は $i = N - 1$ のときの (5.4.165), (5.4.166) 式を用いて a_{N-2} , c_{N-2} を消去した。

以上より、(5.4.167), (5.4.171), (5.4.173) から

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_3 + h_2) & h_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & h_i & 2(h_{i+1} + h_i) & h_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-1} + h_{N-2}) & h_{N-1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 2h_{N-1} & 4h_{N-1} + 3h_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \end{pmatrix} \quad (5.4.174)$$

となり、 b_i について解くことができるようになる。ここで、

$$\begin{aligned} z_1 &= 3\frac{y_2 - y_1}{h_2^2} - 3\frac{T'_1}{h_2}, \\ z_i &= 3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - 3\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad (i = 2, \dots, N-2), \\ z_{N-1} &= -3T'_N + 9\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - 6\frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} \end{aligned}$$

である。 b_i が得られたらその値をもとに a_i , c_i , d_i を求める。 a_i は $i = 1, \dots, N-2$ について (5.4.161) から、 $i = N-1$ については (5.4.170) 第 2 式から得られる。 c_i については $i = 1, N-1$ については (5.4.170) 第 1 式、(5.4.172) からそれぞれ、また $i = 2, \dots, N-2$ については (5.4.166) から得られる。 d_i については (5.4.164), (5.4.169) から得られる。これですべての未知係数が得られたので、(5.4.158) から補間されたスプライン関数が得られる。

ケース 2 の場合、先の追加条件から

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{T''_1}{2}, \\ 3a_{N-1}(x_N - x_{N-1}) + b_{N-1} &= \frac{T''_N}{2} \end{aligned} \quad (5.4.175)$$

とできる。これを用いると、 $i = 1, N$ の場合についても

$$b_1 = \frac{T_1''}{2}, \quad 3a_{N-1}h_N + b_{N-1} = \frac{T_N''}{2}, \quad (5.4.176)$$

から b_i についての式にすることができる。(5.4.176) 第 1 式から明らかに

$$b_1 = \frac{T_1''}{2}, \quad (5.4.177)$$

(5.4.176) 第 2 式と (5.4.169) 第 2 式から a_{N-1} を消去して

$$c_{N-1} = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{T_N''}{6}h_N - \frac{2h_N}{3}b_{N-1}. \quad (5.4.178)$$

これを $i = N - 1$ のときの (5.4.162) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{T_N''}{6}h_N - \frac{2h_N}{3}b_{N-1} &= 3a_{N-2}h_{N-1}^2 + 2b_{N-2}h_{N-1} + c_{N-2} \\ \Rightarrow 2[h_N + h_{N-1}]b_{N-1} + h_{N-1}b_{N-2} &= 3\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{T_N''}{2}h_N - 3\frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} \end{aligned} \quad (5.4.179)$$

が得られる。ここで、第 2 式は $i = N - 1$ のときの (5.4.165), (5.4.166) 式を用いて a_{N-2} , c_{N-2} を消去した。

以上より、(5.4.167), (5.4.171), (5.4.173) から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_3 + h_2) & h_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & h_i & 2(h_{i+1} + h_i) & h_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-1} + h_{N-2}) & h_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h_{N-1} & 2(h_N + h_{N-1}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \end{pmatrix} \quad (5.4.180)$$

となり、 b_i について解くことができるようになる。ここで、

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{T_1''}{2}, \\ z_i &= 3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - 3\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad (i = 2, \dots, N - 2), \\ z_{N-1} &= 3\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - 3\frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} - \frac{T_N''}{2}h_N \end{aligned}$$

である。 b_i が得られたらその値をもとに a_i, c_i, d_i を求める。 a_i は $i = 1, \dots, N-2$ について (5.4.161) から、 $i = N-1$ について (5.4.176) 第 2 式から得られる。 c_i は $i = 1, \dots, N-2$ については (5.4.166) から、 $i = 1, N-1$ については (5.4.178) から得られる。 d_i については (5.4.164), (5.4.169) から得られる。これですべての未知係数が得られたので、(5.4.158) から補間されたスプライン関数が得られる。

5.4.4 三角形の要素内補間

直交直線座標系 (x, y) 上の 3 点 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ を頂点とする三角形の要素内の点 $P(x_P, y_P)$ への補間を考える (図 5.10)。三角形の各頂点で値 u_A, u_B, u_C が定義されているとき、面積で重みをつけて点 P の補間 u_P を

$$u_P = \frac{u_A S_A + u_B S_B + u_C S_C}{S} \quad (5.4.181)$$

と定義する。ここで S_A, S_B, S_C は $\triangle BCP, \triangle CAP, \triangle ABP$ の面積であり、 S は $\triangle ABC$ の面積である。ベクトルの外積の大きさはその 2 ベクトルが張る平行四辺形の面積であることを用いると、

$$2S = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB} = (x_A - x_C)(y_B - y_A) - (y_A - y_C)(x_B - x_A), \quad (5.4.182)$$

$$2S_A = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CP} = (x_C - x_B)(y_P - y_C) - (y_C - y_B)(x_P - x_C), \quad (5.4.183)$$

$$2S_B = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AP} = (x_A - x_C)(y_P - y_A) - (y_A - y_C)(x_P - x_A), \quad (5.4.184)$$

$$2S_C = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BP} = (x_B - x_A)(y_P - y_B) - (y_B - y_A)(x_P - x_B). \quad (5.4.185)$$

ここで外積は符号をもつため、全ての外積の符号を合わせる向きでベクトルを定義していることに注意する。符号を合わせておけば、(5.4.181) は必ず $0 \leq S_A/S, S_B/S, S_C/S \leq 1$ となる。

5.5 trajectory の付録

5.5.1 流跡線

流跡線とは、微小体積で区切られた流体要素が流れ場に伴って運動するとき、その流体要素が運動によって移動した点を連続的につないだ線^{*31}である。このとき、ある瞬間時刻での流体要素の速度ベクトルは、その流体要素の流跡線の接線に一致する。ここで、任意の時刻 t に 3 次元デカルト座標上の点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x, y, z)$ に位置する微小流体要素を考え

^{*31}<https://glossary.ametsoc.org/wiki/Trajectory>

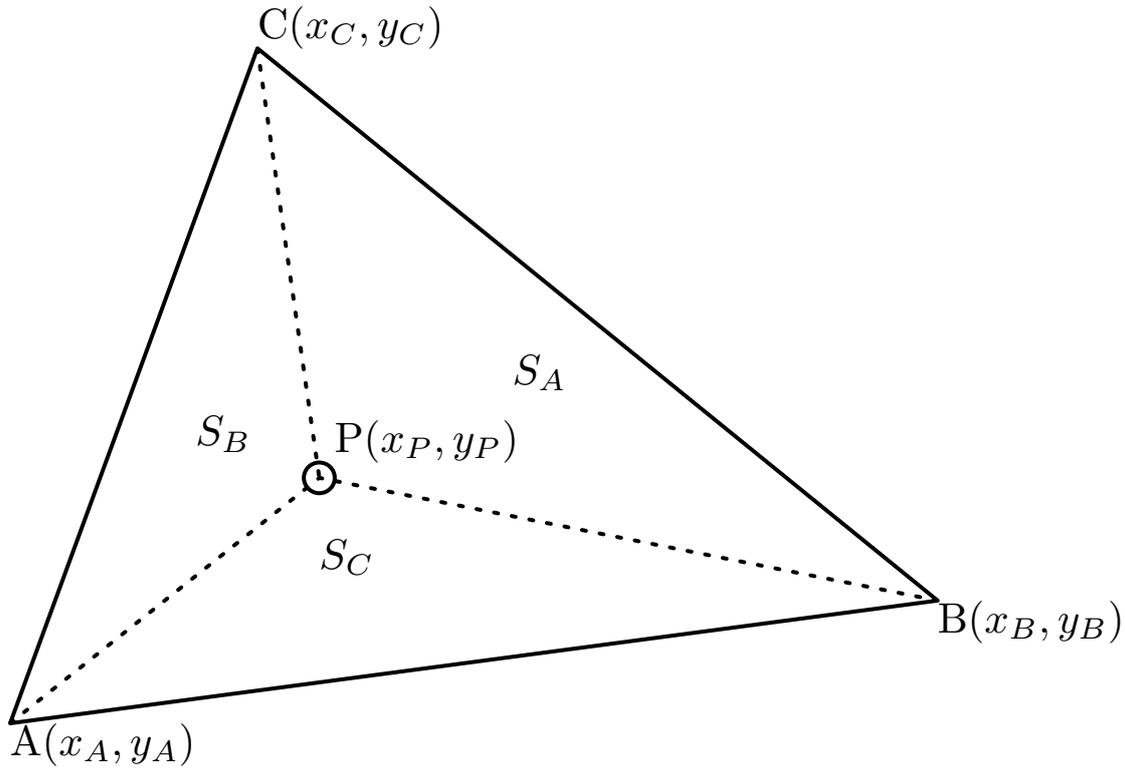


図 5.10: 直交直線座標系 (x, y) における三角形 ABC と要素内点 P の位置関係.

る. 流跡線の定義から

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)). \quad (5.5.186)$$

ここで, $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$ は時刻 t の位置 \mathbf{x} における流体速度ベクトルである. $\delta \mathbf{x}$ は時刻 δt の間での流体要素の 3 次元移動量を表す. 速度ベクトルがゼロベクトルの場合, 明らかに $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$. すなわち流体要素が時間とともに移動しない (静止流体である) ことを意味する.

流跡線の定義から, 時刻 t_0 で位置 $\mathbf{x}_0(t_0)$ に位置する流体要素の流跡線は, 上式を t について積分したものと等しい:

$$\int_{\mathbf{x}_0(t_0)}^{\mathbf{x}(t)} \delta \mathbf{x} = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{x}(t')) \delta t'. \quad (5.5.187)$$

このとき, $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$ は時刻 t で位置 $\mathbf{x}(t)$ における流体速度であることに注意する. \mathbf{v} が解析的に表現できない場合, あるいは連続関数ではない (すなわち離散化された量である) 場合, 上式は数値積分によって近似される. 以下はいくつかの数値積分スキームでの流跡線計算の定式化を述べる.

5.5.2 時間積分スキーム

離散化された流速場に対して, (5.5.186) あるいは (5.5.187) 式の積分を評価する場合, 式を離散化する必要がある. この離散化には, 数値積分を行うための離散化と, 流速場を評価するための離散化の 2 種類の離散化が含まれることに注意する.

まず数値積分を行うための離散化について考える. 本ライブラリでは,

1. 1 次精度陽的オイラースキーム
2. 改良オイラースキーム
3. 修正オイラースキーム (ホインスキーム)
4. 3 次ルンゲ・クッタスキーム (クッタの 3 次公式)
5. 4 次ルンゲ・クッタスキーム (古典的ルンゲ・クッタ)

を選択することができる. $0 < |\delta t| (= |h|) < \varepsilon$ として, t_0 から $t_0 + h$ までに $\mathbf{x}(t_0)$ にあった流体要素が $\mathbf{x}(t_0 + h)$ まで移動したとする^{*32}. 表記の簡略化のため, $t_n = t_0 + nh$ で h ごとの時刻を, $\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}_n$ で時刻 t_n での流体要素の位置を表現すると, 流体要素の移動は各スキームで以下のように表現される:

1 次精度陽的オイラースキーム (EU1)

$$\mathbf{x}_{n+1}^{\text{EU1}} \equiv \mathbf{x}_n + h\mathbf{v}(\mathbf{x}_n) \quad (5.5.188)$$

改良オイラースキーム (ME1)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}^{\text{ME1}} &\equiv \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k}_1 &\equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{v}\left(\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right). \end{aligned} \quad (5.5.189)$$

ホインスキーム (HO1)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}^{\text{HO1}} &\equiv \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_1 &\equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_1). \end{aligned} \quad (5.5.190)$$

^{*32} h 自身は正負両方の範囲をとることができる. $h > 0$ なら流跡線計算を時間について前方に (前方流跡線), $h < 0$ なら後方に (後方流跡線) 積分することになる. その際, n の番号は統一的に記述できることに注意する. 例えば, $h < 0$ の場合, $t_{n+1} < t_n$, $h > 0$ の場合, $t_{n+1} > t_n$ となる. n の値は初期時刻からの積分計算の回数を表すだけであり, 積分の方向 (前方か後方か) は h の符号で決まる.

3 次ルンゲ・クッタスキーム (RK3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n+1}^{\text{RK3}} &\equiv \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \\
\mathbf{k}_1 &\equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{v}\left(\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right), \\
\mathbf{k}_3 &\equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}_n - h\mathbf{k}_1 + 2h\mathbf{k}_2).
\end{aligned} \tag{5.5.191}$$

4 次ルンゲ・クッタスキーム (RK4)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n+1}^{\text{RK4}} &\equiv \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \\
\mathbf{k}_1 &\equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{v}\left(\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right), \\
\mathbf{k}_3 &\equiv \mathbf{v}\left(\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right), \quad \mathbf{k}_4 \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_3).
\end{aligned} \tag{5.5.192}$$

次に、流速場の離散化について考える。流速場 \mathbf{V} が 3 次元デカルト座標 (X, Y, Z) 上の離散点 (X_i, Y_j, Z_k) でのみ定義されているとする ($1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq M, 1 \leq k \leq N$, L, M, N は自然数)。時間についても、一定の間隔で $T_l (1 \leq l \leq P)$ 定義されているとする。すなわち、

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(X_i, Y_j, Z_k, T_l) = \mathbf{V}_{i,j,k,l}. \tag{5.5.193}$$

一方で、流跡線の数値積分では、 t_0 から $t_0 + \delta t$ までの間の移動した先が、(時間軸も含めて) 必ず流速場の離散点 (X_i, Y_j, Z_k, T_l) 上に一致するわけではない。しかし、流跡線の数値積分に必要な流速場 \mathbf{v} は、流跡線の存在する位置での流速で与えられなければならない。このとき、離散化された流速場 \mathbf{V} から、流体要素が移動しうる任意の位置における流速場 \mathbf{v} を評価する式を、数学的近似、物理的仮定を許して与える必要がある。最も簡単な仮定は、流速の定義される時刻から次の時刻まで、ある離散点と隣接する点間は流速が線形に変化するというものである。この仮定を置くと、時刻 T で点 $\mathbf{X} \equiv (X, Y, Z)$ での流体要素の

もつ速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(T))$ は、離散的な流速場 (5.5.193) 式を用いて

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(T)) \equiv & (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta) \boldsymbol{V}_{i,j,k,l} \\
& + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\delta \boldsymbol{V}_{i,j,k,l+1} \\
& + (1-\alpha)(1-\beta)\gamma(1-\delta) \boldsymbol{V}_{i,j,k+1,l} \\
& + (1-\alpha)\beta(1-\gamma)(1-\delta) \boldsymbol{V}_{i,j+1,k,l} \\
& + \alpha(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta) \boldsymbol{V}_{i+1,j,k,l} \\
& + \alpha\beta(1-\gamma)(1-\delta) \boldsymbol{V}_{i+1,j+1,k,l} \\
& + \alpha(1-\beta)\gamma(1-\delta) \boldsymbol{V}_{i+1,j,k+1,l} \\
& + \alpha(1-\beta)(1-\gamma)\delta \boldsymbol{V}_{i+1,j,k,l+1} \\
& + (1-\alpha)\beta\gamma(1-\delta) \boldsymbol{V}_{i,j+1,k+1,l} \\
& + (1-\alpha)\beta(1-\gamma)\delta \boldsymbol{V}_{i,j+1,k,l+1} \\
& + (1-\alpha)(1-\beta)\gamma\delta \boldsymbol{V}_{i,j,k+1,l+1} \\
& + \alpha\beta\gamma(1-\delta) \boldsymbol{V}_{i+1,j+1,k+1,l} \\
& + \alpha\beta(1-\gamma)\delta \boldsymbol{V}_{i+1,j+1,k,l+1} \\
& + \alpha(1-\beta)\gamma\delta \boldsymbol{V}_{i+1,j,k+1,l+1} \\
& + (1-\alpha)\beta\gamma\delta \boldsymbol{V}_{i,j+1,k+1,l+1} \\
& + \alpha\beta\gamma\delta \boldsymbol{V}_{i+1,j+1,k+1,l+1}
\end{aligned} \tag{5.5.194}$$

と定義できる^{*33}。ここで、

$$\begin{aligned}
X &= (1-\alpha)X_i + \alpha X_{i+1}, \quad Y = (1-\beta)Y_j + \beta Y_{j+1}, \\
Z &= (1-\gamma)Z_k + \gamma Z_{k+1}, \quad T = (1-\delta)T_l + \delta T_{l+1}, \quad (0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq 1).
\end{aligned} \tag{5.5.195}$$

であり、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ X_i, Y_j, Z_k, T_l と各軸の隣接定義点との内分点を指定するパラメータである。これらのパラメータは X, Y, Z, T の値から (5.5.195) 式によって求められる。

5.6 Braun (2002) による熱帯低気圧の中心位置推定

ここでは、Braun (2002) で用いられている、数値モデルにおける熱帯低気圧の中心位置を推定する方法について述べる。

そもそも、成熟期の熱帯低気圧は第一近似として静力学バランスしているので、熱帯低気圧の中心は、海面更正気圧の最低値をとる水平格子点でよく代表される。水平解像度が 10 km 以上の静力学数値モデルではこの海面更正気圧の最低点が熱帯低気圧の軸対称な中心

^{*33}ここで注意すべきは、あくまで (5.5.193) 式は \boldsymbol{v} という流跡線に沿った流体の速度を、外部から与えられる離散的な流速データ \boldsymbol{V} でどのように「定義するか」を表しているだけである。線形内挿より高次の補間 (例えば 3 次スプラインなど) を用いたところで、離散的な流速データが流跡線の速度と一致することは (離散点上を除いて) ありえない。したがって、ここでは (5.5.193) 式を近似記号で結ばず、あえて定義として表現した。内挿に用いる補間の次数が高いことは、補間における近似の精度が高いことを必ずしも保証しないからである。

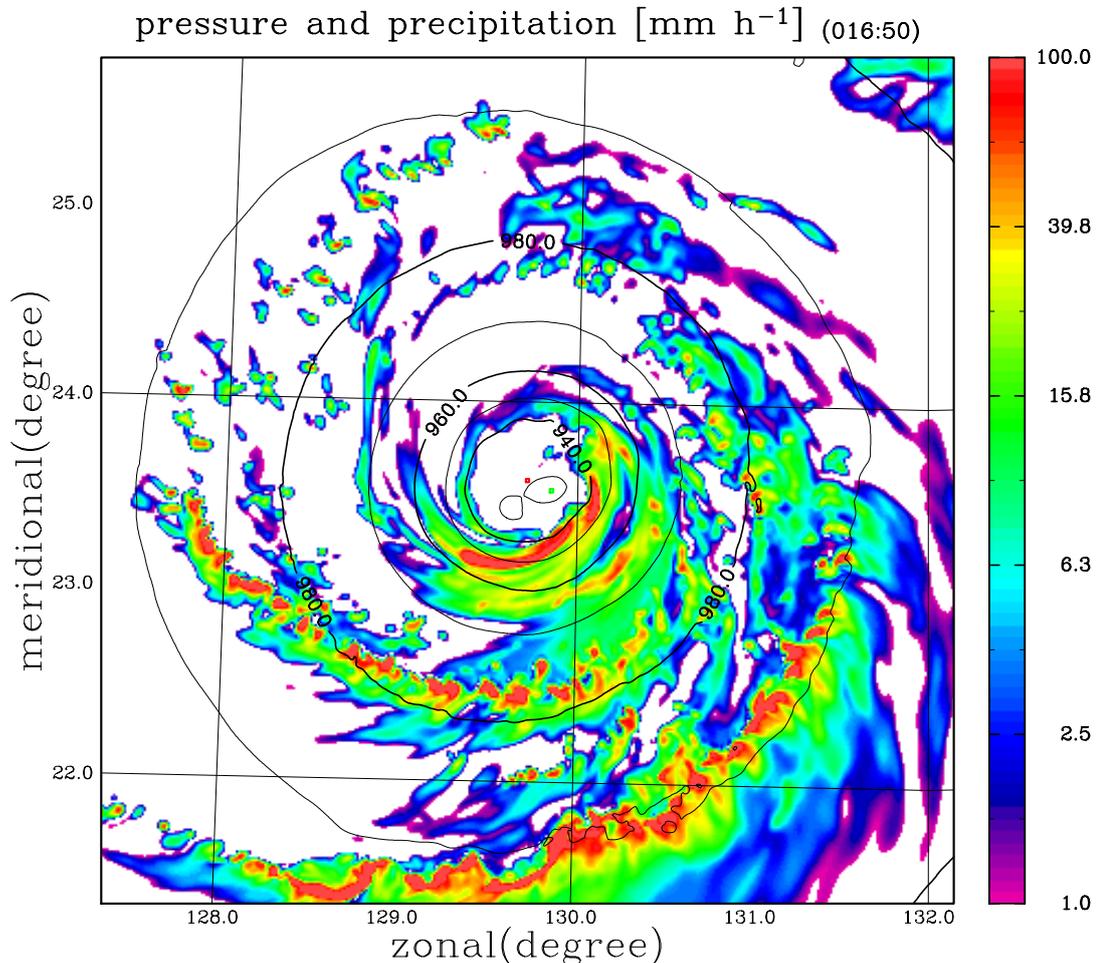


図 5.11: 非静力学数値モデルにおいて再現された典型的な台風における海面気圧の最低点 (緑点) と Braun (2002) の手法において推定された幾何的な中心点 (赤点). 等値線は海面気圧の分布, カラーは降水分布. この図が示すように, 内部コア域における局所的な気圧の変動によって, 幾何的な中心と最低気圧点が非常に異なることがわかる.

を表していた. しかし, 近年では数値モデルの非静力学化・高解像度化に伴い, 熱帯低気圧の内部コア (中心から半径 100 km 程度) の力学・熱力学構造を詳細に表現することが可能となった. すると, 低解像度な数値モデルによる熱帯低気圧の計算では表面化しなかった, 中心付近での局所的な気圧変動が顕著に見られるようになった^{*34}(Braun, 2002). この局所的な気圧変動により, 以前のような海面気圧の最低点で中心を定義する手法を用いると, 中心点が幾何的な中心点に対してその周囲を回転するという振動現象が見られるようになる (図 5.14 参照). Braun の用いた手法は, この中心点の振動を抑制する効果がある.

手法の概要は以下のようなになる.

^{*34}この局所的な気圧変動は, 数値モデルにおける非静力学動圧に起因するものである.

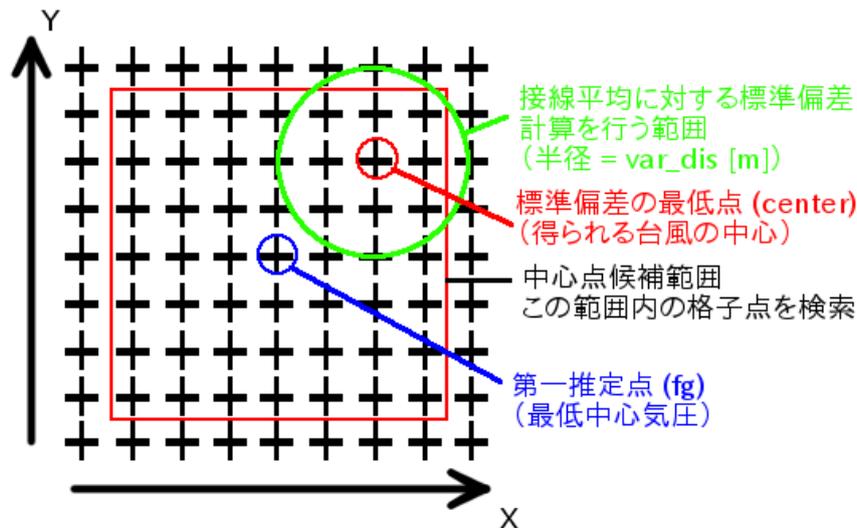


図 5.12: Braun 法の概念図 1. 第一推定点を中心に `search_dis` の長さの正方形領域 (赤線) 内に存在する格子点全てが中心点候補となる. この中心点候補の全てについて, 図 5.13 の方法で接線平均偏差を計算する (上図では緑線の範囲がそれに相当する).

1. 海面更正気圧の最低値をとる点を第一推定点 (図 5.12 の fg) とする.
2. 図 5.12 において, 第一推定点を中心として長さ L の正方形領域内 (図 5.12 の赤枠内) に存在する格子点すべてを探索候補点とする.
3. 探索候補点の全点について, その各点を中心として半径 R の円形領域内 (図 5.12 の緑線内) に存在する格子点の全てについて接線平均 (図 5.13) からの標準偏差を計算し, 計算された円形領域内の格子点全ての標準偏差を足し合わせる.
4. この時点で, 探索候補点全点について, 半径 R の円形領域内の標準偏差和の値が存在しているので, この和が最小となる格子点を真の中心点と定義する. これは, 気圧について, 最も円形 (軸対称構造) となっている点を探索していることになる.

このプロセスにおける各パラメータを実際のサブルーチンの引数と対応させると,

`fg` = 第一推定点, `var_dis` = 半径 R , `search_dis` = 探索候補領域 L

という対応関係になる.

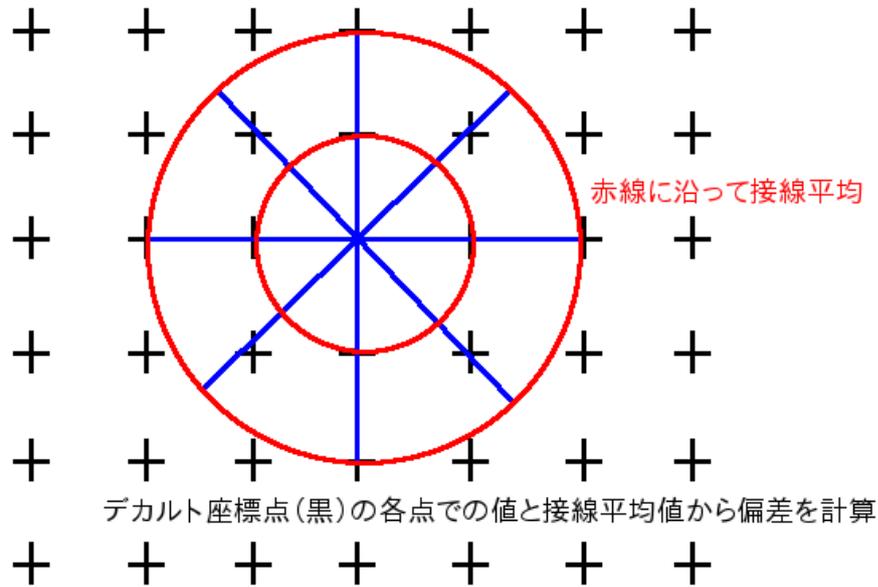


図 5.13: Braun 法 の概念図 2. 中心点候補の全てについて同じ方法で接線平均偏差を計算してその最低値をとる点 (つまり, 接線方向の変動が一番少ない点) を探索する. 接線平均の動径方向格子点間隔は元のデカルト格子点の間隔と同じにする.

5.7 Kurihara et al. (1990) によるフィルタリング処理

ここでは, ? で提案されている局所スムージング作用素を利用した, 任意波動成分のフィルター作用素の数学的根拠を証明する. 以下は, ? で構築されたフィルター作用素の根拠として挙げられている ? に基づいている.

離散化された任意の 1 次元データ z_i を考える. ここで, i は格子番号である. このとき, i を中心にした隣接 3 格子での最も簡単なスムージング要素は

$$\bar{z}_i \equiv \mu z_i + \frac{1}{2}(1 - \mu)(z_{i-1} + z_{i+1}) \quad (5.7.196)$$

である. ここで, \bar{z}_i はスムージングされた物理量を表す. μ はスムージングの際の重みであり, $\mu = 1/3$ ならば, 隣接 3 点での単純平均操作に等しくなる. 上式は

$$\bar{z}_i = z_i + \frac{1}{2}\nu(z_{i-1} + z_{i+1} - 2z_i) \quad (5.7.197)$$

と書き換えられる. ここで, $\nu = 1 - \mu$ である. ν は相変わらずスムージングでの重みを表す. 今, z_i は独立変数 x_i が張る空間において定義されており,

$$z_i = C + A \cos(k(x_i - \bar{x}))$$

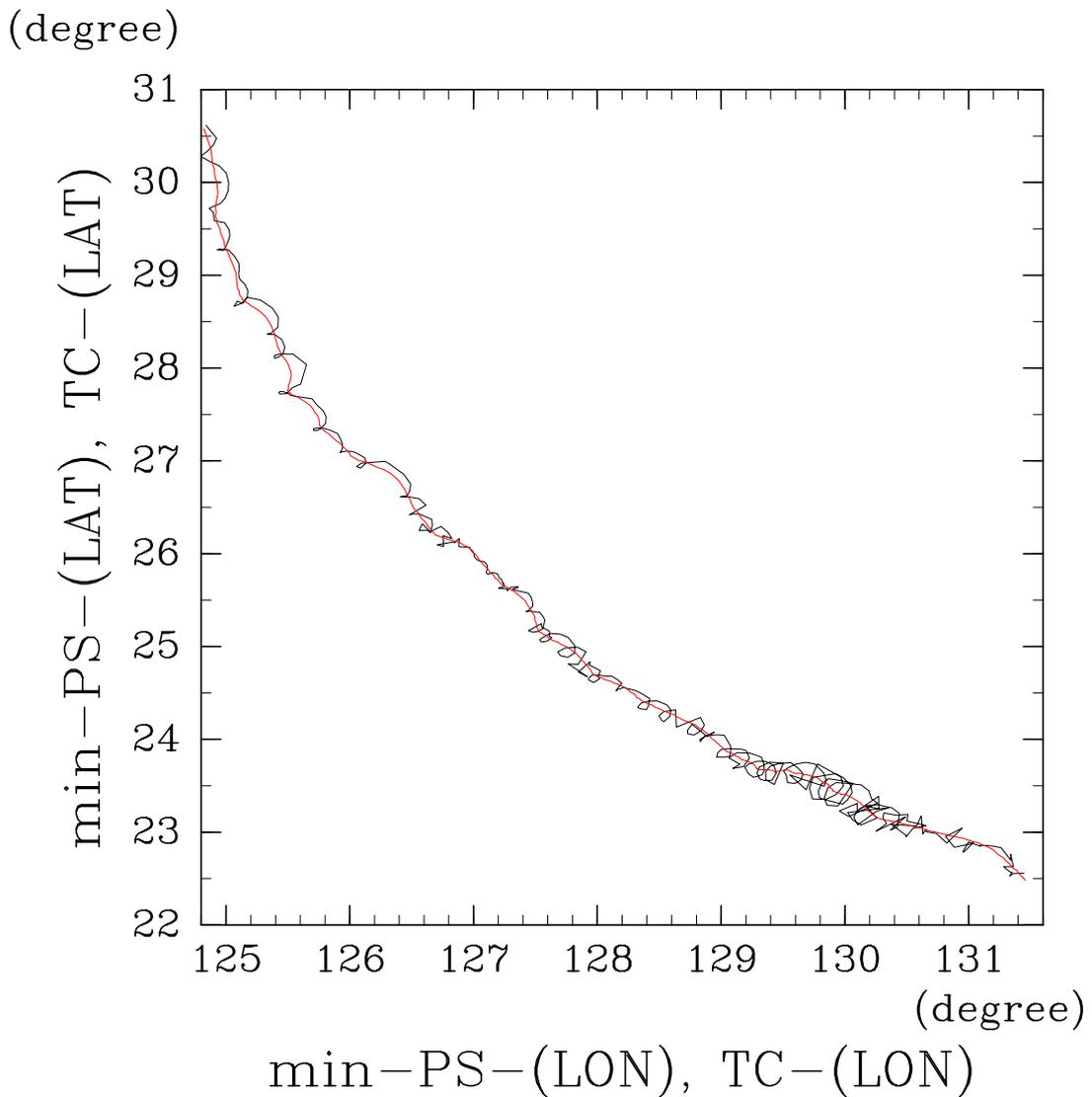


図 5.14: 図 5.11 の再現計算における緑点 (最低気圧点) と赤点 (Braun 手法) の距離の時間変化. この図では黒線が最低気圧点の軌跡を, 赤点が Braun 手法の中心点の軌跡を表している. この結果からも, 最低気圧点は顕著に振動していることが明らかである.

と表記できるとする. ここで, $k\bar{x}$ は任意の一定位相を表す. k は波数であり, 波長 L との間に $k = 2\pi/L$ という関係をもつ. このとき, 三角関数の合成から

$$\begin{aligned}
 z_{i\pm 1} &= C + A \cos k(x_{i\pm 1} - \bar{x}) \\
 &= C + A \cos k(x_i \pm \Delta x - \bar{x}) \\
 &= C + A [\cos k(x_i - \bar{x}) \cos k\Delta x \mp \sin k(x_i - \bar{x}) \sin k\Delta x]
 \end{aligned}$$

となる (複号同順). ここで, Δx は空間 x_i の格子点距離である. なお, ここでは x_i は等間隔に配置されているとする. 上式を (5.7.197) に代入すると,

$$\begin{aligned}\bar{z}_i &= C + A \cos k(x_i - \bar{x}) + \nu [A \cos k(x_i - \bar{x}) \cos k\Delta x - A \cos k(x_i - \bar{x})] \\ &= C + [1 - \nu(1 - \cos k\Delta x)] A \cos k(x_i - \bar{x})\end{aligned}\quad (5.7.198)$$

と整理される. したがって, このスムージングは, ν の値によって z_i のもつ波数も位相も変化させないスムージングとなっていることがわかる. 一方, その振幅については, $[1 - \nu(1 - \cos k\Delta x)]$ 倍変化させることがわかる. 今, ν は使用者によって任意に決めることができる. もし, (5.7.198) 式の右辺第 2 項の係数がゼロとなる:

$$1 - \nu(1 - \cos k\Delta x) = 0$$

ように ν を設定すれば, (5.7.198) 式によって波数 k の振幅がゼロとなり, その波数成分を完全に除去することができる. これは, スムージング作用素 (5.7.196) が重みの選び方で, 特定波数の成分を数学的に完全にフィルターアウトすることができることを意味している (すなわち, フィルター作用素として機能することを意味している).

これまでの議論では, z_i が 1 つの波数成分のみをもっているときを考えたが, 任意の波の重ね合わせでも同じ議論が可能である. 物理量 z が空間 x についてフーリエ級数で表現されるとする:

$$z_i = \sum_n \hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}).$$

このとき, スムージング作用素 (5.7.197) は上と同様の三角関数合成により,

$$\begin{aligned}\bar{z}_i &= \sum_n \left[\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2}\nu (\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \Delta x - \bar{x}) + \hat{z}_n \cos k_n(x_i + \Delta x - \bar{x}) - 2\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x})) \right] \\ &= \sum_n [\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}) + \nu (\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}) \cos k_n\Delta x - \hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}))] \\ &= \sum_n [1 - \nu(1 - \cos k_n\Delta x)] \hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x})\end{aligned}\quad (5.7.199)$$

が得られる. ここでも, ν は使用者が任意に決定できるため, ある特定の 1 つの波数 k_c について

$$1 - \nu(1 - \cos k_c\Delta x) = 0$$

すなわち,

$$\nu = (1 - \cos k_c\Delta x)^{-1}\quad (5.7.200)$$

となるように ν を指定すれば, スムージングによって z に含まれる波数 k_c のモードは完全にフィルターアウトすることができる. このとき, ν は k のみに依存するので, k_c 以外の波数成分は振幅がゼロにならずに z に残ることになる. 異なる複数の波をフィルターするには, スムージング作用素 (5.7.197) を重み ν を変えて複数回行えばよい. 異なる M 個の波数成分を除去するスムージングを

$$\bar{z}_i^M \equiv \bar{z}_i^{M-1} + \frac{1}{2}\nu (\bar{z}_{i-1}^{M-1} + \bar{z}_{i+1}^{M-1} - 2\bar{z}_i^{M-1})\quad (5.7.201)$$

として定義する. l 回目のスムージング係数は

$$\nu_l = (1 - \cos k_{m(l)}\Delta x)$$

となる. ここで, $k_{m(l)}$ は l 回目でフィルタアウトされる波数を意味する. スムージング作用素 (5.7.197) が波数と位相を変化させず, 振幅のみを変化させる:

$$\bar{z}_i^M = \sum_n \bar{z}_n^M \cos k_n(x_i - \bar{x})$$

であることに注意すれば, (5.7.201) を (5.7.199) のようにフーリエ級数で表現することを考えると,

$$\bar{z}_i^M = \sum_n \bar{z}_n^M \cos k_n(x_i - \bar{x}) = \sum_n [1 - \nu_M (1 - \cos k_n\Delta x)] \bar{z}_n^{M-1} \cos k_n(x_i - \bar{x})$$

という漸化式が成り立つ. 上式はフーリエの各モード n で独立に成り立つことに注意すると, n 番目のモードで

$$\bar{z}_n^M = [1 - \nu_M (1 - \cos k_n\Delta x)] \bar{z}_n^{M-1}$$

が成り立つ. よって, ただちに \bar{z}_n^M に対して,

$$\bar{z}_n^M = \hat{z}_n \prod_{l=1}^M [1 - \nu_l (1 - \cos k_n\Delta x)] \quad (5.7.202)$$

という関係が得られる. この式は, M 個の波数のフィルタリングによって, フィルタアウトされなかった成分がとる, フィルタ後の振幅を表している. つまり, フィルタアウトされなかった成分はこの M 回のフィルタ作用によって, 振幅がもとの

$$\prod_{l=1}^M [1 - \nu_l (1 - \cos k_n\Delta x)]$$

倍になるということを意味する. !!!!! 以降, Shuman の 図 1 の説明と 2 次元版の導出.

なお, ? では, ν を

$$\nu = (1 - \cos 2\pi/m)^{-1}, \quad m = 2, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 2, 8, 9, 2 \quad (5.7.203)$$

という順番で 11 回フィルタ操作を行うと, $2\Delta x$ から 9Δ までの波長をもつ波が完全にフィルタアウトされると述べている. これは, (5.7.200) 式と $k = 2\pi/L$ という関係を考えて,

$$\nu = (1 - \cos k_c\Delta x)^{-1} = (1 - \cos 2\pi\Delta x/m\Delta x)^{-1}$$

となることから, 波長 $L = m\Delta x$ の波が (5.7.203) 式でフィルタアウトされることになる. このとき, フィルタアウトされない成分の振幅が (5.7.203) の操作でどの程度変化するかを見積もる. フィルタアウトされない任意の波数を $k_r = 2\pi/R\Delta x$ とすると, (5.7.202) 式から上の 11 回のスムージング操作によって, その振幅は

$$\bar{z}_r^{11} = \hat{z}_r \prod_{l=1}^{11} [1 - \nu_l (1 - \cos 2\pi/R)] \quad (5.7.204)$$

となる。たとえば, $R = 15, 20, 30$ の場合^{*35}の振幅はそれぞれ,

$$R = 15 : 0.179, \quad R = 20 : 0.400, \quad R = 30 : 0.675$$

となり, それぞれオリジナルの振幅の 82 %, 60 %, 32 % まで減少することがわかる。

5.8 衛星の視差補正

静止気象衛星から観測される雲は, 衛星の視差によって実際の位置からずれた点として観測されている。ここでは視差が発生する理由とその視差を補正する手法を詳説する。まずは必要な数学的知識を記載する。

5.8.1 楕円の幾何学

楕円の方程式

3次元空間 (x, y, z) 上での楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5.8.205)$$

このとき, 極座標系 (r, θ, λ) で表記すると,

$$x = a \sin \theta \cos \lambda, \quad y = b \sin \theta \sin \lambda, \quad z = c \cos \theta. \quad (5.8.206)$$

a, b, c はそれぞれ x, y, z 方向の楕円径の半分を表す。

楕円の法線ベクトル・法線方向の方程式

楕円上の点 (x_0, y_0, z_0) を通る単位法線ベクトル $\mathbf{n}_{\text{ellip}}$ は

$$\begin{bmatrix} (x_0/a^2) \\ (y_0/b^2) \\ (z_0/c^2) \end{bmatrix} \left[\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right]^{-1/2} \quad (5.8.207)$$

回転楕円体の方程式

回転楕円体の場合, 各軸の径のうち 2 つが同じ値をもつ。したがって, 楕円に関する方程式でのパラメータ (a, b, c) のうち, 任意の 2 つを同じ値とすることで回転楕円体に関する方程式を表すことができる。

^{*35}? に具体的に明記されている波長である。

— 地心緯度 (Geocentric latitude) と地理緯度 (Geographic latitude) —

回転楕円体上で赤道面 (回転軸に直交する面) から極 (回転軸) 方向に図った角度を緯度と呼ぶ. 楕円体中心を原点として図った緯度を地心緯度 (**Geocentric latitude**), 楕円体上の法線と赤道面の交点を原点として図った緯度を地理緯度 (**Geographic latitude**) と呼ぶ (それぞれ図 5.15 の ψ と ϕ). 地心緯度 (ψ) と地理緯度 (ϕ) の間には以下の関係が成り立つ:

$$\psi = \arctan [(1 - e^2) \tan \phi]. \quad (5.8.208)$$

ここで e は離心率であり, 回転楕円体の極方向の軸半径を r_p , 回転軸と直交方向の軸半径を r_e としたとき,

$$e^2 = 1 - \frac{r_p^2}{r_e^2}$$

で定義される.

5.8.2 ベクトルの幾何学

— ベクトルを用いた直線の媒介変数表示 —

デカルト座標系 (x, y, z) 上の点 (x_0, y_0, z_0) を通り, 方向ベクトル $\mathbf{d}^T = (l, m, n)$ となる直線の方程式は

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (5.8.209)$$

媒介変数 t を用いると,

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \quad (5.8.210)$$

$\mathbf{a}^T = (x_0, y_0, z_0)$ とすると, 直線上に存在するベクトル \mathbf{r} は

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}. \quad (5.8.211)$$

2 点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ を通る直線の媒介変数 (t) 表示は, $\mathbf{A}^T = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{B}^T = (x_2, y_2, z_2)$ を用いて,

$$(1 - t)\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1 - t)x_1 + tx_2 \\ (1 - t)y_1 + ty_2 \\ (1 - t)z_1 + tz_2 \end{bmatrix}. \quad (5.8.212)$$

5.8.3 視差補正の必要性

図 5.15 は回転楕円体として近似された地球の赤道 ($\phi = 0$) に位置する静止衛星と、地球の位置関係を示している。衛星から地球上を見ると、地球上の位置 (x_a, y_a, z_a) の点に直立した高度 h の雲の雲頂温度 T_B を観測することになる。しかし、衛星から見るとその地球上の位置は (x_0, y_0, z_0) として観測されることになる。衛星画像には実際の雲が発達している地球上の位置ではなく、衛星からの視線方向が地球表面と交わった位置として記録される。そこでこの衛星画像から、実際の雲が存在する位置に輝度温度を配置し直す必要がある。この補正を視差補正と呼ぶ^{*36}。

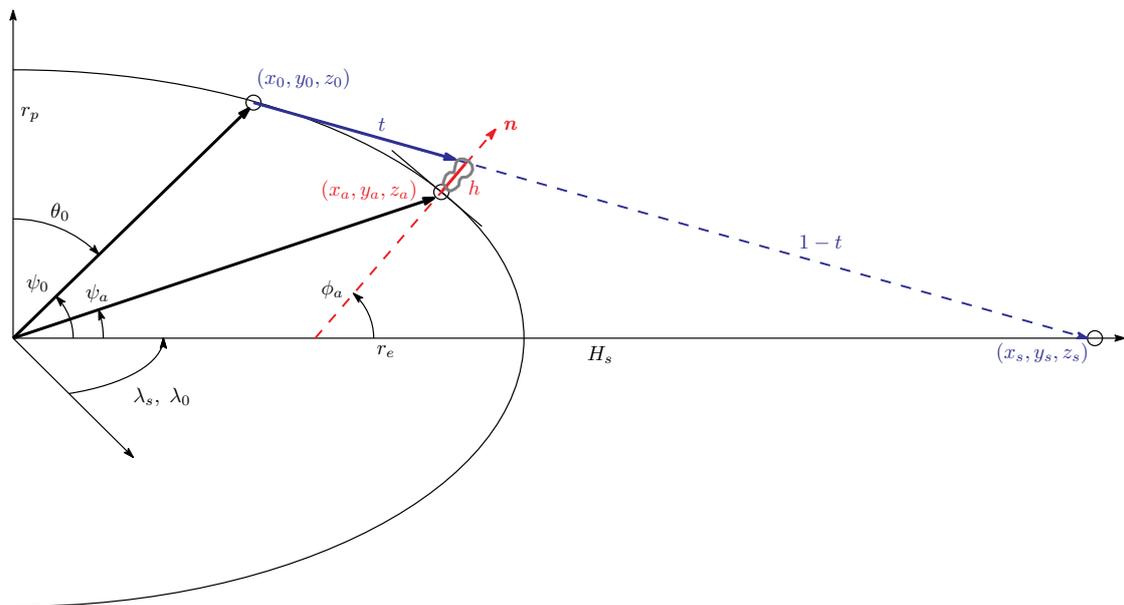


図 5.15: 視差補正の概念図。各記号は本文に一致する。地球は赤道半径 r_e と極半径 r_p が異なる回転楕円体として近似される。衛星は (x_s, y_s, z_s) に位置しており、そこから地球上の (x_a, y_a, z_a) に存在する雲頂高度 h の雲を観測すると、その雲は (x_0, y_0, z_0) の位置に存在するように観測される。補正で求めたい物理量は衛星の位置と観測される雲の位置と雲頂高度の情報から実際の雲の位置 (x_a, y_a, z_a) での緯度 (ϕ_a)、経度 (λ_a) である。青点線のベクトルが補正前の雲の位置ベクトルと衛星の位置ベクトルの差であり、このベクトルの t 倍の位置に求めたい雲が存在する。赤点線のベクトルは楕円上の点 (x_a, y_a, z_a) を通る法線ベクトル \mathbf{n} であり、単位法線ベクトル $\mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ を (x_a, y_a, z_a) を始点として h 倍した点が青点線ベクトルの t 倍の点と一致する。これらの関係を元に未知変数を解いて補正を行う。太い黒実線のベクトルはそれぞれ補正前後の雲が存在する地球表面上での位置ベクトルである。

^{*36}例えば、気象庁 (2017; <https://www.jma.go.jp/jma/kishou/books/yohkens/yohkens.html>)

5.8.4 視差補正の定式化

引き続き、図 5.15 を考える。静止気象衛星の場合、地球との相対位置は変化しないので、衛星と雲頂の間の直線は自転する地球上の座標系については相対的に不変である。よって、視差補正によって、もとの衛星画像から実際に雲が存在する位置を求めるには、衛星画像のとある点と衛星の存在する点を結ぶ直線上で、地球表面からの法線距離が h となる点を見つけ、その点での緯度経度を求めればよいことになる。これは具体的には以下の過程を経ることで厳密に求めることができる。

衛星画像と衛星点の直線の導出

自転する地球上でデカルト座標 (x, y, z) を考えたとき、衛星画像のとある点 (x_0, y_0, z_0) と衛星の存在点 (x_s, y_s, z_s) を通る直線の方程式は (5.8.212) から媒介変数 t を用いて、

$$\begin{bmatrix} (1-t)x_0 + tx_s \\ (1-t)y_0 + ty_s \\ (1-t)z_0 + tz_s \end{bmatrix}. \quad (5.8.213)$$

地球表面の法線の導出

任意の地球表面上の点 (x_a, y_a, z_a) での法線は (5.8.207) と (5.8.211) から媒介変数 (s) を用いて

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} (r_p/r_e)x_a \\ (r_p/r_e)y_a \\ (r_e/r_p)z_a \end{bmatrix} \left[r_p^2 - \left(1 - \frac{r_e^2}{r_p^2}\right) z_a^2 \right]^{-1/2}. \quad (5.8.214)$$

ここで、 r_e は赤道半径、 r_p は極半径である。このとき、 s の係数となる法線ベクトルは (5.8.207) から単位法線ベクトルなので、点 (x_a, y_a, z_a) からの距離は s に一致する。よって、

$$h \begin{bmatrix} (r_p/r_e)x_a \\ (r_p/r_e)y_a \\ (r_e/r_p)z_a \end{bmatrix} \left[r_p^2 - \left(1 - \frac{r_e^2}{r_p^2}\right) z_a^2 \right]^{-1/2}. \quad (5.8.215)$$

が (x_a, y_a, z_a) から延びる高さ h の法線ベクトルである。

2 直線の交点の導出

(5.8.213) で表された直線と (5.8.214) で表された法線の交点は

$$(5.8.213) = (5.8.214)$$

を満たす点^{*37}, すなわち

$$(1-t)x_0 + tx_s = x_a + [h(r_p/r_e)x_a] [r_p^2 - (1 - r_e^2/r_p^2) z_a^2]^{-1/2}, \quad (5.8.216)$$

$$(1-t)y_0 + ty_s = y_a + [h(r_p/r_e)y_a] [r_p^2 - (1 - r_e^2/r_p^2) z_a^2]^{-1/2}, \quad (5.8.217)$$

$$(1-t)z_0 + tz_s = z_a + [h(r_e/r_p)z_a] [r_p^2 - (1 - r_e^2/r_p^2) z_a^2]^{-1/2}. \quad (5.8.218)$$

点 (x_a, y_a, z_a) は楕円上の点であるから,

$$\frac{x_a^2}{r_e^2} + \frac{y_a^2}{r_e^2} + \frac{z_a^2}{r_p^2} = 1. \quad (5.8.219)$$

上式に (5.8.216), (5.8.217) を代入して,

$$\frac{1}{r_e^2} \frac{[(1-t)x_0 + tx_s]^2 + [(1-t)y_0 + ty_s]^2}{[1 + h(r_p/r_e)\gamma(z_a)]^2} = 1 - \frac{z_a^2}{r_p^2} \quad (5.8.220)$$

として x_a, y_a を消去する. ここで $\gamma(z_a) = [r_p^2 - (1 - r_e^2/r_p^2) z_a^2]^{-1/2}$ とした. 左辺が t のみ, 右辺が z_a のみとなるように整理すると,

$$[x_0 + t(x_s - x_0)]^2 + [y_0 + t(y_s - y_0)]^2 = \left(1 - \frac{z_a^2}{r_p^2}\right) [r_e + hr_p\gamma(z_a)]^2. \quad (5.8.221)$$

(5.8.218) 式を t について解くと,

$$t = \frac{-z_0 + z_a + h(r_e/r_p)z_a\gamma(z_a)}{z_s - z_0}. \quad (5.8.222)$$

これを (5.8.221) に代入すると,

$$\begin{aligned} & \left[x_0 + \frac{-z_0 + z_a + h(r_e/r_p)z_a\gamma(z_a)}{z_s - z_0} (x_s - x_0) \right]^2 \\ & + \left[y_0 + \frac{-z_0 + z_a + h(r_e/r_p)z_a\gamma(z_a)}{z_s - z_0} (y_s - y_0) \right]^2 = \left(1 - \frac{z_a^2}{r_p^2}\right) [r_e + hr_p\gamma(z_a)]^2 \end{aligned} \quad (5.8.223)$$

という z_a のみの方程式に帰着される. これを以下のように整理すると,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{x_0 z_s - z_0 x_s}{z_s - z_0} \gamma^{-1}(z_a) + z_a \frac{\gamma^{-1}(z_a) + h(r_e/r_p)}{z_s - z_0} (x_s - x_0) \right]^2 \\ & + \left[\frac{y_0 z_s - z_0 y_s}{z_s - z_0} \gamma^{-1}(z_a) + z_a \frac{\gamma^{-1}(z_a) + h(r_e/r_p)}{z_s - z_0} (y_s - y_0) \right]^2 \\ & = \left(1 - \frac{z_a^2}{r_p^2}\right) [r_e \gamma^{-1}(z_a) + hr_p]^2 \\ \Rightarrow & \left\{ [x_0 z_s - z_0 x_s + z_a (x_s - x_0)] \gamma^{-1}(z_a) + z_a h \frac{r_e}{r_p} (x_s - x_0) \right\}^2 \\ & + \left\{ [y_0 z_s - z_0 y_s + z_a (y_s - y_0)] \gamma^{-1}(z_a) + z_a h \frac{r_e}{r_p} (y_s - y_0) \right\}^2 \\ & = (z_s - z_0)^2 \left(r_e^2 - \frac{r_e^2}{r_p^2} z_a^2 \right) \left[\gamma^{-1}(z_a) + h \frac{r_p}{r_e} \right]^2 \end{aligned}$$

^{*37}(5.8.213) 式の 3 成分の値と (5.8.214) 式の 3 成分の値がそれぞれ等しい, すなわち両方が交わる点を表している.

実際に展開すると,

$$\begin{aligned}
& [x_0 z_s - z_0 x_s + z_a(x_s - x_0)]^2 \gamma^{-2}(z_a) + z_a^2 h^2 \frac{r_e^2}{r_p^2} (x_s - x_0)^2 \\
& + [y_0 z_s - z_0 y_s + z_a(y_s - y_0)]^2 \gamma^{-2}(z_a) + z_a^2 h^2 \frac{r_e^2}{r_p^2} (y_s - y_0)^2 \\
& + 2 [x_0 z_s - z_0 x_s + z_a(x_s - x_0)] \gamma^{-1}(z_a) z_a h \frac{r_e}{r_p} (x_s - x_0) \\
& + 2 [y_0 z_s - z_0 y_s + z_a(y_s - y_0)] \gamma^{-1}(z_a) z_a h \frac{r_e}{r_p} (y_s - y_0) \\
& = (z_s - z_0)^2 \left(r_e^2 - \frac{r_e^2}{r_p^2} z_a^2 \right) \left[\gamma^{-2}(z_a) + h^2 \frac{r_p^2}{r_e^2} + 2\gamma^{-1}(z_a) h \frac{r_p}{r_e} \right].
\end{aligned}$$

さらに整理して,

$$\begin{aligned}
& \left\{ [x_0 z_s - z_0 x_s + z_a(x_s - x_0)]^2 + [y_0 z_s - z_0 y_s + z_a(y_s - y_0)]^2 \right\} \gamma^{-2}(z_a) \\
& + z_a^2 h^2 \frac{r_e^2}{r_p^2} [(x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2] \\
& + 2 \{ [x_0 z_s - z_0 x_s + z_a(x_s - x_0)] (x_s - x_0) + [y_0 z_s - z_0 y_s + z_a(y_s - y_0)] (y_s - y_0) \} \gamma^{-1}(z_a) z_a h \frac{r_e}{r_p} \\
& = (z_s - z_0)^2 \left(r_e^2 - \frac{r_e^2}{r_p^2} z_a^2 \right) \left[\gamma^{-2}(z_a) + h^2 \frac{r_p^2}{r_e^2} + 2\gamma^{-1}(z_a) h \frac{r_p}{r_e} \right]. \\
\Rightarrow & \left\{ [x_0 z_s - z_0 x_s + z_a(x_s - x_0)]^2 + [y_0 z_s - z_0 y_s + z_a(y_s - y_0)]^2 + (z_s - z_0)^2 \left(\frac{r_e^2}{r_p^2} z_a^2 - r_e^2 \right) \right\} \gamma^{-2}(z_a) \\
& + z_a^2 h^2 \frac{r_e^2}{r_p^2} \left[(x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2 + (z_s - z_0)^2 \frac{r_p^2}{r_e^2} \right] - (z_s - z_0)^2 h^2 r_p^2 \\
& = -2 \{ [(x_0 z_s - z_0 x_s)(x_s - x_0) + (y_0 z_s - z_0 y_s)(y_s - y_0)] z_a \\
& \quad + z_a^2 [(x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2 + (z_s - z_0)^2] - (z_s - z_0)^2 r_p^2 \} \gamma^{-1}(z_a) h \frac{r_e}{r_p}.
\end{aligned}$$

両辺を 2 乗すると, $\gamma(z_a)$ の平方根が消えて,

$$\begin{aligned}
& \left\{ [x_0 z_s - z_0 x_s + z_a(x_s - x_0)]^2 + [y_0 z_s - z_0 y_s + z_a(y_s - y_0)]^2 + (z_s - z_0)^2 \left(\frac{r_e^2}{r_p^2} z_a^2 - r_e^2 \right) \right\} \gamma^{-2}(z_a) \\
& + z_a^2 h^2 \frac{r_e^2}{r_p^2} [(x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2] + h^2 (z_s - z_0)^2 (z_a^2 - r_p^2) \Big|^2 \\
& = 4 \{ [(x_0 z_s - z_0 x_s)(x_s - x_0) + (y_0 z_s - z_0 y_s)(y_s - y_0)] z_a \\
& \quad + z_a^2 [(x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2 + (z_s - z_0)^2] - (z_s - z_0)^2 r_p^2 \}^2 \gamma^{-2}(z_a) h^2 \frac{r_e^2}{r_p^2}.
\end{aligned}$$

いくつかを別の記号で置き換えて ($X_s = x_0 z_s - z_0 x_s$, $Y_s = y_0 z_s - z_0 y_s$, $X_0 = x_s - x_0$, $Y_0 = y_s - y_0$, $Z_0 = z_s - z_0$, $R = r_e/r_p$),

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ [X_s + z_a X_0]^2 + [Y_s + z_a Y_0]^2 + Z_0^2 (R^2 z_a^2 - r_e^2) \right\} \gamma^{-2}(z_a) + z_a^2 h^2 R^2 [X_0^2 + Y_0^2] + h^2 Z_0^2 (z_a^2 - r_p^2) \right|^2 \\ &= 4 \left\{ [X_s X_0 + Y_s Y_0] z_a + z_a^2 [X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2] - Z_0^2 r_p^2 \right\}^2 \gamma^{-2}(z_a) h^2 R^2. \end{aligned} \quad (5.8.224)$$

これは z_a について最高 8 次の方程式であるため、数値的に解かれる。 z_a は重解を持たない場合、8 種類の異なる根が存在するが^{*38}、視差補正された z 座標は必ず元の z_0 より衛星の直下点に近い場所となる (かつ $0 < t < 1$)。ゆえに、 z_a を数値的に求めた後、 $z_0 > z_a$ かつ、 $0 < t < 1$ であることを確認して最終的に根として求める。 z_a が得られた後、(5.8.222) 式で t を求め、そこから (5.8.216), (5.8.217) で x_a , y_a を求める。実際に数値的に求める際は、桁落ちを考慮するため (5.8.224) を r_p で規格化して

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\frac{(X_s + z_a X_0)^2 + (Y_s + z_a Y_0)^2 + Z_0^2 R^2 z_a^2}{r_p^4} - \frac{Z_0^2 R^2}{r_p^2} \right] \left[1 - (1 - R^2) \frac{z_a^2}{r_p^2} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{z_a^2 h^2 R^2 (X_0^2 + Y_0^2) + Z_0^2}{r_p^4} - h^2 \frac{Z_0^2}{r_p^4} \right\}^2 \\ &= 4 \left\{ \frac{X_s X_0 + Y_s Y_0}{r_p^4} z_a + z_a^2 \frac{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}{r_p^4} - \frac{Z_0^2}{r_p^2} \right\}^2 \left[1 - (1 - R^2) \frac{z_a^2}{r_p^2} \right] \frac{h^2}{r_p^2} R^2. \end{aligned} \quad (5.8.225)$$

求解の方法としては $z_0 \leq z_a \leq 0$ で二分法探索やニュートン法によって数値的に解かれる。なお、補正の距離が z_0 に極端に近く、意味のある根が $0 \leq z_a \leq z_0$ に存在していることに注意する。二分法の場合はこの特徴を活かして、根を挟んだ最初の二点は z_0 と 0 あるいは $0.9z_0$ など、 z_0 とゼロの間で z_0 に充分近い点を選択できる。どちらの数値解法を用いる場合も、解くべき z_a の関数 $F(z_a)$ は (5.8.225) から

$$\begin{aligned} F(z_a) \equiv & \left\{ \left[\frac{(X_s + z_a X_0)^2 + (Y_s + z_a Y_0)^2 + Z_0^2 R^2 z_a^2}{r_p^4} - \frac{Z_0^2 R^2}{r_p^2} \right] \left[1 - (1 - R^2) \frac{z_a^2}{r_p^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{z_a^2 h^2 R^2 (X_0^2 + Y_0^2) + Z_0^2}{r_p^4} - h^2 \frac{Z_0^2}{r_p^4} \right\}^2 \\ & - 4 \left\{ \frac{X_s X_0 + Y_s Y_0}{r_p^4} z_a + z_a^2 \frac{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}{r_p^4} - \frac{Z_0^2}{r_p^2} \right\}^2 \left[1 - (1 - R^2) \frac{z_a^2}{r_p^2} \right] \frac{h^2}{r_p^2} R^2. \end{aligned} \quad (5.8.226)$$

実際に視差補正を行う際の無次元化 (プライム付き記号) した式 (長さの次元をもつ変

^{*38}図?? を見ると明らかであるが、物理的な根は 4 種類見つかる。その中で $0 \leq t \leq 1$ 範囲内に存在するのは 1 つしかないため、視差補正に用いる根の同定が可能である。

数を r_p で規格化したもの) を以下に記載する:

$$(5.8.206) : x' = R \sin \theta \cos \lambda, \quad y' = R \sin \theta \sin \lambda, \quad z' = \cos \theta, \quad (5.8.227)$$

$$(5.8.216) : (1-t)x'_0 + tx'_s = x'_a + [h'R^{-1}x'_a] [1 - (1-R^2)z_a'^2]^{-1/2}, \quad (5.8.228)$$

$$(5.8.217) : (1-t)y'_0 + ty'_s = y'_a + [h'R^{-1}y'_a] [1 - (1-R^2)z_a'^2]^{-1/2}, \quad (5.8.229)$$

$$(5.8.218) : (1-t)z'_0 + tz'_s = z'_a + [h'Rz'_a] [1 - (1-R^2)z_a'^2]^{-1/2}, \quad (5.8.230)$$

$$(5.8.219) : x_a'^2 + y_a'^2 + R^2 z_a'^2 = R^2, \quad (5.8.231)$$

$$(5.8.226) : F(z'_a) \equiv \left\{ \left[(X'_s + z'_a X'_0)^2 + (Y'_s + z'_a Y'_0)^2 + Z_0'^2 R^2 z_a'^2 - Z_0'^2 R^2 \right] [1 - (1-R^2)z_a'^2] \right. \\ \left. + z_a'^2 h'^2 [R^2 (X_0'^2 + Y_0'^2) + Z_0'^2] - h'^2 Z_0'^2 \right\}^2 \\ - 4 \left\{ (X'_s X'_0 + Y'_s Y'_0) z'_a + z_a'^2 (X_0'^2 + Y_0'^2 + Z_0'^2) - Z_0'^2 \right\}^2 [1 - (1-R^2)z_a'^2] h'^2 R^2 \quad (5.8.232)$$

5.8.5 視差補正の処理手順

以下では実際に入力データを用いて視差補正を行う手順を説明する。

入力データ

補正時に値が変化しないパラメータは以下のとおりである:

記号	値	単位	説明
r_e	6378.1370	km	赤道半径
r_p	6356.7523	km	極半径
R	1.00336409	無次元	r_e/r_p
H_s	42164	km	地球中心から衛星までの距離
ϕ_s	0.0	°	地球の緯度経度座標で測った衛星の緯度
λ_s	140.7	°	地球の緯度経度座標で測った衛星の経度
ϕ_0	引数	°	補正前のある格子点での緯度
λ_0	引数	°	補正前のある格子点での経度
h	引数	km	(λ_0, ϕ_0) での雲頂高度 (輝度温度から換算)

球座標系換算

入力されたデータを全て (無次元化) 球座標系に換算する。まず入力された緯度は地理緯度であるため, (5.8.208) を用いて地心緯度に変換する:

$$\psi_s = \arctan [R^{-2} \tan \phi_s], \quad \psi_0 = \arctan [R^{-2} \tan \phi_0].$$

衛星の位置は

$$x_s = H_s \sin \theta \cos \lambda, \quad y_s = H_s \sin \theta \sin \lambda, \quad z_s = H_s \cos \theta$$

で与えられるので, (5.8.227) と同様に r_p で規格化して

$$x'_s = (H_s/r_p) \sin \theta_s \cos \lambda_s, \quad y'_s = (H_s/r_p) \sin \theta_s \sin \lambda_s, \quad z'_s = (H_s/r_p) \cos \theta_s. \quad (5.8.233)$$

ここで $\theta_s = \pi/2 - \psi_s$ であることに注意する. 補正前の格子点での球座標系変換は (5.8.227) 式から

$$x'_0 = R \sin \theta_0 \cos \lambda_0, \quad y'_0 = R \sin \theta_0 \sin \lambda_0, \quad z'_0 = \cos \theta_0. \quad (5.8.234)$$

先と同様に $\theta_0 = \pi/2 - \psi_0$ であることに注意する.

補正計算

(5.8.233), (5.8.234) で変換された座標情報から (5.8.232) を用いて z'_a を求める. (5.8.228), (5.8.229), (5.8.230) を (5.8.231) に代入して x'_a, y'_a を消去した式:

$$\begin{aligned} \alpha t^2 + 2\beta t + \varepsilon &= 0, \\ \alpha &\equiv X_0'^2 + Y_0'^2 + R^2 Z_0'^2 \delta^2, \\ \beta &\equiv (x'_0 X'_0 + y'_0 Y'_0 + R^2 z'_0 Z'_0) \delta^2, \\ \varepsilon &\equiv x_0'^2 + y_0'^2 + (R^2 z_0'^2) \delta^2 \\ &\quad - \left[R + h' \sqrt{1 - (1 - R^2) z_a'^2} \right]^2, \\ \delta &\equiv \frac{1 + [h' R^{-1}] [1 - (1 - R^2) z_a'^2]^{-1/2}}{1 + [h' R] [1 - (1 - R^2) z_a'^2]^{-1/2}} \end{aligned} \quad (5.8.235)$$

に得られた z'_a を代入すると, t について解いた根

$$t = \frac{\beta}{\alpha} \left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha \varepsilon}{\beta^2}} \right] \quad (5.8.236)$$

が得られる. 興味のある t の範囲はもちろん $0 \leq t \leq 1$ であり, $\beta^2 - \alpha \varepsilon \geq 0$ を満たす必要がある. 得られた z'_a, t から (5.8.228), (5.8.229):

$$x'_a = [(1-t)x'_0 + tx'_s] \left\{ 1 + [h' R^{-1}] [1 - (1 - R^2) z_a'^2]^{-1/2} \right\}^{-1} \quad (5.8.237)$$

$$y'_a = [(1-t)y'_0 + ty'_s] \left\{ 1 + [h' R^{-1}] [1 - (1 - R^2) z_a'^2]^{-1/2} \right\}^{-1} \quad (5.8.238)$$

を用いて x'_a, y'_a を求める. 以上で得られた x'_a, y'_a, z'_a が (無次元で) 視差補正された位置情報になる.

緯度経度系換算

得られた視差補正情報を緯度経度に換算する. これは (5.8.234) を逆にたどることで,

$$\theta_a = \cos^{-1} z'_a, \quad \lambda_a = \tan^{-1} \frac{y'_a}{x'_a}. \quad (5.8.239)$$

θ_a は地心緯度 ψ_a と

$$\psi_a = \frac{\pi}{2} - \theta_a$$

の関係にあり, さらに地心緯度と地理緯度 ϕ_a は (5.8.208) から

$$\phi_a = \tan^{-1} R^2 \tan \psi_a.$$

赤道面での場合

赤道面上の格子点を視差補正する場合, $z_0 = z_a = 0$ となるため, $F(z'_a)$ から z_a を求める必要はない. このとき, t は赤道面以外の場合と同様に (5.8.236) から計算される. その際, 各パラメータは (5.8.235) と $Z'_0 = z'_s - z'_0 = 0$ から

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv X_0'^2 + Y_0'^2, \\ \beta &\equiv (x'_0 X'_0 + y'_0 Y'_0), \\ \epsilon &\equiv -(2Rh' + h'^2), \end{aligned} \quad (5.8.240)$$

となり^{*39}, 得られる t は

$$t = \frac{x'_0 X'_0 + y'_0 Y'_0}{X_0'^2 + Y_0'^2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{X_0'^2 + Y_0'^2}{[x'_0 X'_0 + y'_0 Y'_0]^2} (2Rh' + h'^2)} \right]. \quad (5.8.241)$$

z'_a, t が得られたら後は赤道面以外の場合と同じ (5.8.237), (5.8.238) 式から x'_a, y'_a が得られる.

5.9 付録：サンプル

5.9.1 浅水方程式系の導出

ここでは, 以下の各モデルで使用される支配方程式である浅水方程式系を導出する.

図?? は浅水システムの概念図である. 以下では, この図を元に方程式系を構築する. ここでは, 以下の仮定をおく.

^{*39}ここで ϵ への変形は $z'_0 = 0$ において x'_0 と y'_0 が $x_0'^2 + y_0'^2 = R^2$ という円上に存在することを用いた.

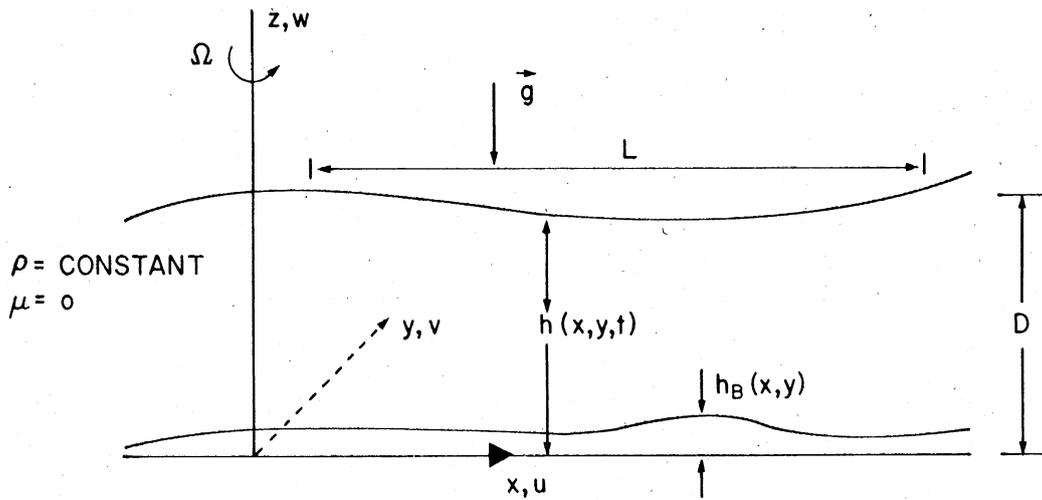


Figure 3.2.1 The shallow-water model.

図 5.16: 浅水システム概念図 (Pedlosky, 1987 より).

- 密度は一定.
- 系は y 方向について回転角速度が線形に変化している (β 面近似).

すると、このときの運動方程式は、

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.9.242)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.9.243)$$

となる。鉛直方向には第一近似的に静力学バランスしていると仮定する。ここで、

$$f = f_0 + \beta y, \quad \beta = \text{Const.},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

である。また、 p は非静力学成分、つまり全圧を $P = p + p_0$ としたとき、

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho$$

を満たす p_0 を除いた圧力を指す。このとき、全圧 P の z 方向変化は

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p_0}{\partial z} \approx \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$$

と近似できる^{*40}。上式を z 方向に積分すると、 ρ は一定なので、

$$P(x, y, z, t) = -g\rho z + A(x, y, t)$$

^{*40}なぜなら、非静力学圧力が静力学圧力に比べて z 方向の変化の大きさが小さいからである。これを正確に示したものは Pedlosky (1987) 参照。

となる。ここで、 A は積分定数である。 $z = h$ における全圧を基準圧力 p_r とすると、

$$(P(x, y, h, t) =) p_r(x, y, h, t) = -g\rho h + A(x, y, t).$$

よって、上式を P についての式の A に代入すると、

$$P(x, y, z, t) = -g\rho z + g\rho h + p_r(x, y, h, t) = g\rho(h - z) + p_r(x, y, h, t)$$

となる。 $p_r(x, y, h, t)$ は流体上面高度における圧力を指す。ここで、流体の変化において、上面での圧力変化がほぼ無視できるという仮定（微小振幅の仮定）をおくと、 p_r は定数とみることができ、

$$P(x, y, z, t) = g\rho(h - z) + p_r$$

となる。ここで、運動方程式における圧力傾度力は静力学圧力 p_0 が z のみの関数であることに注意すると^{*41}、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = g\rho \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = g\rho \frac{\partial h}{\partial y}.$$

ここで、 z は x, y に独立であるという事実に注意。よって、運動方程式 (5.9.242), (5.9.243) はそれぞれ

$$\frac{du}{dt} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.9.244)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.9.245)$$

となる。今、密度一様で摩擦・粘性がないので、流速の時間変化が非常に遅い（準定常状態）であると仮定すると、テイラー・プラウドマンの定理から^{*42}、 $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ となるので、上式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.9.246)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.9.247)$$

となる。さらに、密度一定であるため、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.9.248)$$

であり、水平流速は高度について一様であるため、上式は z について積分でき、

$$w(x, y, z = h, t) - w(x, y, z = h_B, t) = -(h - h_B) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

^{*41}今、 ρ が一定であるので、静力学関係式

^{*42}水平流速が高度方向に依存しないという定理。詳しくは Pedlosky (1987) 参照。

であることがわかる. ここで, $w(x, y, z = h, t)$ は流体上面での変動に伴う速度, $w(x, y, z = h_B, t)$ は流体下面での変動に伴う速度である. よって, 上式は

$$w(x, y, z = h, t) - w(x, y, z = h_B, t) = \frac{dh}{dt} - \frac{dh_B}{dt} = -(h - h_B) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5.9.249)$$

となる. 浅水系多層モデルを考える場合は, この式を問題設定 (境界条件) に合わせて変形させればよい. ここでは, 下面が剛体で固定されている場合を考える. その場合, h_B はオイラー的にみると時間変化しないので,

$$\frac{dh_B}{dt} = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}$$

となる^{*43}. また, 上面は自由変形を許すと,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$$

となる. これらを考慮すると, (5.9.249) は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (h - h_B) + (h - h_B) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \{u(h - h_B)\} + \frac{\partial}{\partial y} \{v(h - h_B)\} \quad (5.9.250)$$

という式が得られる. 流体層の厚さを H とすると,

$$H(x, y, t) = h(x, y, t) - h_B(x, y)$$

であるので, 結果的に得られる方程式系は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.9.251)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.9.252)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} \quad (5.9.253)$$

5.9.2 NM01 におけるモデルの詳細

浅水流体の支配方程式系は

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -f\mathbf{k} \times \mathbf{v} - g\nabla h + \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = \text{Src.}$$

である. ここで, \mathbf{v}, h, f, g は水平速度ベクトル, 流体の深さ, コリオリパラメータ, 重力加速度である. また, ベクトル微分演算子は水平 2 成分のみ有している. \mathbf{F}, Src はそれぞれ

^{*43} h, h_B は水平空間におけるある高度座標 1 点を表すので, これらの変数は z について独立であることに注意.

流れに対する外力とソースである。これを円筒座標系で表記することを考える。ラグランジュ微分は速度が水平 2 成分であるため、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

である。ここで、 r, θ はそれぞれ動径、同位角方向であり、動径方向については原点から外向きを正、同位角方向については反時計回りを正とする。また、速度ベクトルは $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ で表記することができる。このとき、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ はそれぞれ動径、同位角方向の単位ベクトルであり、 u, v はそれぞれの方向の速度である。すると、先の支配方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = fv - g \frac{\partial h}{\partial r} + F_r, \quad (5.9.254)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -fu - \frac{g}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + F_\theta, \quad (5.9.255)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + h \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] = \text{Src}. \quad (5.9.256)$$

となる。

本モデルは動径方向には傾度風平衡状態にあり、定常状態の軸対称流の中に埋め込まれた非軸対称成分の時間発展を計算するモデルであるため、各従属変数は同位角方向に一様でかつ、時間発展しない軸対称流と同位角方向に非一様で時間発展が許される非軸対称成分に分けて表現するのが便利である。そこでこの方程式を軸対称流と非軸対称流に分ける。つまり、各従属変数 φ を

$$\varphi(r, \theta, t) = \bar{\varphi}(r) + \varphi'(r, \theta, t)$$

と分けると (5.9.254) - (5.9.256) 式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + u' \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{v'}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{v}v'}{r} - \frac{v'^2}{r} \\ & = fv' - g \frac{\partial h'}{\partial r} + F_r, \end{aligned} \quad (5.9.257)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + u' \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{v'}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}u}{r} + \frac{\bar{u}v'}{r} + \frac{u'\bar{v}}{r} + \frac{u'v'}{r} \\ & = -f(\bar{u} + u') - \frac{g}{r} \frac{\partial h'}{\partial \theta} + F_\theta, \end{aligned} \quad (5.9.258)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} + u' \frac{\partial h'}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial h'}{\partial \theta} + \frac{v'}{r} \frac{\partial h'}{\partial \theta} \\ & = -(\bar{h} + h') \left[\frac{\partial}{\partial r} (\bar{u} + u') + \frac{(\bar{u} + u')}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right] + \text{Src}. \end{aligned} \quad (5.9.259)$$

となる。ここで、接線方向には、傾度風平衡の関係：

$$f\bar{v} + \frac{\bar{v}^2}{r} = g \frac{\partial \bar{h}}{\partial r}$$

を用いた。また、本モデルでは、各外力、ソースとして、動径、同位角方向の 2 次の水平拡散を `diff_r`、`diff_t` という拡散係数で施す。また、領域の外側ではレイリーダンピングを施す。

5.9.3 adjust におけるモデルの詳細

f 面 1 次元線形浅水流体方程式系は

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} - f_0 v' &= -g \frac{\partial h'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' &= 0, \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + H \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

である。この式は基本場は静止状態を仮定し、そのときの流体の高さが H として基本場の周りで線形化したものである。このとき、初期値に不連続な h' のプロファイルを与えると、初期に u', v' がゼロであっても地衡流調節という作用によって h' のバランスを解消しようと運動エネルギーを獲得することになる。サンプルでのプログラムはその過渡過程をシミュレートするものである。この方程式系で地衡流調節が作用する場合、方程式系がポテンシャル渦度保存を満たすので、調節後の定常状態の分布は実は初期値から見積もることができる。

5.9.4 adjust_2d におけるモデルの詳細

β 面 2 次元線形浅水流体方程式系は

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' &= -g \frac{\partial h'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f u' &= -g \frac{\partial h'}{\partial y}, \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) &= 0.\end{aligned}$$

である。この式は基本場は静止状態を仮定し、そのときの流体の高さが H として基本場の周りで線形化したものである。このとき、初期値に不連続な h' のプロファイルを与えると、初期に u', v' がゼロであっても地衡流調節という作用によって h' のバランスを解消しようと運動エネルギーを獲得することになる。サンプルでのプログラムはその過渡過程をシミュレートするものである。この方程式系で地衡流調節が作用する場合、方程式系がポテンシャル渦度保存を満たすので、調節後の定常状態の分布は実は初期値から見積もることができる。

5.9.5 BAROVOR/SBL_NBM におけるモデルの詳細

水平 2 次元デカルト座標 (x, y) の回転する順圧非発散流体の支配方程式系は

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + \nu \nabla^2 u, \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + \nu \nabla^2 v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{5.9.260}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

u, v は x, y 方向の速度成分, p は圧力, f はコリオリパラメータ, ρ_0 は一定の密度, ν は粘性係数である. (5.9.260) の上 2 式 (運動方程式) の回転をとり, 2 次元平面に直交する鉛直渦度 ($\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$) 方程式を作ると, f 面上では

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \nabla^2 \zeta.\tag{5.9.261}$$

通常の渦度方程式に見られる伸長項は非発散 (5.9.260) 第 3 式のため現れず, f 面であるから β 効果もない. 連続の式が非発散であるので, 流線関数 ψ が $x - y$ 面上で

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x},\tag{5.9.262}$$

として一意に決まる. すると, 渦度と流線関数の関係は

$$\nabla^2 \psi = \zeta.\tag{5.9.263}$$

以上から, BAROVOR/SBL_NBM モデルでは, 順圧非発散渦度方程式 (5.9.261) の時間発展を陽に計算する. 一方, 各時間発展方程式に含まれる移流項における流れ場は, (5.9.263) による渦度と流線関数の関係から診断される. 具体的には, 時間発展した渦度場を元に, 流線関数を逆算する. 得られた流線関数を用いて, (5.9.262) 式から速度成分を求めることになる. なお, 純粋な順圧非発散モデルでは必要ないが, 順圧層での圧力 p は (5.9.260) の上 2 式の発散をとることで,

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p = f \nabla^2 \psi + 2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].\tag{5.9.264}$$

となり, 流線関数から診断できる^{*44}.

^{*44}(5.9.260) の上 2 式について, ベクトル $\mathbf{v} = (u, v)$ で表現すると,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - f \mathbf{k} \times \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

次に、上の順圧非発散層の下方に接続した、同じく水平 2 次元デカルト座標 (x, y) で鉛直に回転軸をもつ厚さ h の境界層における運動の支配方程式系は

$$\begin{aligned} \frac{D_B U}{Dt} + W^- \frac{u - U}{h} &= -\frac{1}{\rho_B} \frac{\partial P}{\partial x} + fV - C_D |\mathbf{V}| \frac{U}{h} + K \nabla^2 U, \\ \frac{D_B V}{Dt} + W^- \frac{v - V}{h} &= -\frac{1}{\rho_B} \frac{\partial P}{\partial y} - fU - C_D |\mathbf{V}| \frac{V}{h} + K \nabla^2 V, \\ W &= -h \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.9.265)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{D_B}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}, \\ W^- &\equiv \frac{1}{2} (|W| - W). \end{aligned}$$

U, V は境界層内における x, y 方向の速度成分、 P は境界層内の圧力、 K は粘性係数である。(5.9.265) 第 3 式は境界層内の連続の式から得られる境界層上端の鉛直流 W の診断式である。境界層の下端は平坦で変形しない地面と接続している (すなわち境界層の下端からの鉛直流速はゼロ)。順圧層と同じく f 面を考える。 C_D は境界層摩擦に伴う運動量交換係数であり、境界層内の風速 ($|\mathbf{V}| \equiv \sqrt{U^2 + V^2}$) の関数として

$$C_D = 10^{-3} \begin{cases} 2.7/|\mathbf{V}| + 0.142 + 0.0764|\mathbf{V}|, & |\mathbf{V}| \leq 25 \\ 2.16 + 0.5406 \left[1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{V}| - 25}{7.5}\right) \right], & |\mathbf{V}| > 25 \end{cases}. \quad (5.9.266)$$

境界層内の圧力は、上に接続している順圧非発散層の圧力と等しいと仮定する ($p = P, \rho_0 = \rho_B$) と、順圧非発散層で計算された流線関数から同じ層の圧力 p を (5.9.264) 式から求められる。以上から、BAROVOR/SBL_NBM モデルでは、境界層運動方程式 (5.9.265) の上 2 式について、時間発展を陽に計算する。得られた境界層内の水平風速から、境界層上端の鉛直流 W を (5.9.265) の第 3 式から求める。水平風速の時間発展方程式に現れる境界層摩擦と圧力傾度力は、(5.9.266)、および (5.9.264) から求められる。

\mathbf{k} は鉛直方向の単位ベクトル。上式の発散をとると、(5.9.260) 第 3 式から、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p + f \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \\ &\Rightarrow \nabla \cdot \left[u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p + f \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \\ &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p + f \zeta \\ &\Rightarrow \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p = f \zeta - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p = f \nabla^2 \psi + 2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

が得られる。

空間離散化はスペクトル法 (非線形項は擬スペクトル) を用いて行われる. 側面の境界条件は二重周期境界とする. 順圧層でのモデル変数: ψ, ζ, u, v, p はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \psi(x, y, t) \\ \zeta(x, y, t) \\ u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ p(x, y, t) \end{bmatrix} = \sum_{k,l} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{k,l}(t) \\ \hat{\zeta}_{k,l}(t) \\ \hat{u}_{k,l}(t) \\ \hat{v}_{k,l}(t) \\ \hat{p}_{k,l}(t) \end{bmatrix} e^{i(kx+ly)}. \quad (5.9.267)$$

各時刻における予報変数 $\hat{\psi}$ を時間積分によって得た後, 各診断変数を求める. \hat{u}, \hat{v} は (5.9.262) 式から

$$\hat{u} = -il\hat{\psi}, \quad \hat{v} = ik\hat{\psi}. \quad (5.9.268)$$

$\hat{\zeta}$ は (5.9.263) 式から

$$\hat{\zeta} = -(k^2 + l^2) \hat{\psi}. \quad (5.9.269)$$

非線形項を擬スペクトル法で評価するため, 1 つの非線形項計算に少なくともフーリエ逆変換と正変換が 1 回ずつ必要になる. したがって, 石岡 (2004) を参考に, 可能な限り変換を必要としないように方程式を整理し, 演算を高速化する. まず予報変数 $\hat{\psi}$ を (5.9.261) から求める際は, 非線形項を

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) uv + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (v^2 - u^2), & (\text{BAROVOR の場合}) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) uv + \frac{\partial^2 v^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial y}, & (\text{SBL_NBM の場合}) \end{aligned}$$

とすることで変換回数を削減する^{*45}.

BAROVOR の場合は

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = \frac{1}{k^2 + l^2} \left[-(k^2 - l^2) A_{k,l}^{uv} - kl A_{k,l}^{vvuu} \right] - \nu (k^2 + l^2) \hat{\psi}, \quad (5.9.270)$$

^{*45} この変形は以下の通り:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y} &= u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial uv}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial vu}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial vu}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 uv}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 vu}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial^2 uv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 vu}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

$$A_{k,l}^{uv} \equiv \int uve^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad A_{k,l}^{vvuu} \equiv \int (v^2 - u^2) e^{-i(kx+ly)} dx dy. \quad (5.9.271)$$

この定式化による非線形項評価に伴うスペクトル変換の回数は、物理空間の変数 u, v を求めるために 2 回の逆変換, (5.9.271) を求めるのに 2 回の正変換の計 4 回の変換となる。もとの (5.9.261) 式 of 非線形項の評価に伴うスペクトル変換の回数 ($\hat{\psi}$ から物理空間の ψ の勾配を計算するのに 4 回の逆変換, 物理空間で非線形項全体を計算した値を 1 回正変換) より変換回数が 1 回少ない (石岡 2004). BAROVOR は以上の 4 変数を求めることで閉じた方程式系となる。

一方, SBL_NBM の場合は渦度方程式の積分後に, 境界層に与える圧力の診断にも利用できるように,

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = \frac{1}{k^2 + l^2} \left[- (k^2 - l^2) A_{k,l}^{uv} - kl (A_{k,l}^{vv} - A_{k,l}^{uu}) \right] - \nu (k^2 + l^2) \hat{\psi}, \quad (5.9.272)$$

$$A_{k,l}^{uv} \equiv \int uve^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad A_{k,l}^{vv} \equiv \int v^2 e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad A_{k,l}^{uu} \equiv \int u^2 e^{-i(kx+ly)} dx dy. \quad (5.9.273)$$

この定式化では, $A_{k,l}^{uv}$, $A_{k,l}^{vv}$, $A_{k,l}^{uu}$ の計算で 3 回の逆変換, これらの非線形係数を評価するために必要な u, v をスペクトル空間の変数 \hat{u}, \hat{v} から物理空間に変換するのに 2 回の正変換を要する。順圧層からの圧力分布が境界層の圧力傾度力の評価に必要となるので, \hat{p} を (5.9.264) 式から

$$\hat{p} = \rho_0 f \hat{\psi} - \frac{\rho_0}{k^2 + l^2} \left[2kl A_{k,l}^{uv} + k^2 A_{k,l}^{uu} + l^2 A_{k,l}^{vv} \right] \quad (5.9.274)$$

と求める^{*46}。このため, (5.9.272), (5.9.273) 式では変換の回数は (5.9.261) 式 of 非線形項の評価と同じ変換回数であるが, (5.9.273) 式の値を圧力の診断 (5.9.274) 式に用いることで, 圧力はスペクトル変換を一切行わずに求めることができる^{*47}。

*46 この変形は以下の通り:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 &= - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial^2 v u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

*47 元の圧力診断方程式 (5.9.264) では, 非線形項の評価を行うために ψ の勾配計算で逆変換を 3 回, 非線形項全体を正変換するために 1 回の変換を必要とする。

境界層のモデル変数: U, V, W はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} U(x, y, t) \\ V(x, y, t) \\ W(x, y, t) \end{bmatrix} = \sum_{k,l} \begin{bmatrix} \hat{U}_{k,l}(t) \\ \hat{V}_{k,l}(t) \\ \hat{W}_{k,l}(t) \end{bmatrix} e^{i(kx+ly)}. \quad (5.9.275)$$

(5.9.271) で得られた圧力分布を用いて, 境界層の予報変数 \hat{U}, \hat{V} を (5.9.265) 上 2 式から求める. この際, 非線形項を

$$\begin{aligned} -U \frac{\partial U}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial U^2}{\partial x} - \frac{\partial VU}{\partial y} - \frac{UW}{h}, \\ -U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial UV}{\partial x} - \frac{\partial V^2}{\partial y} - \frac{VW}{h} \end{aligned} \quad (5.9.276)$$

と評価する^{*48}. これにより, 予報変数 \hat{U}, \hat{V} の時間変化は

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = -ikA_{k,l}^{UU} - ilA_{k,l}^{UV} + N_{k,l}^U - \frac{ik}{\rho_0}\hat{p} + f\hat{V} - K(k^2 + l^2)\hat{U}, \quad (5.9.277)$$

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = -ikA_{k,l}^{UV} - ilA_{k,l}^{VV} + N_{k,l}^V - \frac{il}{\rho_0}\hat{p} - f\hat{U} - K(k^2 + l^2)\hat{V}, \quad (5.9.278)$$

$$A_{k,l}^{UV} \equiv \int UV e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad A_{k,l}^{UU} \equiv \int U^2 e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad A_{k,l}^{VV} \equiv \int V^2 e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad (5.9.279)$$

$$N_{k,l}^U \equiv \int \left[-\frac{UW}{h} - W \frac{u-U}{h} - C_D |\mathbf{V}| \frac{U}{h} \right] e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad (5.9.280)$$

$$N_{k,l}^V \equiv \int \left[-\frac{VW}{h} - W \frac{v-V}{h} - C_D |\mathbf{V}| \frac{V}{h} \right] e^{-i(kx+ly)} dx dy. \quad (5.9.281)$$

さらに \hat{W} は (5.9.265) 第 3 式から

$$\hat{W} = -ih(k\hat{U} + l\hat{V}). \quad (5.9.282)$$

^{*48} この変形は以下の通り:

$$\begin{aligned} -U \frac{\partial U}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial y} &= -U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial VU}{\partial y} + U \frac{\partial V}{\partial y} \\ &= -U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial VU}{\partial y} - U \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{W}{h} \right) \\ &= -\frac{\partial U^2}{\partial x} - \frac{\partial VU}{\partial y} - \frac{UW}{h}, \\ -U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial UV}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial UV}{\partial x} - V \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{h} \right) - V \frac{\partial V}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial UV}{\partial x} - \frac{\partial V^2}{\partial y} - \frac{VW}{h}. \end{aligned}$$

5.9.6 MBL_NBM におけるモデルの詳細

MBL_NBM モデルは SBL_NBM の境界層を 1 層スラブではなく多層で計算する。NBM は BAROVOR と同じく順圧非発散渦度方程式 (5.9.261) の時間発展を陽に計算する。順圧層での圧力 p は SBL_NBM と同様に (5.9.264) 式から求められ、境界層での流れを駆動する水平方向の圧力傾度力として用いられる。境界層は 3 次元デカルト座標 (x, y, z) で鉛直 (z) に回転軸をもつ厚さ h の境界層における運動の支配方程式系で

$$\begin{aligned} \frac{D_B U}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_B} \frac{\partial P}{\partial x} + fV + K_H \nabla^2 U + \frac{\partial \tau^U}{\partial z}, \\ \frac{D_B V}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_B} \frac{\partial P}{\partial y} - fU + K_H \nabla^2 V + \frac{\partial \tau^V}{\partial z}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9.283)$$

ここで、

$$\frac{D_B}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}.$$

U, V, W は境界層内における x, y, z 方向の速度成分、 P は境界層内の圧力、 K_H は水平粘性係数、 τ^U, τ^V は境界層内の鉛直運動量フラックスである。(5.9.283) 第 3 式は境界層内の連続の式から得られる境界層内の U, V と同じ高度での鉛直流 W の診断式である。境界層の下端は平坦で変形しない地面と接続している (すなわち境界層の下端からの鉛直流速はゼロ)。順圧層と同じく f 面を考える。 τ^U, τ^V は

$$(\tau^U, \tau^V) \equiv \begin{cases} C_D |\mathbf{V}| (U, V), & (z = z_s), \\ (0, 0), & (z = z_T), \\ K \frac{\partial}{\partial z} (U, V), & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (5.9.284)$$

でパラメタリゼーションされる。 $z = z_s$ は剛体壁面、 $z = z_T$ は境界層上端高度、 K は鉛直粘性係数である。 C_D は境界層摩擦に伴う運動量交換係数であり、 z_s での風速 ($|\mathbf{V}| \equiv \sqrt{U^2 + V^2}$) の関数として

$$C_D = 10^{-3} \begin{cases} 2.7/|\mathbf{V}| + 0.142 + 0.0764|\mathbf{V}|, & |\mathbf{V}| \leq 25 \\ 2.16 + 0.5406 \left[1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{V}| - 25}{7.5}\right) \right], & |\mathbf{V}| > 25 \end{cases}. \quad (5.9.285)$$

境界層内の圧力は、上に接続している順圧非発散層の圧力と等しいと仮定する ($p = P, \rho_0 = \rho_B$) と、順圧非発散層で計算された流線関数から同じ層の圧力 p を (5.9.264) 式から求められる。以上から、MBL_NBM モデルでは、境界層運動方程式 (5.9.283) の上 2 式について、時間発展を陽に計算する。得られた境界層内の水平風速から、境界層上端の鉛直流 W を (5.9.283) の第 3 式から求める。水平風速の時間発展方程式に現れる境界層摩擦と圧力傾度力は、(5.9.284)、および (5.9.264) から求められる。

空間離散化は水平方向にはスペクトル法 (非線形項は擬スペクトル)、境界層内は鉛直方

向には 2 次精度の中心差分近似を用いて行われる。側面の境界条件は二重周期境界とする。順圧層でのモデル変数 (\hat{u} , \hat{v} , \hat{p} , $\hat{\psi}$, $\hat{\zeta}$) は SBL_NBM モデルにおける順圧層の積分と全く同じに行われる。

境界層のモデル変数: U , V , W はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} U(x, y, z, t) \\ V(x, y, z, t) \\ W(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \sum_{k,l} \begin{bmatrix} \hat{U}_{k,l}(z, t) \\ \hat{V}_{k,l}(z, t) \\ \hat{W}_{k,l}(z, t) \end{bmatrix} e^{i(kx+ly)}. \quad (5.9.286)$$

(5.9.271) で得られた圧力分布を用いて、境界層の予報変数 \hat{U} , \hat{V} を (5.9.283) 上 2 式から求める。この際、非線形項を

$$\begin{aligned} -U \frac{\partial U}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial y} - W \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{\partial U^2}{\partial x} - \frac{\partial VU}{\partial y} - \frac{\partial WU}{\partial z}, \\ -U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} - W \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{\partial UV}{\partial x} - \frac{\partial V^2}{\partial y} - \frac{\partial WV}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.9.287)$$

と評価する^{*49}。これにより、予報変数 \hat{U} , \hat{V} の時間変化は

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = -ikA_{k,l}^{UU} - ilA_{k,l}^{UV} - \frac{dA_{k,l}^{WU}}{dz} - \frac{ik}{\rho_0}\hat{p} + f\hat{V} - K_H(k^2 + l^2)\hat{U} + \frac{d\hat{\tau}_{k,l}^U}{dz}, \quad (5.9.288)$$

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = -ikA_{k,l}^{UV} - ilA_{k,l}^{VV} - \frac{dA_{k,l}^{WV}}{dz} - \frac{il}{\rho_0}\hat{p} - f\hat{U} - K_H(k^2 + l^2)\hat{V} + \frac{d\hat{\tau}_{k,l}^V}{dz}. \quad (5.9.289)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_{k,l}^{UU} &\equiv \int U^2 e^{-i(kx+ly)} dx dy, & A_{k,l}^{VV} &\equiv \int V^2 e^{-i(kx+ly)} dx dy, \\ A_{k,l}^{UV} &\equiv \int UV e^{-i(kx+ly)} dx dy, \\ A_{k,l}^{WU} &\equiv \int WU e^{-i(kx+ly)} dx dy, & A_{k,l}^{WV} &\equiv \int WV e^{-i(kx+ly)} dx dy, \end{aligned} \quad (5.9.290)$$

^{*49} この変形は以下の通り:

$$\begin{aligned} -U \frac{\partial U}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial y} - W \frac{\partial U}{\partial z} &= -U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial VU}{\partial y} - \frac{\partial WU}{\partial z} + U \frac{\partial V}{\partial y} + U \frac{\partial W}{\partial z} \\ &= -U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial VU}{\partial y} - \frac{\partial WU}{\partial z} - U \frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial U^2}{\partial x} - \frac{\partial VU}{\partial y} - \frac{\partial WU}{\partial z}, \\ -U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} - W \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{\partial UV}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial WV}{\partial z} + V \frac{\partial W}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial UV}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} - V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial WV}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial UV}{\partial x} - \frac{\partial V^2}{\partial y} - \frac{\partial WV}{\partial z}. \end{aligned}$$

さらに $\hat{W}(z, t)$ は (5.9.283) 第 3 式から

$$\hat{W}(z, t) = -i \int_0^z (k\hat{U} + l\hat{V}) dz'. \quad (5.9.291)$$

鉛直方向の勾配量はモデル最下層と最上層、内部領域で計算方法が異なる。モデル最下層 $z = z_1$ では剛体壁面 ($z = z_s$) に接続しているため、湧き出しがない ($W(z = 0) = 0$) ことから (5.9.284) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dA_{k,l}^{WU}}{dz} &= \frac{A_{k,l}^{WU}(z_2, t)}{z_2}, & \frac{dA_{k,l}^{WV}}{dz} &= \frac{A_{k,l}^{WV}(z_2, t)}{z_2}, \\ \frac{d\hat{\tau}_{k,l}^U}{dz} &= \frac{\hat{\tau}_{k,l}^U(z_2, t) - T_{k,l}^U}{z_2} = K \frac{\hat{U}(z_3, t) - \hat{U}(z_1, t)}{z_2(z_3 - z_1)} - \frac{T_{k,l}^U}{z_2}, \\ \frac{d\hat{\tau}_{k,l}^V}{dz} &= \frac{\hat{\tau}_{k,l}^V(z_2, t) - T_{k,l}^V}{z_2} = K \frac{\hat{V}(z_3, t) - \hat{V}(z_1, t)}{z_2(z_3 - z_1)} - \frac{T_{k,l}^V}{z_2}. \end{aligned} \quad (5.9.292)$$

ただし、

$$T_{k,l}^U \equiv \int [C_D | \mathbf{V} | U] e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad T_{k,l}^V \equiv \int [C_D | \mathbf{V} | V] e^{-i(kx+ly)} dx dy. \quad (5.9.293)$$

内部領域 $z_2 < z_n < z_{N-1}$ では

$$\begin{aligned} \frac{dA_{k,l}^{WU}}{dz} &= \frac{A_{k,l}^{WU}(z_{n+1}, t) - A_{k,l}^{WU}(z_{n-1}, t)}{z_{n+1} - z_{n-1}}, \\ \frac{dA_{k,l}^{WV}}{dz} &= \frac{A_{k,l}^{WV}(z_{n+1}, t) - A_{k,l}^{WV}(z_{n-1}, t)}{z_{n+1} - z_{n-1}}, \\ \frac{d\hat{\tau}_{k,l}^U}{dz} &= K \frac{d^2 \hat{U}}{dz^2} = K \frac{\hat{U}(z_{n+1}, t) - 2\hat{U}(z_n, t) + \hat{U}(z_{n-1}, t)}{0.25(z_{n+1} - z_{n-1})^2}, \\ \frac{d\hat{\tau}_{k,l}^V}{dz} &= K \frac{d^2 \hat{V}}{dz^2} = K \frac{\hat{V}(z_{n+1}, t) - 2\hat{V}(z_n, t) + \hat{V}(z_{n-1}, t)}{0.25(z_{n+1} - z_{n-1})^2}. \end{aligned} \quad (5.9.294)$$

モデル最上層 $z = z_N$ では

$$\begin{aligned} \frac{dA_{k,l}^{WU}}{dz} &= \frac{B_{k,l}^{WU} - A_{k,l}^{WU}(z_{N-1}, t)}{2(z_N - z_{N-1})}, \\ \frac{dA_{k,l}^{WV}}{dz} &= \frac{B_{k,l}^{WV} - A_{k,l}^{WV}(z_{N-1}, t)}{2(z_N - z_{N-1})}, \\ \frac{d\hat{\tau}_{k,l}^U}{dz} &= \frac{-\hat{\tau}_{k,l}^U(z_{N-1})}{2(z_N - z_{N-1})} = -K \frac{\hat{U}(z_N, t) - \hat{U}(z_{N-2}, t)}{2(z_N - z_{N-1})(z_N - z_{N-2})}, \\ \frac{d\hat{\tau}_{k,l}^V}{dz} &= \frac{-\hat{\tau}_{k,l}^V(z_{N-1})}{2(z_N - z_{N-1})} = -K \frac{\hat{V}(z_N, t) - \hat{V}(z_{N-2}, t)}{2(z_N - z_{N-1})(z_N - z_{N-2})}. \end{aligned} \quad (5.9.295)$$

ただし、

$$B_{k,l}^{WU} \equiv \int W(z_N, t) u e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad B_{k,l}^{WV} \equiv \int W(z_N, t) v e^{-i(kx+ly)} dx dy. \quad (5.9.296)$$

5.9.7 WK04 におけるモデルの詳細

水平鉛直 2 次元の非回転・ブシネスク流体の支配方程式系は

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + b + \nu \nabla^2 w, \\ \frac{Db}{Dt} &= \nu \nabla^2 b, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{5.9.297}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

u , w は x , z 方向の速度成分, p は圧力, b は浮力, ν は粘性係数である. 非回転系を考えるのは, 扱う現象が系の回転の効果がほとんど効かないほど水平スケールが小さいからである. (5.9.297) の上 2 式 (運動方程式) の回転をとり, 2 次元平面に直交する水平渦度 ($\eta = \partial u / \partial z - \partial w / \partial x$) 方程式を作ると,

$$\frac{D\eta}{Dt} = -\frac{\partial b}{\partial x} + \nu \nabla^2 \eta,\tag{5.9.298}$$

ここで, 渦度方程式における伸長項は (5.9.297) の第 4 式 (連続の式) が非圧縮であることから現れない. また, 右辺第 1 項は傾圧トルク項である. 連続の式が非圧縮であるので, この関係を満たす流線関数 ψ が $x - z$ 面上で

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\tag{5.9.299}$$

として一意に決まる. すると, 渦度と流線関数の関係は

$$\nabla^2 \psi = \eta.\tag{5.9.300}$$

以上から, WK04 モデルでは, (5.9.297) の第 3 式 (熱力学関係式) と渦度方程式 (5.9.298) の時間発展を陽に計算する. 一方, 各時間発展方程式に含まれる移流項における流れ場は, (5.9.300) による渦度と流線関数の関係から診断される. 具体的には, 時間発展した渦度場を元に, 流線関数を逆算する. 得られた流線関数を用いて, (5.9.299) 式から速度成分を求めることになる. 実際のモデル計算では, 物理量は Weisman and Klemp (2004) と同じ無次元化がなされている.

5.9.8 QGPV における定式化詳細

以下の議論は Holton (2004) に基づく. 圧力 (p) 座標系での水平運動方程式, 静力学方程式, 連続の式, 熱エネルギー方程式はそれぞれ

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\nabla\Phi, \quad (5.9.301)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \quad (5.9.302)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0, \quad (5.9.303)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) T - S_p\omega = J/c_p \quad (5.9.304)$$

となる. それぞれの記号は

\mathbf{V} : 水平風速ベクトル, \mathbf{k} : 鉛直基底ベクトル, f : コリオリパラメータ, ∇ : 水平微分演算子,

Φ : ジオポテンシャル, R : 乾燥大気 of 気体定数, T : 温度, ω : 鉛直 p 速度,

J : 非断熱加熱率, c_p : 乾燥大気 of 定圧比熱.

このとき, $S_p \equiv -T\partial \ln\theta/\partial p$ は静的安定度である (θ は温位). (5.9.301) における全微分は

$$\frac{D}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + (\mathbf{V} \cdot \nabla)_p + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad (5.9.305)$$

と定義される.

この方程式系に対して, 準地衡流近似を行う. まず水平速度を地衡風成分 (\mathbf{V}_g) と非地衡風成分 (\mathbf{V}_a) に分ける:

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_g + \mathbf{V}_a, \quad (5.9.306)$$

地衡風は

$$\mathbf{V}_g \equiv f_0^{-1}\mathbf{k} \times \nabla\Phi \quad (5.9.307)$$

と定義される. ここで, 子午面方向の長さスケール L は地球の半径に比べて小さいと仮定したので, 地衡風の式 (5.9.307) はコリオリパラメータが緯度方向に一定の値をもつとして定義した. 興味のあるシステムでは, $|\mathbf{V}_a|/|\mathbf{V}_g| \sim O(\text{Ro})$, すなわち非地衡風と地衡風の大きさの比がロスビー数と同じオーダーとなる.

このとき, 風速はその地衡風の値によって, $O(\text{Ro})$ に近似され, 水平運動に伴う風速と温度の変化率は, 地衡風に伴う変化率と同じオーダーに近似される. ゆえに, (5.9.305) において, \mathbf{V} は \mathbf{V}_g に置き換えられ, 非地衡風にのみ由来する鉛直移流は無視することができる. このとき, 全運動に伴う運動量の変化率は, 近似的に地衡風に伴う地衡風運動量の変化率に等しい. すなわち,

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \approx \frac{D_g\mathbf{V}_g}{Dt},$$

$$\frac{D_g}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \quad (5.9.308)$$

\mathbf{V}_g の定義では一定の f_0 を用いたが、運動方程式のコリオリ項では f の緯度依存性を残しておく必要がある^{*50}。この f についての緯度 (ϕ) 方向の変動を $\beta \equiv df/d\phi$ として定義し、基準緯度 ϕ_0 について β 面近似から、

$$f = f_0 + \beta(\phi - \phi_0) \quad (5.9.309)$$

と線形化する。

(5.9.301) から、運動に伴う加速度はコリオリ力の項と圧力傾度力の間に生まれる差に等しい。この差は実際の風が地衡風からどれだけずれているかに依存する。(5.9.306), (5.9.307), (5.9.309) を用いて、

$$\begin{aligned} f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \nabla \Phi &= [f_0 + \beta(\phi - \phi_0)]\mathbf{k} \times (\mathbf{V}_g + \mathbf{V}_a) - f_0\mathbf{k} \times \mathbf{V}_g \\ &\approx f_0\mathbf{k} \times \mathbf{V}_a + \beta(\phi - \phi_0)\mathbf{k} \times \mathbf{V}_g \end{aligned} \quad (5.9.310)$$

と表記される。ここで、残った項は $O(\text{Ro})$ であるのに対し、 $\beta(\phi - \phi_0)\mathbf{k} \times \mathbf{V}_a$ は $O(\text{Ro}^2)$ となるので他の項より小さいとして無視した。したがって、近似的な水平運動方程式は

$$\frac{D_g \mathbf{V}_g}{Dt} = -f_0\mathbf{k} \times \mathbf{V}_a - \beta(\phi - \phi_0)\mathbf{k} \times \mathbf{V}_g. \quad (5.9.311)$$

(5.9.307) で定義された地衡風は非発散なので、連続の式 (5.9.303) は

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (5.9.312)$$

これは、もし地衡風が (5.9.307) で定義されるなら、 ω は風の中の非地衡風成分によつてのみ決定されるということを示している。

熱エネルギー方程式 (5.9.304) において、水平移流は地衡風の値で充分近似できる。断熱加熱冷却の一部である鉛直移流は、鉛直速度が小さいにも関わらず、水平移流と同じオーダーとなる。これは静的安定性が総観規模で十分大きいためである。全温度場 T_{tot} を圧力のみ依存する基本場（ここでは時間と水平平均）部分と基本場からのずれ $T(x, y, p, t)$ に分けることでいくらか簡単になる：

$$T_{tot}(x, y, p, t) = T_0(p) + T(x, y, p, t).$$

^{*50} 実際、この変動は基準緯度 ϕ_0 のまわりで f を緯度についてテイラー展開

$$f = f_0 + 2\Omega \cos \phi_0(\phi - \phi_0) + O(\phi^2) \sim f_0 + 2\Omega \cos \phi_0(\phi - \phi_0)$$

することで、

$$\frac{f}{f_0} = 1 + \frac{2\Omega \cos \phi_0}{f_0}(\phi - \phi_0).$$

上式右辺第 2 項は $L = a(\phi - \phi_0)$, $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$ として

$$\frac{2\Omega \cos \phi_0}{f_0}(\phi - \phi_0) = \frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0} \frac{L}{a} \sim O(\text{Ro}) \ll 1$$

という大きさのオーダーとなる ($L \sim 1000 \text{ km}$ の場合)。

ここで、 $|dT_0/dp| \gg |\partial T/\partial p|$ であるので、温度場の基本状態の部分のみ静的安定度の項で考慮すると、準地衡熱エネルギー方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla\right) \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) - \sigma \omega = \frac{\kappa J}{p}. \quad (5.9.313)$$

ここで、 $\sigma \equiv -RT_0 p^{-1} d \ln \theta_0 / dp$ であり、 θ_0 は基本場の温度 T_0 に対応する温位である [対流圏中層では、 $\sigma \approx 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ Pa}^{-2} \text{ s}^{-2}$ である]. ここで温度 T は (5.9.302) からジオポテンシャル場で表現する. また $\kappa \equiv R/c_p$.

式 (5.9.307), (5.9.311), (5.9.312), (5.9.313) が準地衡流方程式系を構成している. これらは、(非断熱加熱率が既知であったとすると) 従属変数 Φ , \mathbf{V}_g , \mathbf{V}_a , ω について閉じた式である.

次にこれらの方程式系から準地衡流渦度方程式を導く. 地衡風渦度 (ζ_g) は (5.9.307) から

$$\zeta_g = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}_g = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi. \quad (5.9.314)$$

式 (5.9.314) を用いて、既知の場 Φ から ζ_g を求めることができる. あるいは、(5.9.314) は領域の境界で Φ についての境界条件が適切に与えられていれば、既知の ζ_g の分布から Φ を求めることができる. 準地衡風渦度方程式は準地衡風運動方程式 (5.9.311) について $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$ (5.9.311) をとることで

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla (\zeta_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (5.9.315)$$

と得られる*51.

ジオポテンシャルの時間変化 $\chi \equiv \partial \Phi / \partial t$ を定義し、偏微分の順序が可換であることを用いて地衡風渦度方程式 (??) を

$$\frac{1}{f_0} \nabla^2 \chi = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (5.9.316)$$

と表現する. ここで (5.9.314) を用いた. (5.9.307) から地衡流は Φ で表現できるので、(5.9.316) の右辺は従属変数 Φ , ω のみに依存する. 同様に熱エネルギー方程式 (5.9.313) に f_0/σ をかけ、 p について微分すると

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial p} \right) = -\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{f_0}{\sigma} \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} - f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\kappa J}{\sigma p} \right). \quad (5.9.317)$$

*51 (5.9.311) 式は

$$\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \mathbf{V}_g = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{V}_a - \beta(\phi - \phi_0) \mathbf{k} \times \mathbf{V}_g$$

なので、両辺に $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$ を作用させると、

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla \times [\mathbf{V}_g \cdot \nabla \mathbf{V}_g] = -f_0 \mathbf{k} \cdot \nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{V}_a) - \mathbf{k} \cdot \nabla \times [\beta(\phi - \phi_0) \mathbf{k} \times \mathbf{V}_g].$$

地衡流の非発散性 ($\nabla \cdot \mathbf{V}_g = 0$) と、ベクトル恒等式: $\nabla \times (\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A}) = \nabla [(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A}] = \mathbf{A} \cdot \nabla (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{A})(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \nabla \mathbf{A}$ と、 \mathbf{k} 以外が水平 2 次元ベクトルで、 \mathbf{k} と直交するという事実を元に、 $\mathbf{k} \cdot \nabla \times (\alpha \mathbf{k} \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\alpha \mathbf{A})$ という関係を用いる (α , \mathbf{A} は任意のスカラー変数とベクトル変数) と、上式は

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \zeta_g = -f_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_g \cdot \nabla [\beta(\phi - \phi_0)].$$

(5.9.309) と (5.9.312) を用いると準地衡渦度方程式が得られる.

(5.9.316) と (5.9.317) で ω を消去すると,

$$\underbrace{\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right]}_A \chi = \underbrace{-f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right)}_B - \underbrace{\frac{\partial}{\partial p} \left[-\frac{f_0^2}{\sigma} \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_C - \underbrace{f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\kappa J}{\sigma p} \right)}_D. \quad (5.9.318)$$

これは Φ の 3次元構造を用いて, χ を決定する方程式 (ジオポテンシャル傾向方程式) である. 項 A は局所的なジオポテンシャルの傾向を表し, これは項 B の渦度移流, 項 C の層厚移流, 項 D の非断熱加熱による効果で決まる. Φ (と J) の構造が既知なら, 項 B, C は既知の強制項となり, (5.9.318) は未知の χ についての線形偏微分方程式となる.

(5.9.318) の意味する定性的な概念は,

項 A χ について空間の 2 階微分を含み, マイナスの χ に比例する.

項 B 絶対渦度の移流に比例する, 対流圏上部で支配的な強制項である. 渦度移流は移流が発生している高度での擾乱の強さを変化させず, 擾乱を水平に伝播させ, 鉛直に広げるように作用するだけである.

項 C 総観擾乱の増幅, 減衰に対する主要な寄与をする. 水平の層厚移流の圧力変化率に関係する. ここでは $-\partial \Phi / \partial p$ が温度に比例するので, 層厚の移流は温度移流に比例する. このとき項 C はマイナスの温度移流の圧力変化率 (すなわち, プラスの温度移流の高度変化率) に比例する.

項 D 非断熱加熱による総観擾乱の増幅, 減衰に対する寄与をする. 増幅減衰への寄与は項 C と同じ方法でなされる.

(5.9.318) を保存形に置き換えるために, 微分の連鎖律を用いて項 C を

$$-\mathbf{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

と表記する. 温度風関係式から $f_0 \partial \mathbf{V}_g / \partial p = \mathbf{k} \times \nabla (\partial \Phi / \partial p)$ であるので, $\partial \mathbf{V}_g / \partial p$ は $\nabla (\partial \Phi / \partial p)$ に垂直となり, 上式の第 2 項はゼロとなる. 第 1 項は (5.9.318) の項 B と合わせて, (5.9.318) の保存則の形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \right) q = \frac{D_g q}{D t} = -f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\kappa J}{\sigma p} \right) \quad (5.9.319)$$

が得られる. ここで,

$$q \equiv \left[\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] \quad (5.9.320)$$

は準地衡ポテンシャル渦度である。初期の Φ の分布と、適切な境界条件を与えると、(5.9.319), (5.9.320) はジオポテンシャル場の発展を予測するのに用いることができる。上下端境界 $p = p_0$ で ω はゼロと仮定できるなら、(5.9.313) から

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \right) \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \Big|_{p=p_0} = \frac{\kappa J}{p} \Big|_{p=p_0} \quad (5.9.321)$$

という境界条件が指定できる^{*52}。この境界条件は

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial p} - \frac{R}{p} \mathbf{V}_g \cdot \nabla T \right) \Big|_{p=p_0} = \frac{\kappa J}{p} \Big|_{p=p_0} \quad (5.9.322)$$

とすることで、ジオポテンシャル傾向方程式 (5.9.318) の境界条件としても用いることができる。

方程式系 (5.9.319) - (5.9.321) と Φ の適切な境界条件から、地衡流の発展が完全に規定される。ゆえに、断熱条件の下で、大規模な中緯度での気象システムの発展は、内部領域における地衡流にしたがう準地衡ポテンシャル渦度の保存と下部境界に沿った地衡流にしたがう温度の保存という2つの制限によって完全に決定される。また (5.9.320) は Φ について線形の偏微分方程式となるため、もし準地衡ポテンシャル渦度が

$$q = f + \sum_{i=1}^N q_i$$

という線形結合で表現されていれば、(5.9.320) から各 i の q_i に対応するジオポテンシャル場 Φ_i を求めることができ、全 Φ の場は得られた Φ_i の線形結合で構成できる。すなわち、

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i.$$

この q の線形性を利用してジオポテンシャル場を逆変換する手法を Piecewise PV inversion と呼ぶ。

ζ_g と \mathbf{V}_g は両方とも Φ を用いて定義されるので、渦度方程式 (??) から Φ , χ の両方が既知であるなら、 ω の場を診断できる。(5.9.313) の水平ラプラシアンをとると、

$$\nabla^2 \frac{\partial \chi}{\partial p} = -\nabla^2 \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] - \sigma \nabla^2 \omega - \frac{\kappa}{p} \nabla^2 J. \quad (5.9.323)$$

(5.9.316) を p について微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial p} (\nabla^2 \chi) = -f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}. \quad (5.9.324)$$

^{*52}同様に、上部境界条件は大気の場合なら放射境界条件、側面境界条件については計算領域や設定による。

(5.9.323), (5.9.324) の左辺の微分演算子の微分順序は可換なので, その事実から χ を消去し, 項を整理すると伝統的なオメガ方程式

$$\underbrace{\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right)}_A \omega = \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \underbrace{\left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]}_B$$

$$+ \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \underbrace{\left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_C - \underbrace{\frac{\kappa}{\sigma p} \nabla^2 J}_D$$
(5.9.325)

が得られる.