# 気象学 II (大気大循環論)

余田 成男

2004 年 9 月 6 日

# はじめに

## 大気大循環

大気大循環 (論)： 地球をとりまく大気が全地球的規模でくり広げている循環運動の全体 (を記述し説明する学問).(「最新気象の事典」, 1993)

- 太陽放射に対する大気の感応の総合的結果
- 時間と空間で適当に平均して残る運動
- 3 次元的描像
- 熱収支, 角運動量収支, エネルギー収支

対流圏と成層圏・中間圏の対比：

- 対流圏の大循環：熱的に励起され, 摩擦的に制御された熱機関 (熱効率 $1 \sim 2\%$).
- 成層圏・中間圏の大循環：対流圏によって力学的に強制され, 放射の影響を受けた冷蔵庫. あるいは, 波動の作用によって駆動される循環.

## 講義予定

今年度前期の予定は, 次の通りである：

- Part I：観測事実と簡単モデル
  第 1 章：基本温度構造
  第 2 章：全球エネルギー収支と大気大循環

- Part II：対流圏低緯度の循環
  第 3 章：ハドレー循環—軸対称子午面循環
  第 4 章：湿潤過程・熱帯循環

- Part III：対流圏中・高緯度の循環
  第 5 章：ロスビー循環—傾圧擾乱の働き
  第 6 章：エネルギー論
  第 7 章：強制ロスビー波・テレコネクション

- Part VI：成層圏中間圏の循環
  第 8 章：TEM 方程式系
  第 9 章：冬季成層圏循環—惑星波の働き
  第 10 章：中間圏循環—内部重力波の働き
  第 11 章：赤道域準二年周期変動 (QBO)

## 参考書

日本語啓蒙書, 日本語教科書, 英語教科書の順に列挙する：

廣田 勇, 1999: 「気象の遠近法」(気象ブックス 001), 成山堂書店, 186pp.

岸保 勘三郎・田中 正之・時岡 達志, 1982: 「大気の大循環」(大気科学講座 4), 東京大学出版会, 256pp.
廣田 勇, 1992: 「グローバル気象学」(気象の教室 1), 東京大学出版会, 148pp.

Andrews, D.G., J.R. Holton and C.B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*, Academic Press, 489pp.
Andrews, D.G., 2000: *An Introduction to Atmospheric Physics*, Cambridge University Press, 229pp.
Hartmann, D.L., 1994: *Global Physical Climatology*, Academic Press, 408pp.
Holton, J.R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology – 3rd edition*, Academic Press, 407pp.
Houghton, J.T., 1986: *The Physics of Atmospheres*, Cambridge University Press, 271pp.
Lindzen, R.S., 1990: *Dynamics in Atmospheric Physics*, Cambridge University Press, 310pp.
Peixoto, J.P. and A.H. Oort, 1992: *Physics of Climate*, American Institute of Physics, 520pp.

## GFD セミナー 2004 用資料

このノートは, 2004 年 9 月 13 日 (月)~16 日 (木) に北海道ニセコにて開催される夏の地球流体セミナー (GFD seminar) において配布するために, 第 8 章のみをプリントアウトしたものである.

### GFD セミナー 2004 夏

- 日時: 2004 年 9 月 13 日 (月) 夕 〜 16 日 (木) 朝
- 場所: 北海道 ニセコグランドホテル http://www.konbuonsen.com/grand-hotel/
- 話題と話題提供者:
  話題 I 『成層圏の波-波相互作用チュートリアル』
  　　話題提供者: 余田 成男 (京大・理)
  話題 II『波-波相互作用による極渦の周期的変動』
  　　話題提供者: 日尾 泰子 (京大・理)

# 第 8 章　変形オイラー平均方程式系

中緯度 $\beta$ 平面近似のもとで, 鉛直方向には対数圧力座標系を用いた準地衡方程式系を考える. 帯状平均成分とそれからのずれ (擾乱, 波動) に分けて, 両者の弱非線型な相互作用を記述する方程式系を導出する. 具体的には, 帯状平均場が波動の伝播特性を決め, 一方, 伝播してきた波動の作用により帯状平均場が変化する, という双方向に影響を及ぼしあう状況を考えている. ここではおもに Andrews et al.(1987) を参考にしてこの導出を行なう.

## 8.1　中緯度 $\beta$ 平面準地衡方程式系

鉛直座標として, 静力学的平衡の仮定のもとに対数圧力座標 $z = -H \ln(p/p_s)$ を用いる. ここで $p_s$ は基準面の気圧で, $H$ はスケールハイトであり, ともに一定値とする. 具体的には, $p_s = 1000$ hPa, $H = 7.5$ km としておく. 対数圧力座標は圧力座標の長所と幾何座標の長所をもっており, 中層大気の力学的研究ではよく用いられている. そして, 中緯度の $\beta$ 平面を考えて, コリオリパラメータを $f = f_0 + \beta y$ とする.

まず, 地衡風平衡と静力学的平衡の関係は, ジオポテンシャル $\Phi$ を用いて,

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{8.1}$$

$$v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{R}{H}T = \frac{R}{H}e^{-\kappa z/H}\theta, \tag{8.3}$$

と書ける. ここで, $\boldsymbol{u}_g = (u_g, v_g, 0)$ は地衡風, $T$ は温度, $\theta$ は温位であり, $R$ は気体定数, $\kappa = R/c_p$($c_p$ は等圧比熱) である. $f_0 =$ 一定であり, このように定義した地衡風は $\beta$ 平面上で水平非発散である.

水平風を地衡風とそれからのずれ (非地衡風成分) に分けて,

$$u = u_g + u_a, \tag{8.4}$$

$$v = v_g + v_a, \tag{8.5}$$

と書く. 流れがほぼ地衡風的である状況 ($|\boldsymbol{u}_g| \gg |\boldsymbol{u}_a|$) を考える. 非地衡風の水平収束・発散が鉛直風をもたらすので $w = w_a$ と表記すると, スケール解析の結果, 最終的に $\beta$ 平面上の準地衡方程式系は次のようになる：

$$x \text{ 運動方程式} \quad : \quad \frac{D_g u_g}{Dt} - f_0 v_a - \beta y v_g = X, \tag{8.6}$$

$$y \text{ 運動方程式} \quad : \quad \frac{D_g v_g}{Dt} + f_0 u_a + \beta y u_g = Y, \tag{8.7}$$

$$
\text{連続方程式} \quad : \quad \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w_a) = 0, \tag{8.8}
$$

$$
\text{エネルギー方程式} \quad : \quad \frac{D_g \theta_e}{Dt} + w_a \frac{d\theta_0}{dz} = Q. \tag{8.9}
$$

ここで, ラグランジュ微分では地衡風による移流項のみが残されており,

$$
\frac{D_g}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}, \tag{8.10}
$$

である. また, $z$ 依存性だけをもつ基本場 $\rho_0(z)$, $\theta_0(z)$ を考えて,

$$
\rho_0(z) = \rho_s e^{-z/H} = \frac{p_s}{RT_s} e^{-z/H} = \frac{p}{RT_s}, \tag{8.11}
$$

$$
\theta_0(z) = \frac{H}{R} e^{\kappa z/H} \frac{d\Phi_0}{dz}, \tag{8.12}
$$

とし, エネルギー方程式は $\theta_0$ からのずれ成分 $\theta_e(x,y,z,t) \equiv \theta(x,y,z,t) - \theta_0(z)$ についての表式としている. さらに, 運動方程式の $X$ と $Y$ は, 摩擦その他の非保存的力学的強制であり, エネルギー方程式で $Q \equiv (J/c_p)e^{\kappa z/H}$ であり, $J$ は単位質量あたりの非断熱加熱率を表わす.

基本場 $\rho_0(z)$, $\theta_0(z)$ が与えられ, 系の外力項 $X$, $Y$, $Q$ が何らかの形で与えられると, 方程式系 (8.1) $\sim$ (8.3) および (8.6) $\sim$ (8.9) は, $(u_g, v_g, u_a, v_a, w_a, \Phi, \theta_e)$ を従属変数とする閉じた方程式系となっている. これが, 対数圧力座標を用いた**中緯度 $\beta$ 平面準地衡方程式系**の一表式である.

## 8.2 準地衡ポテンシャル渦度方程式

$\partial$ (8.7) $/\partial x - \partial$ (8.6) $/\partial y$ として, 地衡風が水平非発散であることに注意して整理すると, 次の準地衡渦度方程式を得る：

$$
\frac{D_g}{Dt}(\zeta_g + f_0 + \beta y) = \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w_a) - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{8.13}
$$

ただし, $\zeta_g = -\dfrac{\partial u_g}{\partial y} + \dfrac{\partial v_g}{\partial x}$ は地衡風の渦度の鉛直成分である. 右辺の第 1 項はいわゆる「伸び縮み項」である. 惑星回転 $(f_0)$ がある場で水平発散に伴う気柱の伸長によって絶対渦度の鉛直成分が時間変化することを表わしている. 右辺 2, 3 項は外力の回転成分, すなわち, 捻る力である.

一方, エネルギー方程式に $\rho_0 \left(\dfrac{d\theta_0}{dz}\right)^{-1}$ をかけてから $z$ で微分し, 整理すると,

$$
\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w_a) = -\frac{D_g}{Dt}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 \theta_e}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 Q}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right), \tag{8.14}
$$

を得る. これを準地衡渦度方程式 (8.13) に代入して, $w_a$ を消去すると, 最終的に次の**準地衡ポテンシャル渦度方程式** (quasi-geostrophic potential vorticity equation; QG-PV Eq.) を得る：

$$
\frac{D_g q_g}{Dt} = -\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 Q}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right), \tag{8.15}
$$

$$
q_g = \zeta_g + f_0 + \beta y + \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 \theta_e}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right). \tag{8.16}
$$

ここで, $q_g$ が準地衡ポテンシャル渦度であり, 非保存的な力学的強制がなく $(X = Y = 0)$, 断熱的 $(Q = 0)$ であれば, 地衡風にのって $q_g$ が保存することを示している.

ただし, 次のことに注意しておこう. 3 次元理想気体が運動するとき, 一般にポテンシャル渦度 $P \equiv \dfrac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathrm{grad}\theta}{\rho}$ をラグランジュ的に保存するが, 準地衡ポテンシャル渦度保存則 (8.15) はその準地衡近似として導出できるものではない. あくまで準地衡方程式系で類似した関係式を導出しただけであり, 準地衡ポテンシャル渦度を偽ポテンシャル渦度といって区別することがある.

ここで, 地衡流線関数 $\psi(x, y, z, t)$ を導入する. (8.1), (8.2) 式より, 各レベルで地衡風は水平非発散なので,

$$\psi = \frac{1}{f_0}(\Phi - \Phi_0(z)), \tag{8.17}$$

$$u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{8.18}$$

$$v_g = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{8.19}$$

とする. 地衡風の渦度の鉛直成分 $\zeta_g$ は $\psi$ を用いて,

$$\zeta_g = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi, \tag{8.20}$$

と書ける. また, 静力学的平衡 (8.3) より,

$$\theta_0 = \frac{H}{R} e^{\kappa z/H} \frac{d\Phi_0(z)}{dz}, \tag{8.21}$$

$$\theta_e = \theta - \theta_0 = \frac{H}{R} e^{\kappa z/H} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{d\Phi_0}{dz}\right) = \frac{f_0 H}{R} e^{\kappa z/H} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{8.22}$$

$$T_e = T - T_0 = \frac{f_0 H}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{8.23}$$

の関係が得られ, 温位あるいは温度が地衡流線関数の $z$ 微分で与えられる. 結局, 準地衡ポテンシャル渦度も地衡流線関数を用いて,

$$q_g = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + f_0 + \beta y \tag{8.24}$$

と書ける.

地衡流線関数 (および上の $q_g$) を用いて, 準地衡ポテンシャル渦度方程式 (8.15) を書き直すと,

$$\frac{\partial q_g}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, q_g)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 Q}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right), \tag{8.25}$$

となる. これは, 地衡流線関数 $\psi(x, y, z, t)$ に関する偏微分方程式であり, 適当な初期条件と境界条件のもとにその時間発展を求めることができる. 非線型項の計算には適当な数値的手法を用いれば良い. この計算で, 非地衡風成分 $(u_a, v_a, w_a)$ の情報を必要としないことに注意しておく. $\psi(x, y, z, t)$ の時間発展が求められれば, 各時刻において (8.18), (8.19) より地衡風が, (8.22), (8.23) より温位と温度が求められ, 基本的な流れ場が決定できる. 非地衡風成分 (平均子午面循環など) も, 地衡風の時間変化などをもとに見積ることができる.

## 8.3 オイラー平均方程式系

ある物理量 $A$ の帯状 (東西) 平均を $[A]$ で表わすことにすると,

$$[A](y,z,t) = \frac{1}{L}\int_0^L A(x,y,z,t)dx, \tag{8.26}$$

である. 他の独立変数 $(y,z,t)$ は固定して平均するので, これは**オイラー平均** (Eulerian-Mean; EM) の一例である. これに対して, 運動する流体塊のうちある特定の集合に着目し続けて「平均」をとる場合には, **ラグランジュ平均** (Lagrangian-Mean; LM) という. ここで, $x$ 方向には距離 $L$ で周期的であるとする (実際には, 緯度 $\phi_0$ での緯度円一周の長さ $L = 2\pi a\cos\phi_0$ で周期的). この場合, $[\partial A/\partial x] = 0$ であることに注意する. また, 帯状平均 $[A]$ からのずれを $A^*$ で表わすと,

$$A^*(x,y,z,t) = A(x,y,z,t) - [A](y,z,t), \tag{8.27}$$

である. ここで, $[A^*] = 0$ であることに注意.

中緯度 $\beta$ 平面準地衡方程式系 (8.1) $\sim$ (8.3) および (8.6) $\sim$ (8.9) の帯状平均を考えることにする. まず, 地衡風平衡と静力学的平衡の関係式は, 帯状平均をとると,

$$[u_g] = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial[\Phi]}{\partial y}, \tag{8.28}$$

$$[v_g] = \frac{1}{f_0}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right] = 0, \tag{8.29}$$

$$\frac{\partial[\Phi]}{\partial z} = \frac{R}{H}e^{-\kappa z/H}[\theta], \tag{8.30}$$

となる. 準地衡近似の枠組みでは, 帯状平均した子午面循環は非地衡風成分のみから成ることに注意しよう. (8.28), (8.30) 式から $[\Phi]$ を消去して, 次の帯状平均した温度風関係式を得る：

$$f_0\frac{\partial[u_g]}{\partial z} + \frac{R}{H}e^{-\kappa z/H}\frac{\partial[\theta_e]}{\partial y} = 0. \tag{8.31}$$

連続方程式 (8.8) を帯状平均すると,

$$\frac{\partial[v_a]}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0[w_a]) = 0, \tag{8.32}$$

を得る.

運動方程式とエネルギー方程式にはラグランジュ微分項があるので, 帯状平均をとるときには少し注意が必要である. まず, 運動方程式の $x$ 成分 (8.6) を考える. 地衡風が水平非発散であることを使って, フラックス形式に書き直すと,

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_g)^2 + \frac{\partial}{\partial y}(u_g v_g) - f_0 v_a - \beta y v_g = X, \tag{8.33}$$

となる. ここで各変数を帯状平均とそれからのずれに分け, さらに帯状平均をとる. (8.29) などを用いて, 最終的に,

$$\frac{\partial[u_g]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[u_g^* v_g^*] - f_0[v_a] = [X], \tag{8.34}$$

を得る. 帯状平均からのずれ成分 $u_g^*$ と $v_g^*$ に相関があれば, 擾乱 (波動) に伴う $x$ 方向の運動量の $y$ 方向フラックスがあり, その収束・発散により帯状平均した $u_g$ が時間変化することを示している. 同様にして, 運動方程式の $y$ 成分とエネルギー方程式の帯状平均は, 次のように書ける：

$$\frac{\partial}{\partial y}[(v_g^*)^2] + f_0[u_a] + \beta y[u_g] = [Y], \tag{8.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\theta_e] + \frac{\partial}{\partial y}[\theta_e^* v_g^*] + [w_a]\frac{d\theta_0}{dz} = [Q]. \tag{8.36}$$

以上のようにして得られた, 帯状平均した準地衡方程式系をもう一度まとめておく：

$$x - \text{運動方程式} \quad : \quad \frac{\partial [u_g]}{\partial t} - f_0[v_a] - [X] = -\frac{\partial}{\partial y}[u_g^* v_g^*], \tag{8.37}$$

$$\text{エネルギー方程式} \quad : \quad \frac{\partial [\theta_e]}{\partial t} + [w_a]\frac{d\theta_0}{dz} - [Q] = -\frac{\partial}{\partial y}[\theta_e^* v_g^*], \tag{8.38}$$

$$\text{温度風関係式} \quad : \quad f_0\frac{\partial [u_g]}{\partial z} + \frac{R}{H}e^{-\kappa z/H}\frac{\partial [\theta_e]}{\partial y} = 0, \tag{8.39}$$

$$\text{連続方程式} \quad : \quad \frac{\partial [v_a]}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0[w_a]) = 0. \tag{8.40}$$

外力項 $[X]$, $[Q]$ および, 右辺の擾乱による帯状成分強制項が与えられるとすると, これらは帯状平均成分 $([u_g], [\theta_e], [v_a], [w_a])$ で閉じた方程式とみなすことができる. 外力項と擾乱強制項, および, 適当な初期条件・境界条件が与えられると, それらの時間発展が求められることになる. $[u_a]$ は (8.35) から診断的に求めれば良い. 外力と擾乱強制が与えられたとき, 帯状平均場の応答の一部として平均帯状流 $[u_g]$ および 平均温位 $[\theta_e]$ が時間変化しうるが, それらは常に温度風関係式 (8.39) を満しながら変化する. また, これらの強制に対する応答の残りの部分は, 平均子午面循環 $([v_a], [w_a])$ になるが, それらは常に連続方程式 (8.40) を満すものとなっている. しかし, この方程式系をながめているだけでは, どれだけが帯状平均場の時間変化をもたらし, どれだけ子午面循環を誘起するかはわからない. 具体的な状況を考えて数値的に解くしかない. 第 8.5 節で, その表式を議論する.

帯状平均した準地衡ポテンシャル渦度方程式は, (8.15) をフラックス形式に変えて帯状平均するとよい：

$$\frac{\partial [q_g]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[q_g^* v_g^*] = -\frac{\partial [X]}{\partial y} + \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0[Q]}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right). \tag{8.41}$$

擾乱による帯状成分強制項 (左辺第 2 項) および右辺の外力項により, 帯状平均した準地衡ポテンシャル渦度 $[q_g]$ が時間変化することを示している.

## 8.4 帯状平均からのずれ成分に関する線型方程式系

帯状平均からのずれ成分に関する方程式は, もとの式から帯状平均した式を引けば求められる. 地衡風平衡と静力学的平衡の関係はずれ成分でも成り立ち,

$$u_g^* = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi^*}{\partial y}, \tag{8.42}$$

$$v_g^* = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi^*}{\partial x}, \tag{8.43}$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = \frac{R}{H}e^{-\kappa z/H}\theta^*, \tag{8.44}$$

である．また, (8.6)〜(8.9) のずれ成分に関する方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial u_g^*}{\partial t} + [u_g]\frac{\partial u_g^*}{\partial x} + v_g^*\frac{\partial [u_g]}{\partial y} - f_0 v_a^* - \beta y v_g^* - X^* = -\frac{\partial}{\partial x}(u_g^*)^2 - \frac{\partial}{\partial y}(u_g^* v_g^* - [u_g^* v_g^*]), \tag{8.45}$$

$$\frac{\partial v_g^*}{\partial t} + [u_g]\frac{\partial v_g^*}{\partial x} + f_0 u_a^* + \beta y u_g^* - Y^* = -\frac{\partial}{\partial x}(u_g^* v_g^*) - \frac{\partial}{\partial y}\left((v_g^*)^2 - [(v_g^*)^2]\right), \tag{8.46}$$

$$\frac{\partial u_a^*}{\partial x} + \frac{\partial v_a^*}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w_a^*) = 0, \tag{8.47}$$

$$\frac{\partial \theta_e^*}{\partial t} + [u_g]\frac{\partial \theta_e^*}{\partial x} + v_g^*\frac{\partial [\theta_e]}{\partial y} + w_a^*\frac{d\theta_0}{dz} - Q^* = -\frac{\partial}{\partial x}(\theta_e^* u_g^*) - \frac{\partial}{\partial y}(\theta_e^* v_g^* - [\theta_e^* v_g^*]), \tag{8.48}$$

ただし, ずれに関する 2 次の項のみを右辺に置いている．

帯状平均した準地衡方程式系は, (8.37), (8.38) 式の右辺に擾乱に関する 2 次の項 (擾乱による帯状成分強制項) があり, 帯状平均の変数だけで閉じていなかった．上記のずれ成分に関する方程式系から擾乱による帯状成分強制の時間発展方程式を導出すると, 擾乱の 3 次モーメントを含む項が現れて, いつまでも方程式系が閉じることはない．非線型な移流項に起因する**完結の問題** (closure problem) で, 乱流理論における完結の問題と同様である．

問題を閉じるために, 非線型性がそれほど強くない状況を考えよう． 実際, 中層大気ではそう考えてもよい状況であることが多い．すなわち, 帯状平均からのずれ成分が帯状平均自体に比べて十分に小さくて, (8.45)〜(8.48) の右辺をゼロとおけるとしよう．すると, (8.42)〜(8.44) とあわせて, $(u_g^*, v_g^*, u_a^*, v_a^*, w_a^*, \Phi^*, \theta_e^*)$ を従属変数とする閉じた方程式系となっている．基本場および帯状平均場が与えられれば, ずれ成分の時間発展が求められることになる．結局, 帯状平均した準地衡方程式系とこれらを連立させれば, 帯状平均場と準線型的な擾乱が相互作用する系の時間発展が記述できることになる．このような枠組みでの相互作用を**波と平均流の相互作用** (wave-mean flow interaction) という．波の振幅が大きくなって非線型性が強くなった状況 (たとえば, 砕波が起きている状況) では, この枠組みは使えず, (8.45)〜(8.48) の右辺をちゃんと評価しなければならない．

第 8.2 節と同様の手続きにより, 線型化したずれ成分に関する準地衡ポテンシャル渦度方程式を導出することができる．最終的な結果は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + [u_g]\frac{\partial}{\partial x}\right) q_g^* + v_g^*\frac{\partial [q_g]}{\partial y} = -\frac{\partial X^*}{\partial y} + \frac{\partial Y^*}{\partial x} + \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 Q^*}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right), \tag{8.49}$$

$$q_g^* = \frac{\partial v_g^*}{\partial x} - \frac{\partial u_g^*}{\partial y} + \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 \theta_e^*}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right), \tag{8.50}$$

$$[q_g] = -\frac{\partial [u_g]}{\partial y} + f_0 + \beta y + \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 [\theta_e]}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right), \tag{8.51}$$

となる．ここで, $q_g^*$ は準地衡ポテンシャル渦度のずれ成分であり, $[q_g]$ は帯状平均成分である．$\dfrac{\partial [q_g]}{\partial y}$ は帯状平均基本場のポテンシャル渦度の南北勾配であり, **実効的ベータ**と呼ばれることがある．この項は, 温度風関係式を使って, 次のように変形できる：

$$\frac{\partial [q_g]}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 [u_g]}{\partial y^2} + \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\rho_0 [\theta_e]}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right) = \beta - \frac{\partial^2 [u_g]}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial [u_g]}{\partial z}\right). \tag{8.52}$$

帯状平均した地衡風 (帯状成分) の曲率がロスビー波の復元力となることを示している．具体的には, 帯状平均ジェットの軸付近で実効的ベータが大きくなっている．

## 8.5 変形オイラー平均方程式系

第 8.3 節で導いたオイラー平均方程式系 (8.37)∼(8.40) には, 不便なところがある. ひとつは, 擾乱による強制項が運動方程式とエネルギー方程式とにあるために, どちらかの強制に対する平均流の応答を見積もることはできても (Holton, 1992; 第 10.2.1 節), 両者が同時にあるときの応答を考えることは難しいことである. もうひとつは, 同じ理由から, ある擾乱による強制項が与えられたとしても, そのような強制をもたらすのが波のどのような特性によるかを考えにくいことである. 別の言い方をすれば, 擾乱による 2 つ強制項は波の基本特性に依存していて独立に与えられないことである. このような不便さを回避するために, 帯状平均した流れの方程式を変形してみよう.

まず, **残差平均子午面循環** (residual mean meridional circulation) ($[v]^\dagger, [w]^\dagger$) を次のように定義する：

$$[v]^\dagger \equiv [v_a] - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{[\theta_e^* v_g^*]}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right), \tag{8.53}$$

$$[w]^\dagger \equiv [w_a] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{[\theta_e^* v_g^*]}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right). \tag{8.54}$$

このように定義した残差平均鉛直流は, 断熱温度変化をもたらす鉛直流のうち擾乱による熱フラックスの収束によってキャンセルされない部分, を表している. これらを (8.37)∼ (8.40) 式に代入すると, 次のような中緯度 $\beta$ 平面準地衡方程式系での**変形オイラー平均方程式系** (Transformed Eulerian-Mean Equations; TEM Eqs.) が得られる：

$$x-\text{運動方程式} \quad : \quad \frac{\partial [u_g]}{\partial t} - f_0 [v]^\dagger - [X] = \frac{1}{\rho_0}\mathrm{div}\boldsymbol{F}, \tag{8.55}$$

$$\text{エネルギー方程式} \quad : \quad \frac{\partial [\theta_e]}{\partial t} + [w]^\dagger \frac{d\theta_0}{dz} - [Q] = 0, \tag{8.56}$$

$$\text{温度風関係式} \quad : \quad f_0 \frac{\partial [u_g]}{\partial z} + \frac{R}{H} e^{-\kappa z/H}\frac{\partial [\theta_e]}{\partial y} = 0, \tag{8.57}$$

$$\text{連続方程式} \quad : \quad \frac{\partial [v]^\dagger}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 [w]^\dagger) = 0. \tag{8.58}$$

ここで, ベクトル $\boldsymbol{F} \equiv (0, F^{(y)}, F^{(z)})$ は**エリアッセン-パーム フラックス** (Eliassen-Palm flux; E-P flux) として知られる量で, 各成分は次で与えられる：

$$F^{(y)} = -\rho_0 [u_g^* v_g^*], \tag{8.59}$$

$$F^{(z)} = \frac{\rho_0 f_0}{\frac{d\theta_0}{dz}}[\theta_e^* v_g^*]. \tag{8.60}$$

ここで特筆すべきことは, 擾乱による強制項が $x$ 方向の運動方程式 (8.55) の右辺に現れるだけで, エネルギー方程式 (8.56) には現れないということである (そうなるように変形した). すなわち, 帯状平均場 $[u_g]$, $[\theta_e]$ の時間変化や残差循環 ($[v]^\dagger, [w]^\dagger$) に対する擾乱の強制として, その運動量フラックス $[u_g^* v_g^*]$ と熱フラックス $[\theta_e^* v_g^*]$ が別々に働くのではなく, $\rho_0^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ の形で組み合わされて作用するのである. このような表式だと, 波の作用をより直截的に認識できることになる.

(8.55)∼(8.58) で $[v]^\dagger$, $[w]^\dagger$, $[\theta_e]$ を消去すると, $[u_g]$ の時間変化に対する次式を得る：

$$\rho_0\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial [u_g]}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathrm{div}\boldsymbol{F} + \rho_0 [X]) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\rho_0 f_0 \frac{[Q]}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right). \tag{8.61}$$

あるいは, $[u_g]$, $[\theta_e]$, $[w]^\dagger$ を消去すると, $[v]^\dagger$ に対する次式を得る：

$$\rho_0\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]f_0[v]^\dagger=-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho_0\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_0}\mathrm{div}\boldsymbol{F}+[X]\right)\right\}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\rho_0 f_0\frac{[Q]}{\frac{d\theta_0}{dz}}\right). \tag{8.62}$$

これらは, 擾乱による強制が $\rho_0^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ の形で働くか, 外力 $[X]$, $[Q]$ が与えられた場合には, 帯状平均場が時間変化し残差循環が生じることを示している. 上式の [ ] 内は楕円型の微分演算子なので, これらの応答は非局所的となり, 与えられた強制よりも広い範囲に影響が及ぶ.

最後に, 準地衡風近似のもとでは, E-P フラックスの発散が, 擾乱による準地衡ポテンシャル渦度の北向きフラックスと等しくなることに注意しておこう. すなわち,

$$[q_g^* v_g^*]=-\frac{\partial}{\partial y}[u_g^* v_g^*]+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0 f_0}{\frac{d\theta_0}{dz}}[\theta_e^* v_g^*]\right)=\frac{1}{\rho_0}\mathrm{div}\boldsymbol{F}, \tag{8.63}$$

なる関係式が導出できる. 帯状平均した準地衡ポテンシャル渦度方程式 (8.41) を $y$ 微分して, この関係式と (8.52) を代入すると, 帯状平均帯状流の時間変化に関する式 (8.61) が得られることにも注意.

## 8.6 線型波動の基本的力学

EM 方程式系のかわりに TEM 方程式系が使われる大きな理由は, 擾乱の平均流に及ぼす効果が $\rho_0^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ の形で表せて, それが波動の基本的な物理的特性に依存しているからである.

線型化した波動成分に関する準地衡ポテンシャル渦度方程式 (8.50) の非保存項をまとめて,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+[u_g]\frac{\partial}{\partial x}\right)q_g^*+v_g^*\frac{\partial[q_g]}{\partial y}=Z^*, \tag{8.64}$$

と書く. これに $\rho_0 q_g^*/\dfrac{\partial[q_g]}{\partial y}$ をかけて, $\rho_0/\dfrac{\partial[q_g]}{\partial y}$ の時間微分と $x$ 微分が小さいことを使うと,

$$q_g^*\left(\frac{\partial}{\partial t}+[u_g]\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\rho_0 q_g^*}{\frac{\partial[q_g]}{\partial y}}+\rho_0 q_g^* v_g^*=\frac{\rho_0}{\frac{\partial[q_g]}{\partial y}}q_g^* Z^*, \tag{8.65}$$

となる. (8.63) を代入して, 帯状平均をとると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho_0[(q_g^*)^2]}{\frac{\partial[q_g]}{\partial y}}\right)+\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\rho_0}{\frac{\partial[q_g]}{\partial y}}[q_g^* Z^*], \tag{8.66}$$

という表式が得られ, 結局, **一般化したエリアッセン-パームの関係式** (generalized Eliassen-Palm relationship) が導出できたことになる. すなわち, 波の活動度を

$$A=\frac{1}{2}\frac{\rho_0[(q_g^*)^2]}{\frac{\partial[q_g]}{\partial y}}, \tag{8.67}$$

として, 擾乱のポテンシャルエンストロフィーに比例し, 実効的ベータに逆比例する量をとると,

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{F}=D, \tag{8.68}$$

の形に書け, E-P フラックスの収束発散が波の活動度の時間変化をもたらすという一般的な関係式となる. ここで, 右辺の $D$ は非保存項を表している.

一般化したエリアッセン-パームの関係式 (8.68) は, TEM 方程式系 (8.55)~(8.57) とともに, 中層大気の大循環を記述する基本的な枠組みである. すなわち, 対流圏から伝播してきた波動 (ロスビー波, 重力波) と帯状平均流との相互作用が中層大気大循環の大枠を決めているからである. 残りの章では, いくつかの具体的な状況で波動と帯状平均流の相互作用の様子を見ていくことにする.

## 参考文献

Andrews, D.G., J.R. Holton and C.B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics.* Academic Press, 489pp.

Holton, J.R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology, 3rd edition.* Academic Press, 507pp.