2015地球流体セミナー

海洋内部波の物理の基礎

東京大学海洋アライアンス海洋教育促進研究センター/
東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
丹羽淑博

本日の内容

1. 海洋内部波の特徴
2. 海洋内部波の重要性
3. 海洋内部波の物理（線形理論)
4. 海洋内部波の励起
5. 海洋内部波の普遍平衡スペクトル
6. 海洋内部波の非線形相互作用

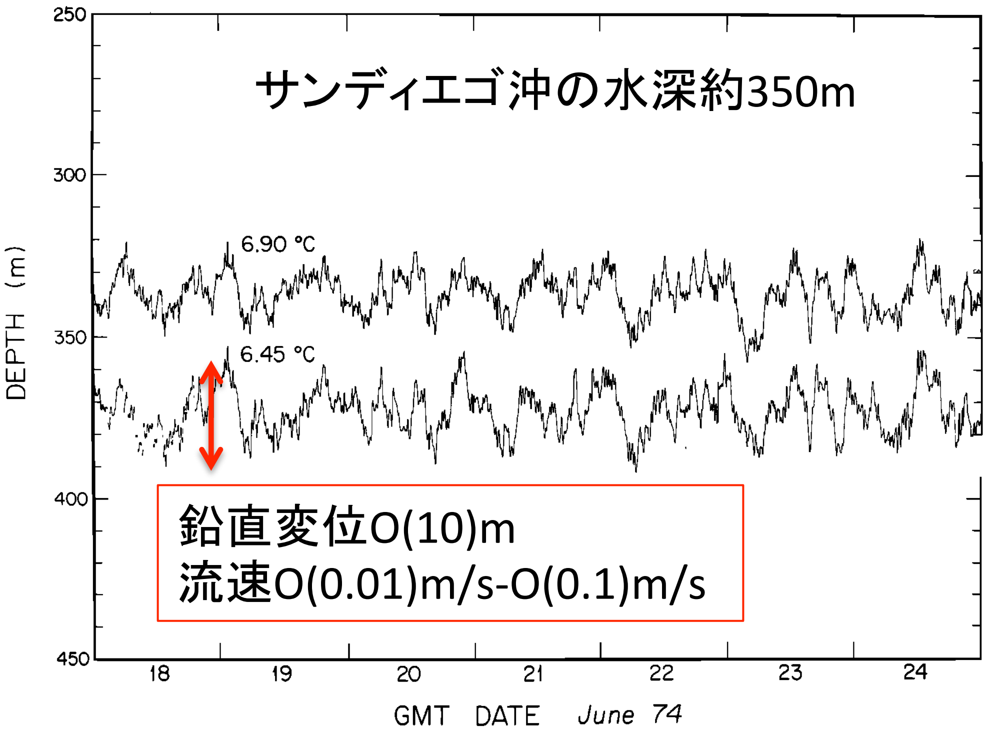
1. 海洋内部波の特徴

①内部波の時間スケール

「浮力周期」 ＜「内部波の周期」＜ 「慣性周期」

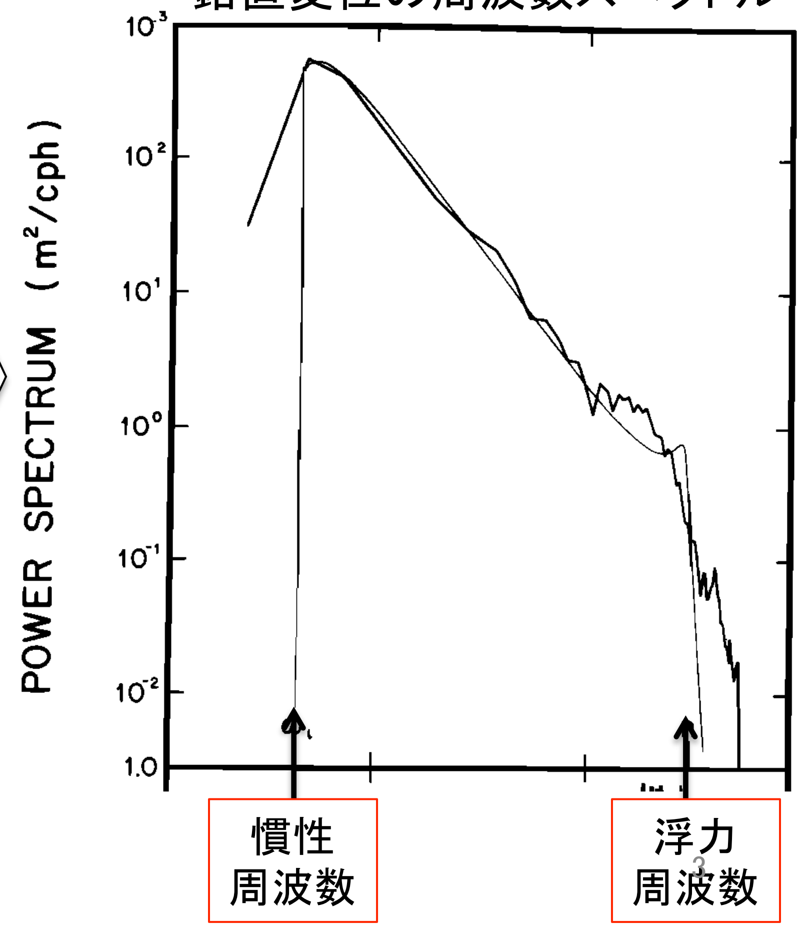
約10分（表層）～数時間(深層） 無限大（赤道）～12時間（極域）

等温面の深さの時間変動



Cairns and Williams(1976)

鉛直変位の周波数スペクトル



②内部波の空間スケール（波長）

海洋中の内部波の波長は非常に広いスペクトルレンジを占める

O(1)m ＜ 「内部波の波長」 ＜ O(100)km

乱流スケール　　　　　　　　　　　中規模渦スケール

短波長O(1m)の
内部波の砕波

Woods(1968)

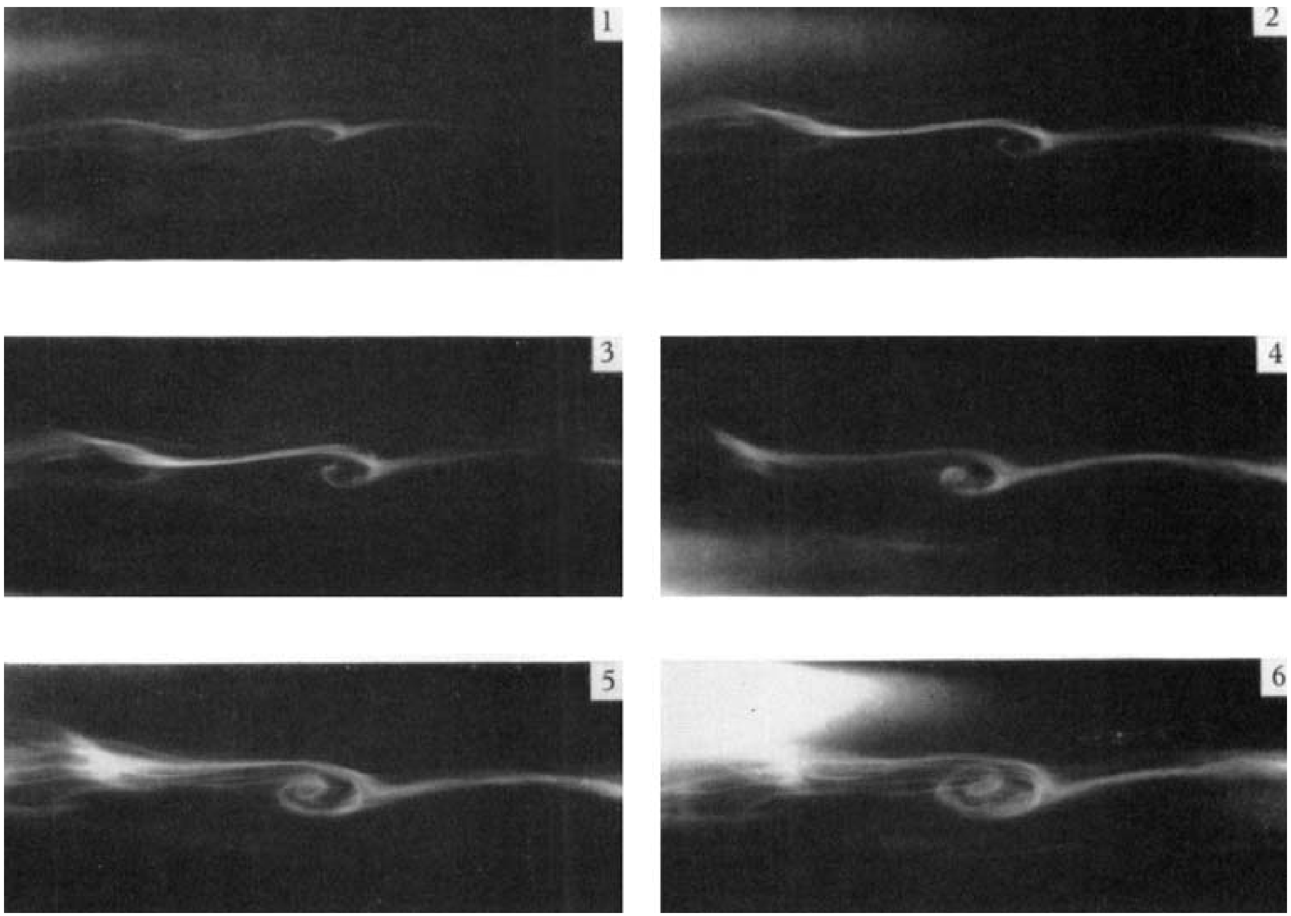
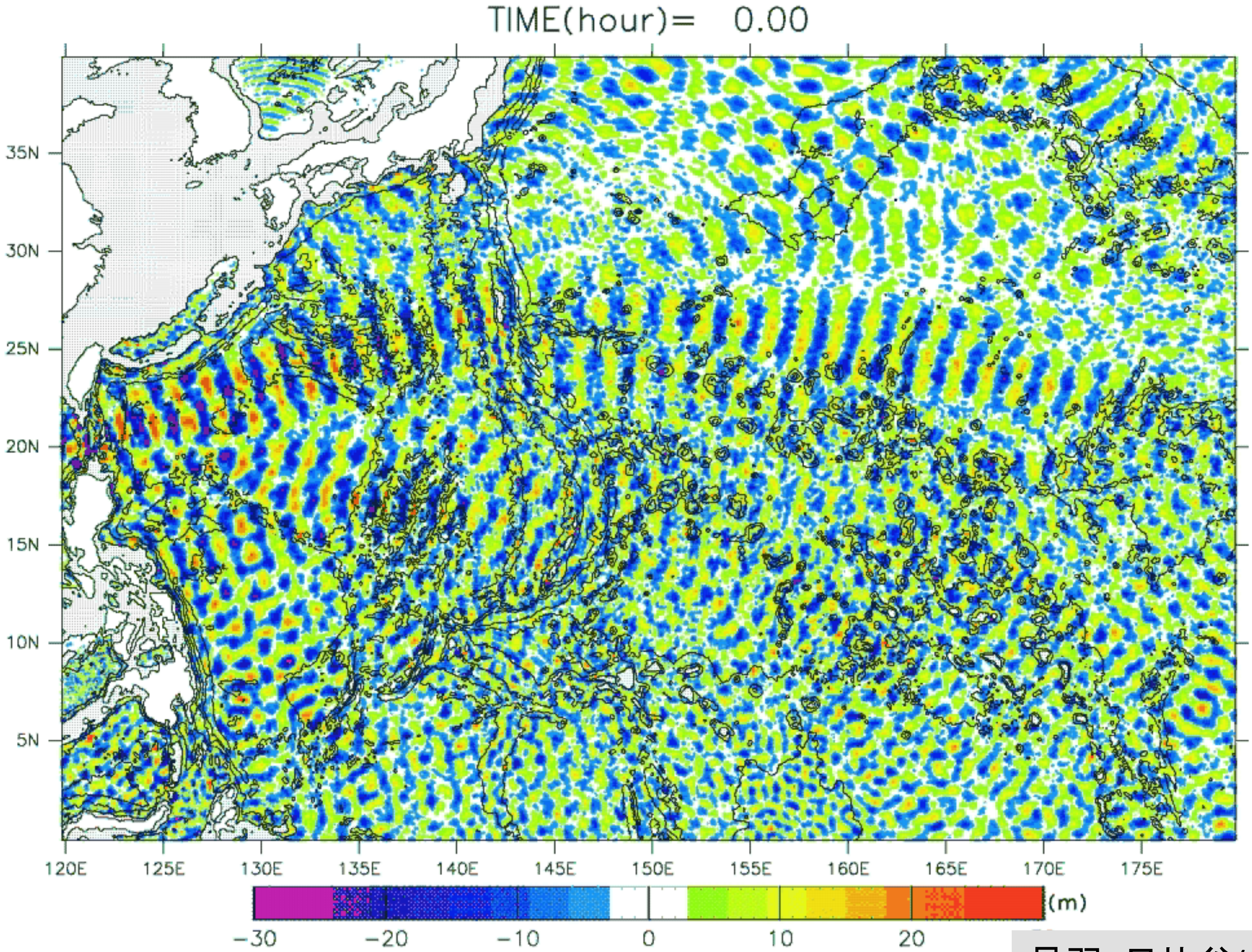


FIGURE 14. Stages in the growth of an exceptionally large breaker (λ, 250 cm; 2a, 60 cm).
Note the 10 cm markings on the scale at bottom right.

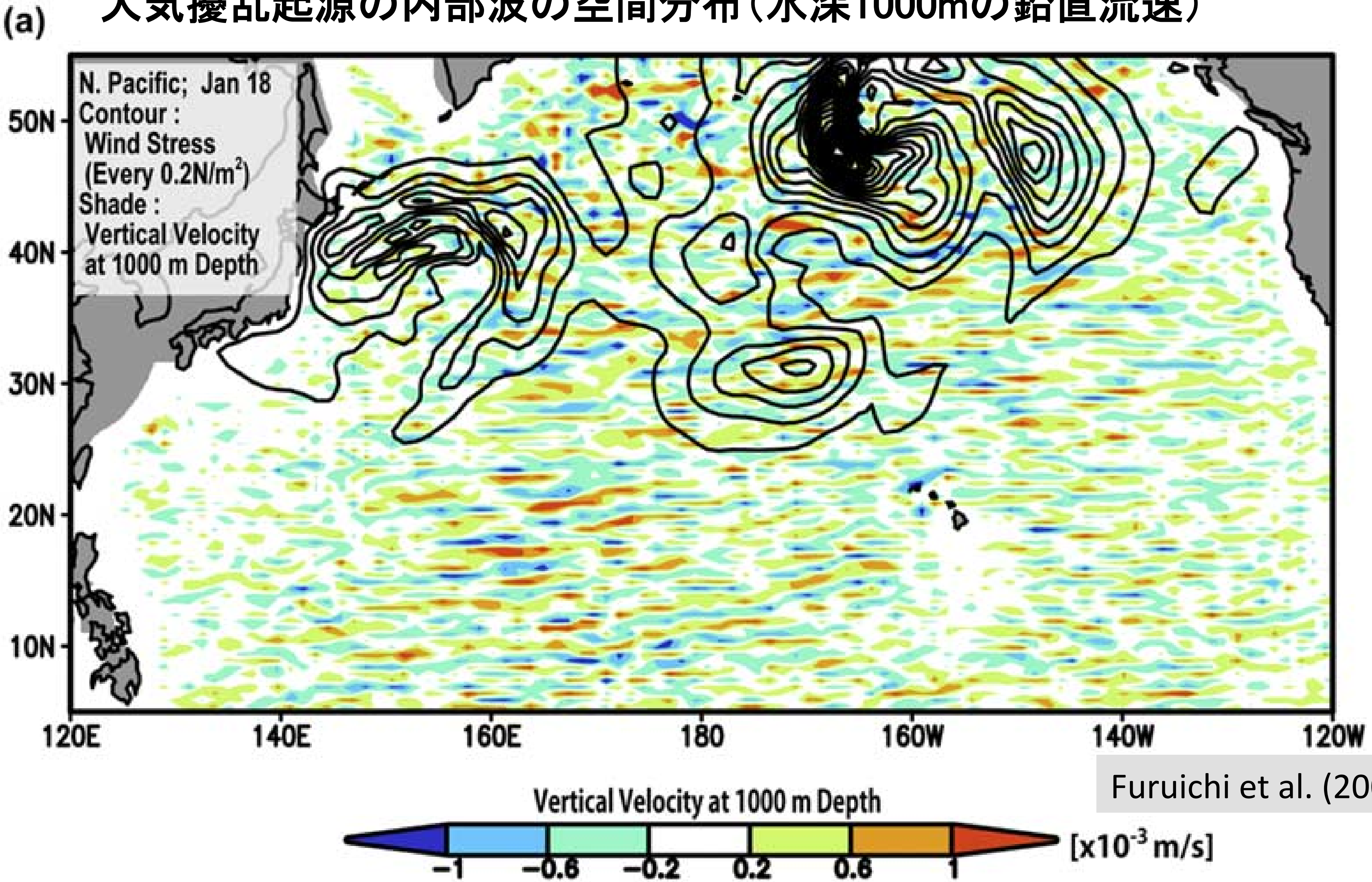
数値シミュレーションにより再現された北西太平洋の内部潮汐波
～水深1000mにおける鉛直変位～



丹羽・日比谷(2009)

3.5大気擾乱起源の内部波

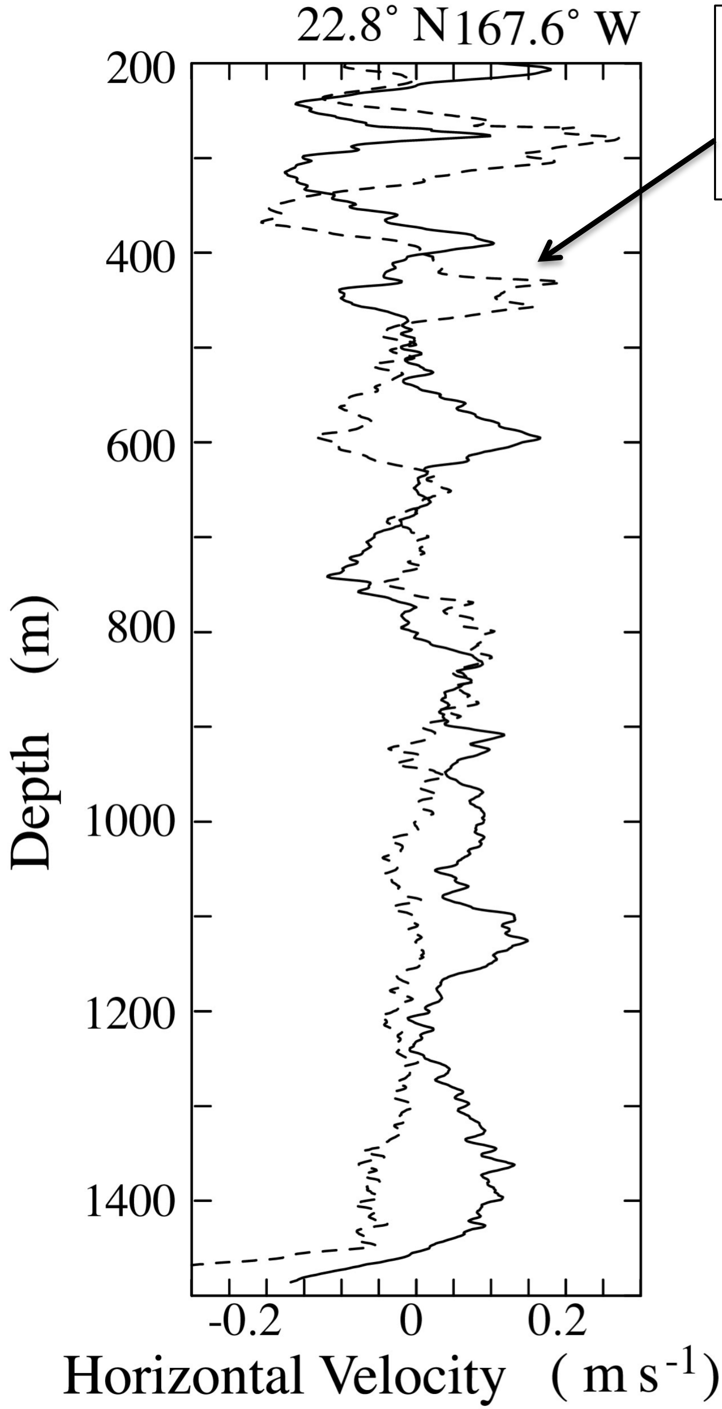
3次元数値シミュレーションにより再現された大気擾乱起源の内部波の空間分布（水深1000mの鉛直流速）



Furuichi et al. (2008)

投棄式流速計XCPを利用して
ハワイ海嶺の近傍で観測された
水平流速の鉛直プロファイル

Nagasawa et al.(2002)

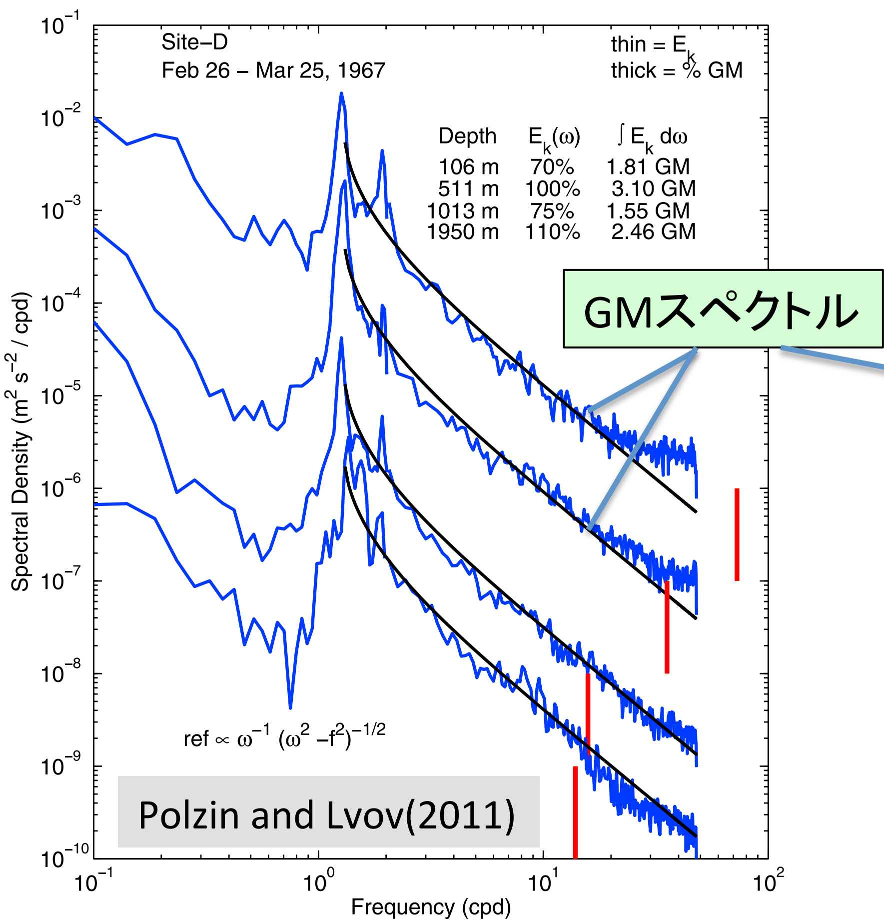


投棄式流速計XCPの投入

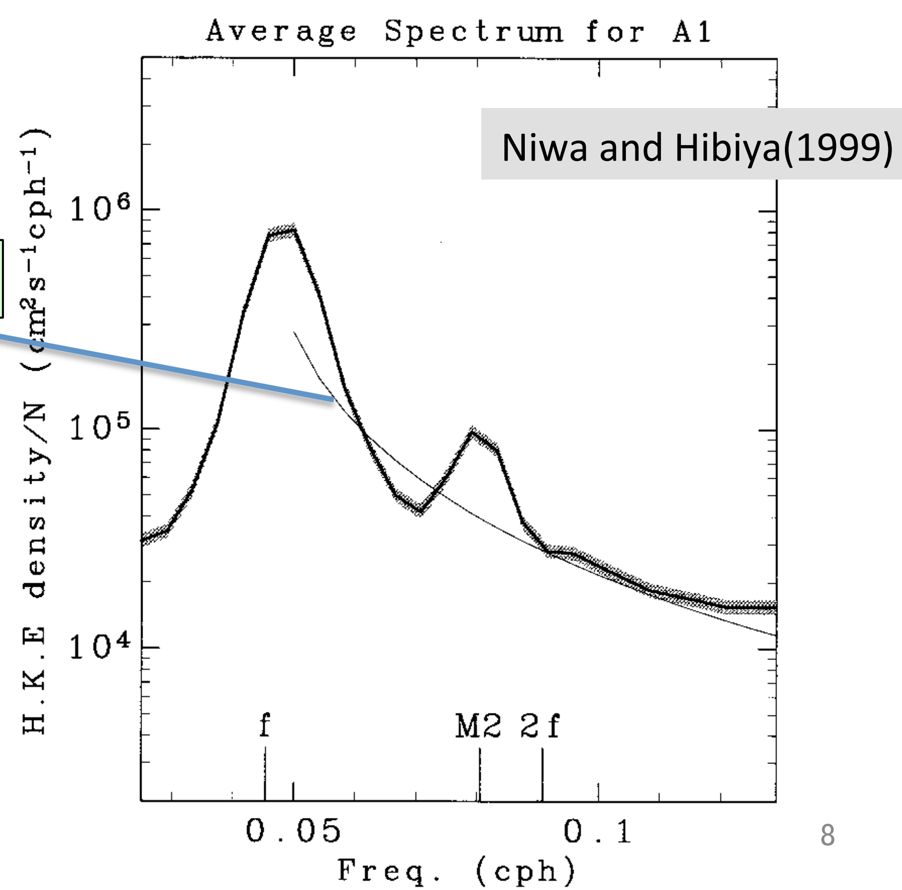
④海洋内部波の普遍平衡スペクトル

海洋深層で観測される内部波スペクトルの形状と規格化したエネルギーレベルが場所や時間に寄らずほぼ一定に保たれている。
⇒Garrett-Munk(GM)スペクトル。

西部大西洋で観測された
水平流速の周波数スペクトル



西部太平洋で観測された
水平流速の周波数スペクトル



⑤海洋内部波の様々な物理過程

海洋内部場は様々な物理過程がバランスすることで維持されている。

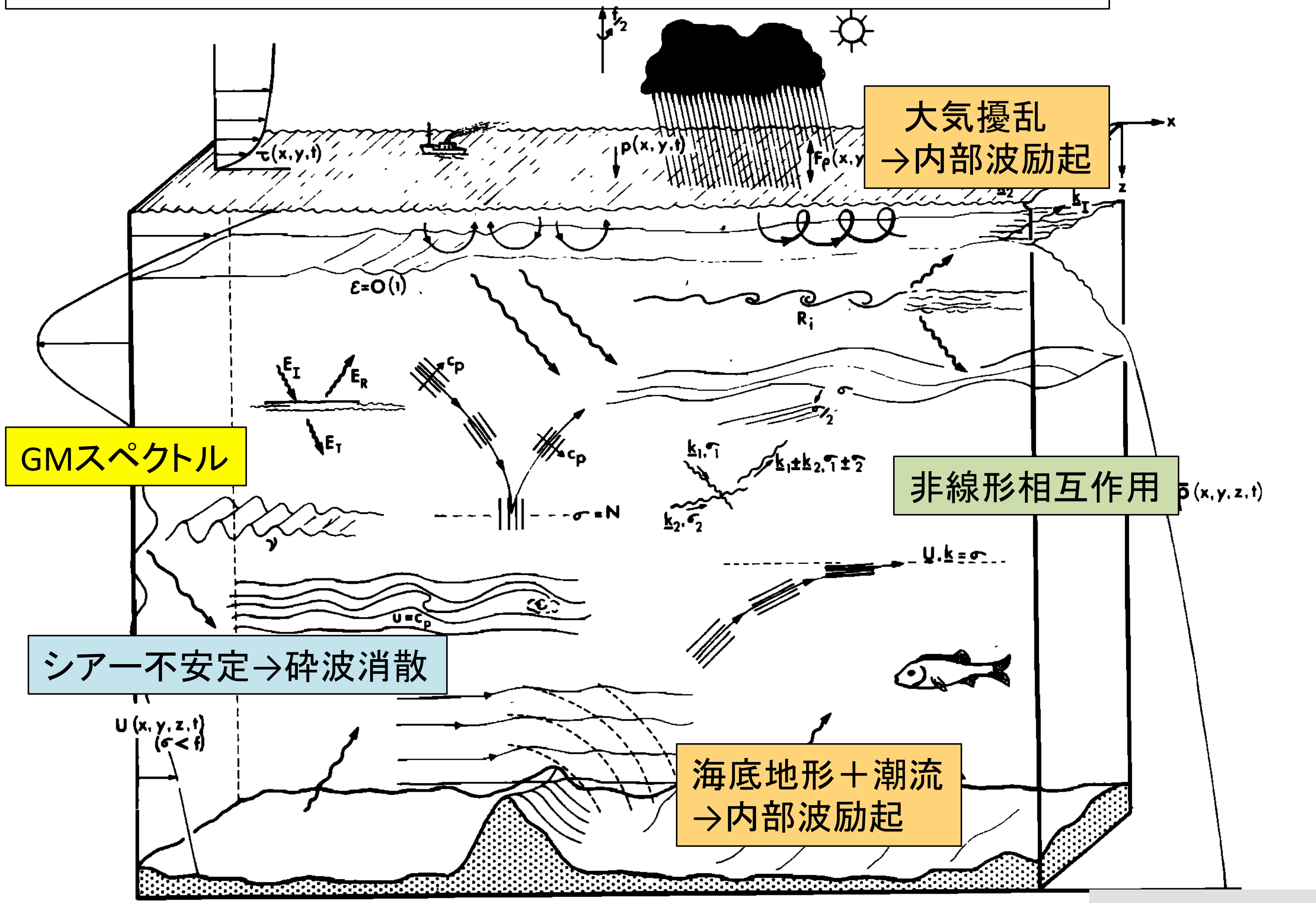
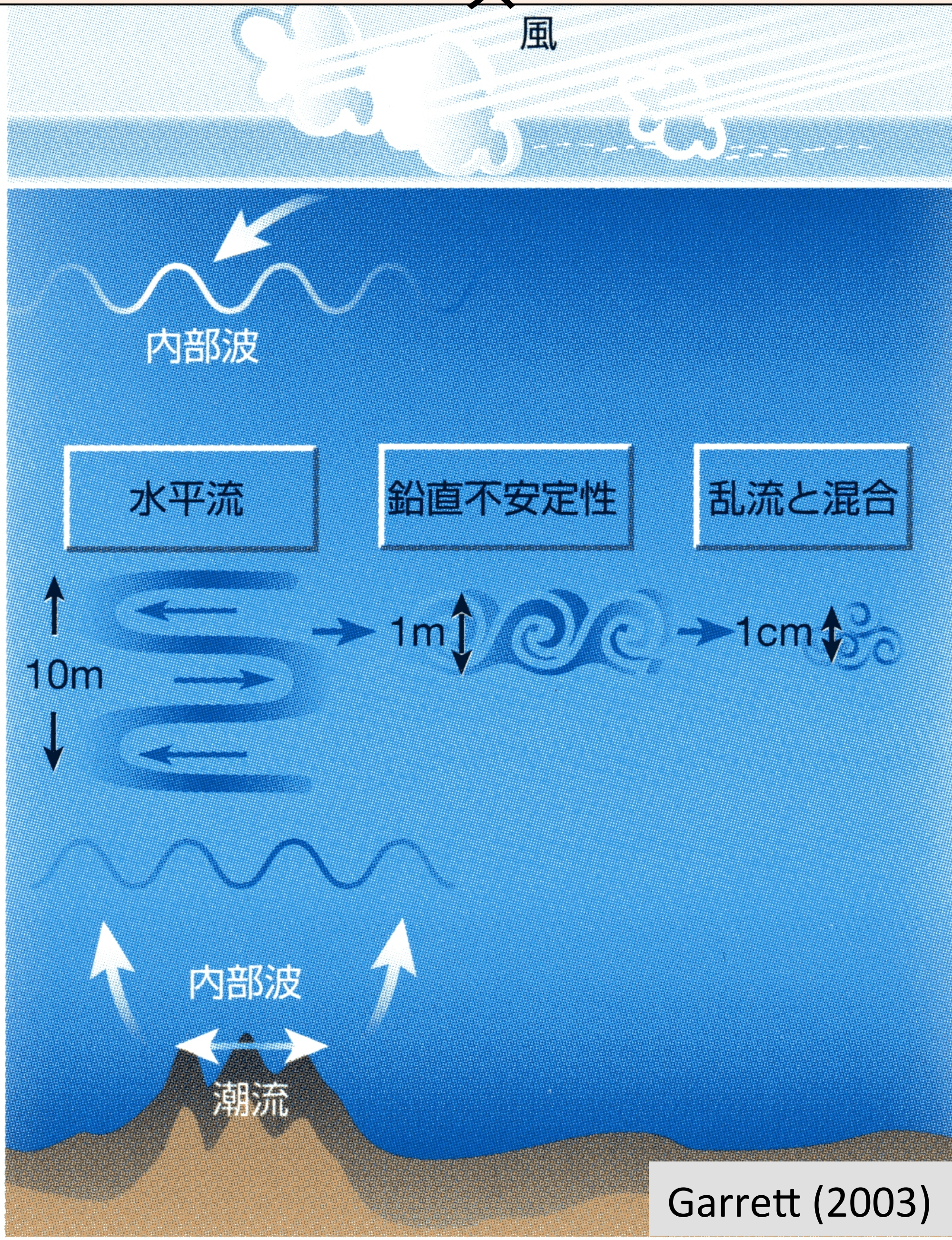


Fig. 5. Physical processes affecting internal waves.

Thorpe (1975)

⑥ 海洋内部波場のエネルギーバランス



Garrett (2003)

大気擾乱

潮汐

大規模スケール内部波
O(100km)～O(1km)

非線形相互作用
三波共鳴

エネルギー
カスケード

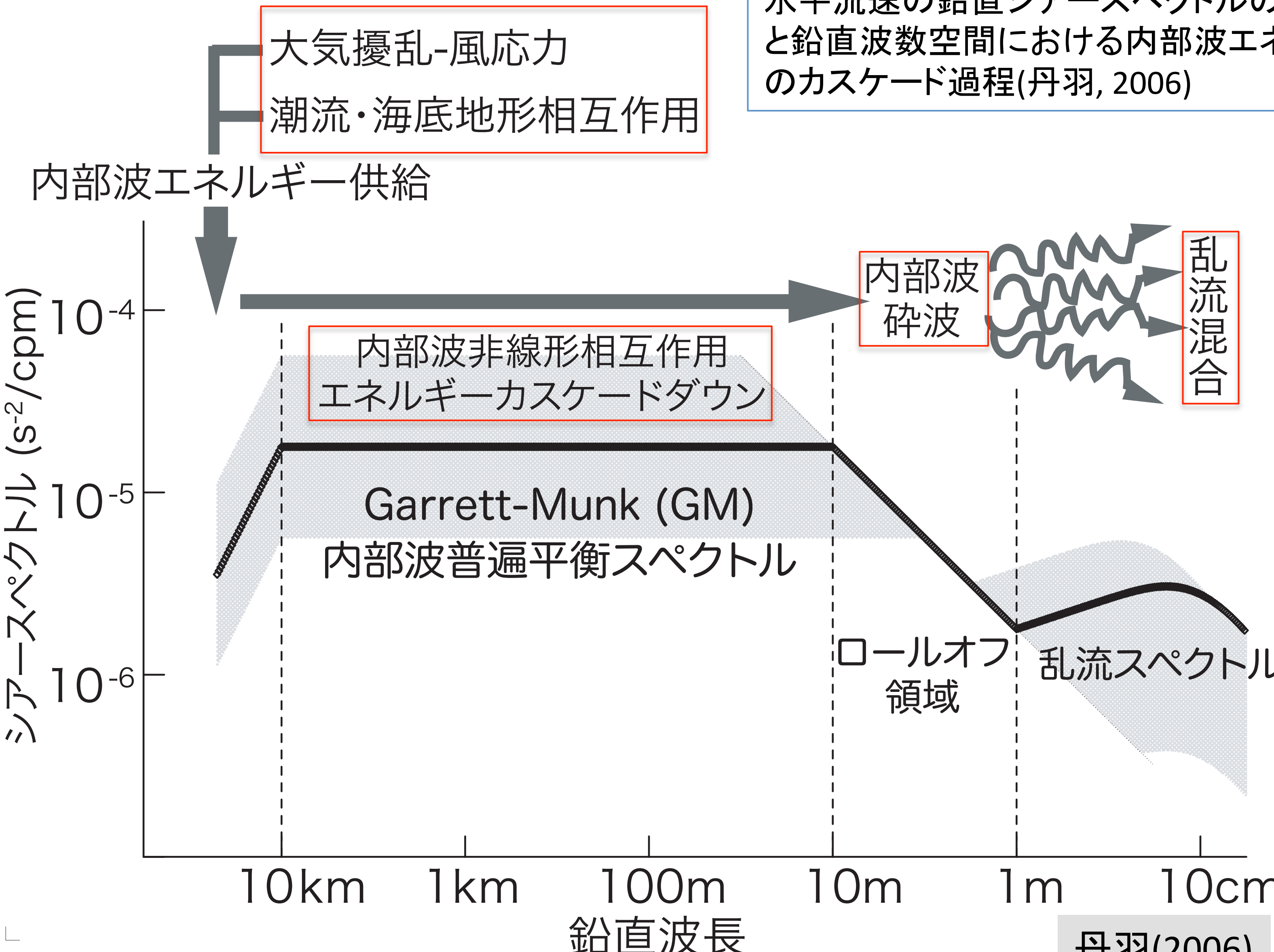
ファインスケール内部波
O(10m)～O(1m)

砕波

マイクロスケール乱流混合
O(1m)～O(1cm)

⑥海洋内部波スペクトルのエネルギーバランス

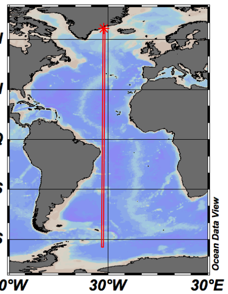
水平流速の鉛直シアースペクトルの模式図と鉛直波数空間における内部波エネルギーのカスケード過程(丹羽, 2006)



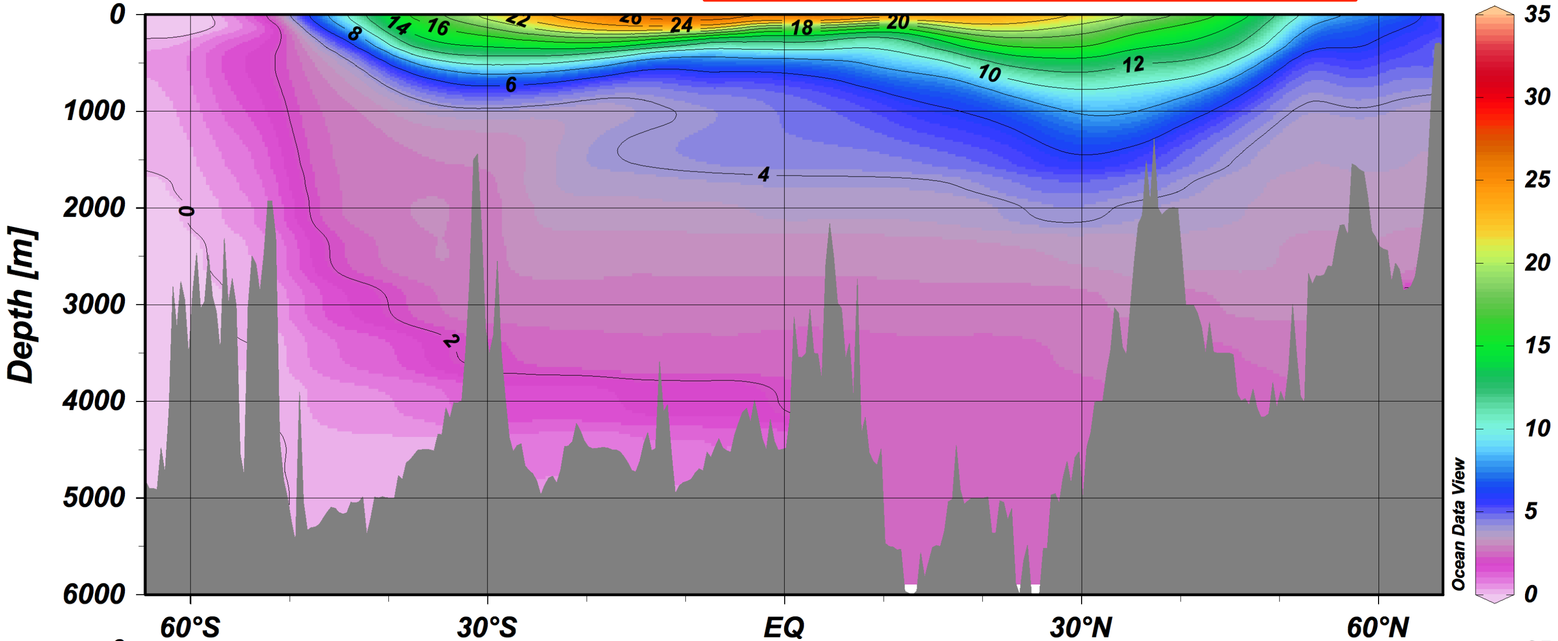
丹羽(2006)

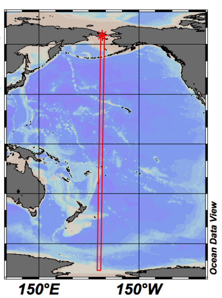
2. 海洋内部波の重要性

大西洋(上)と太平洋(下)の
水温の南北鉛直断面図

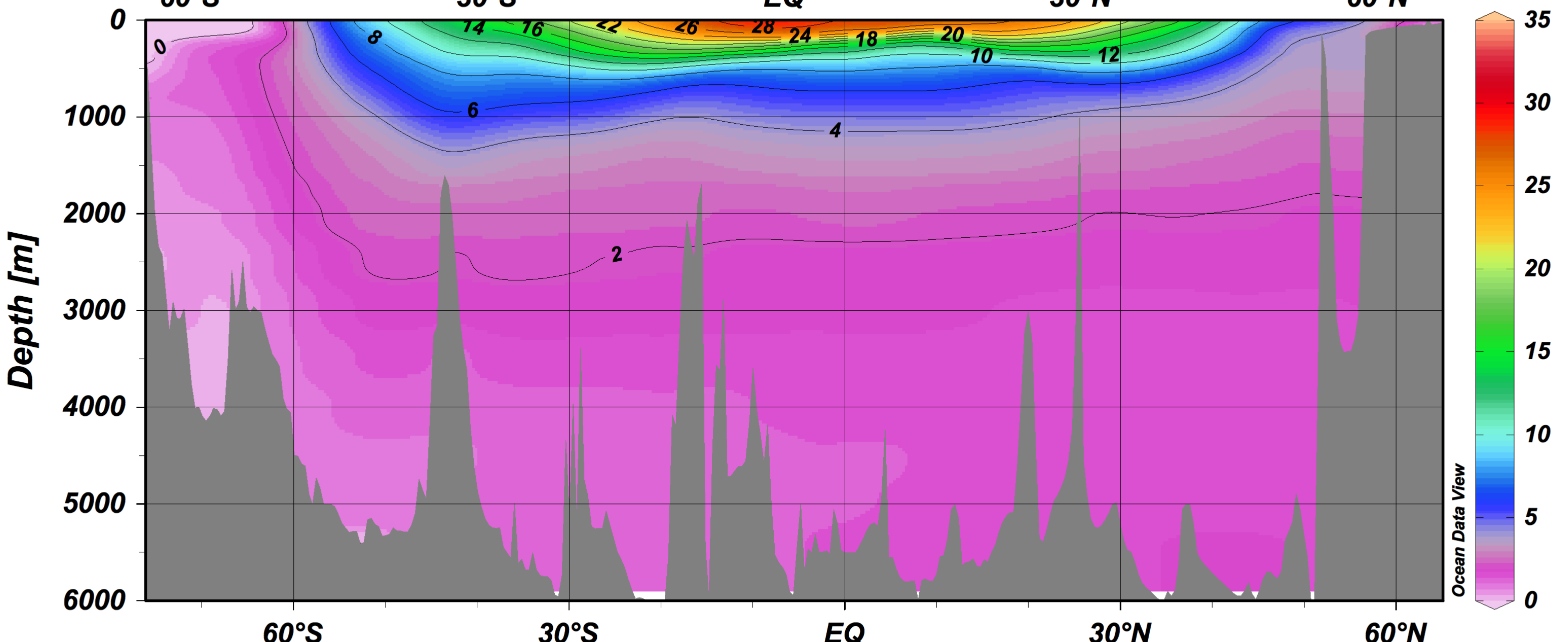


大西洋

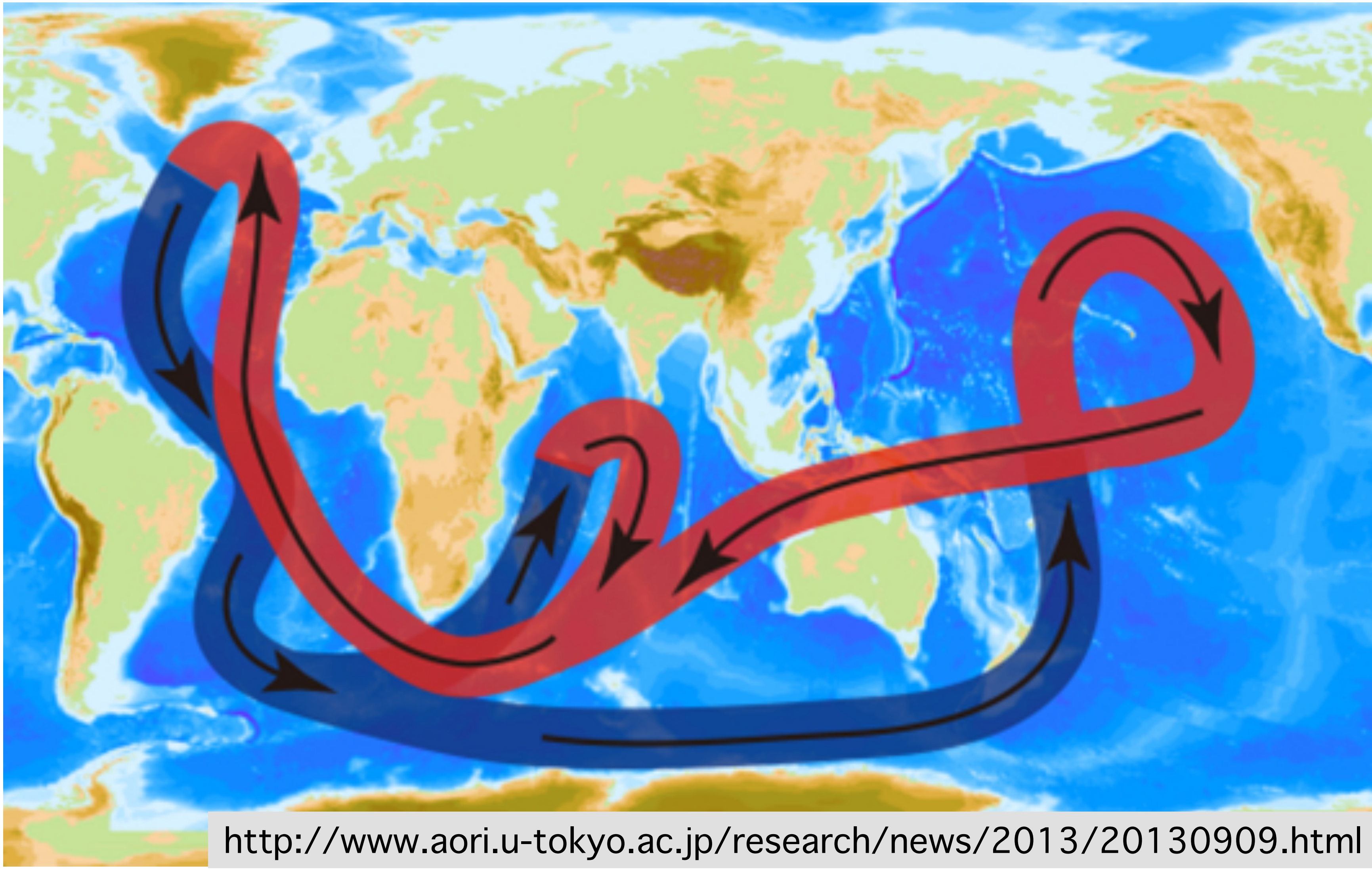




太平洋



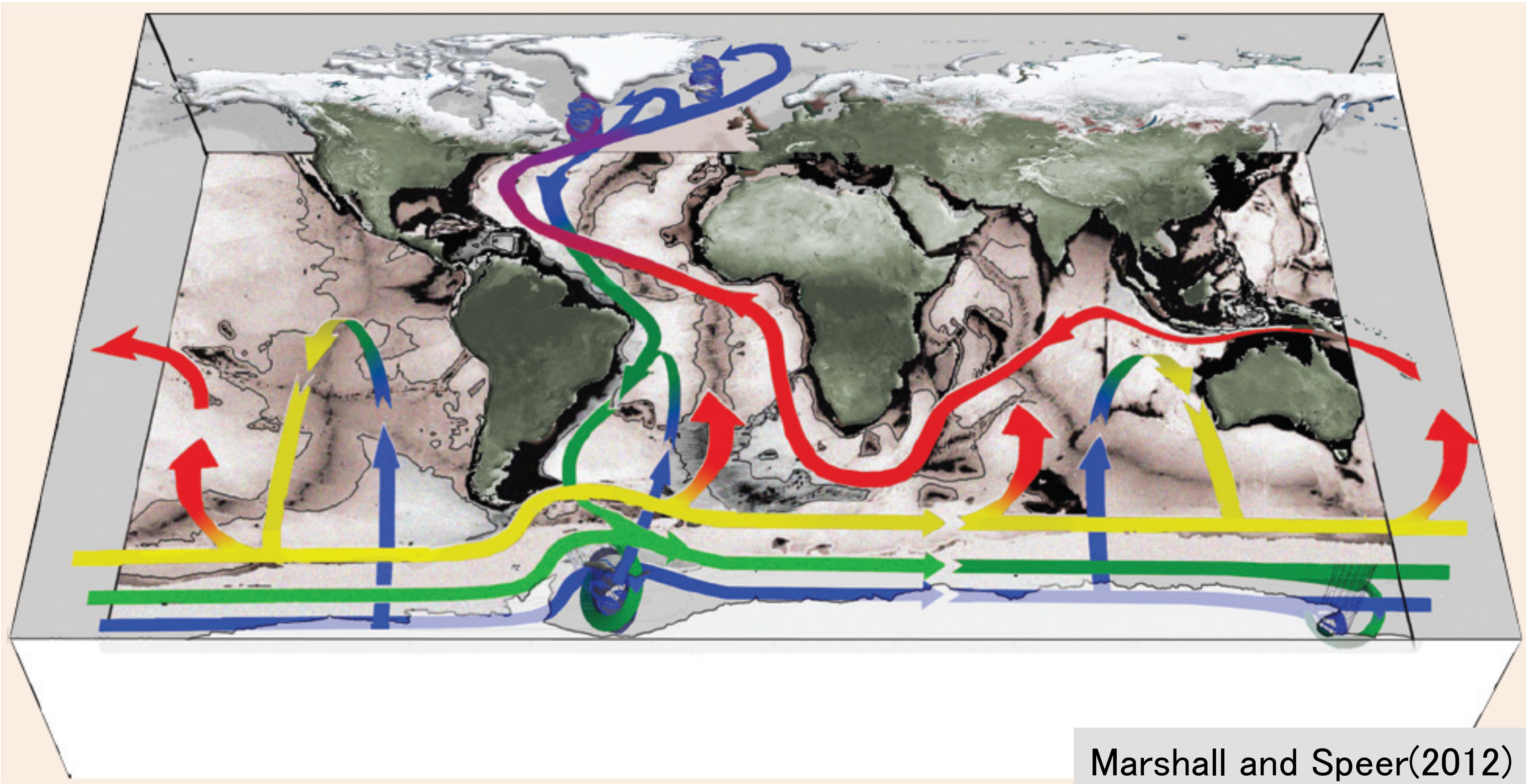
海洋深層大循環



http://www.aori.u-tokyo.ac.jp/research/news/2013/20130909.html

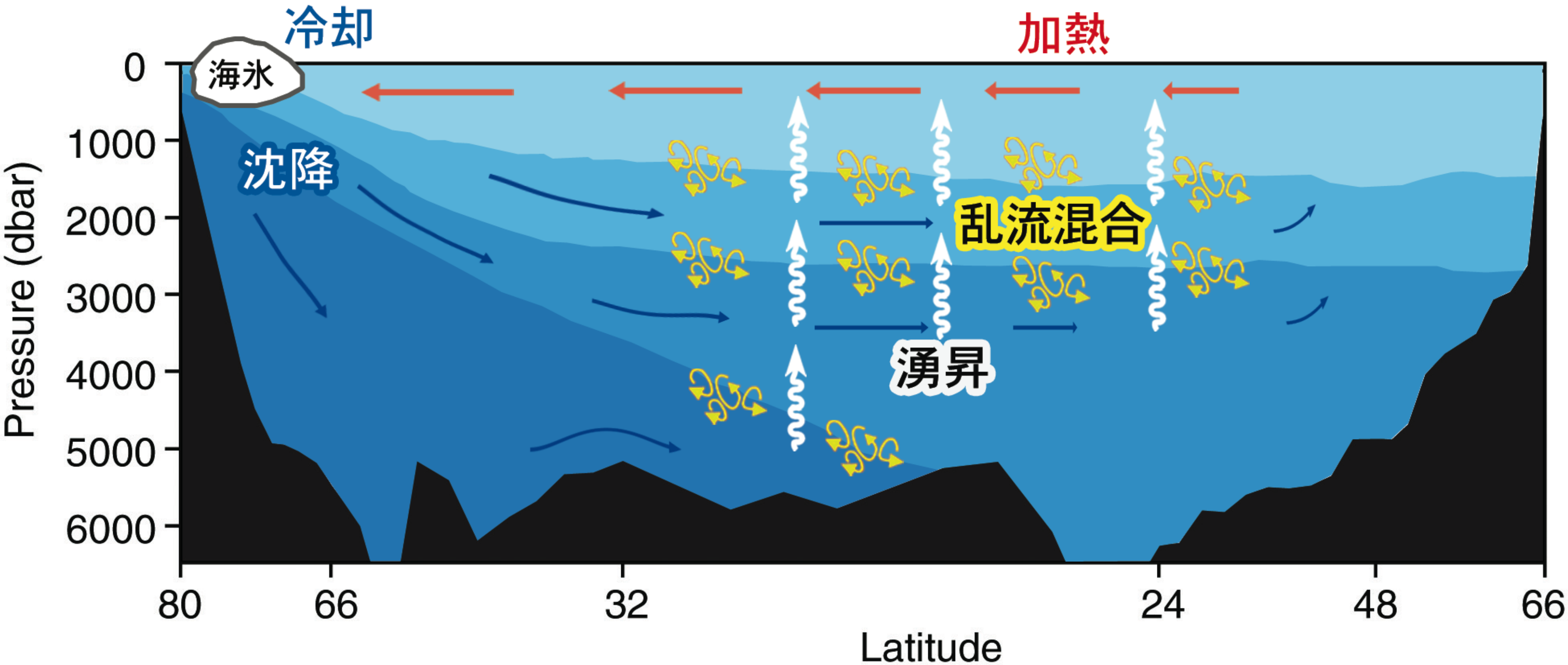
- 高緯度域で冷却されて深層へ沈み込んだ海水が長い年月をかけて全球を巡る。

海洋深層大循環



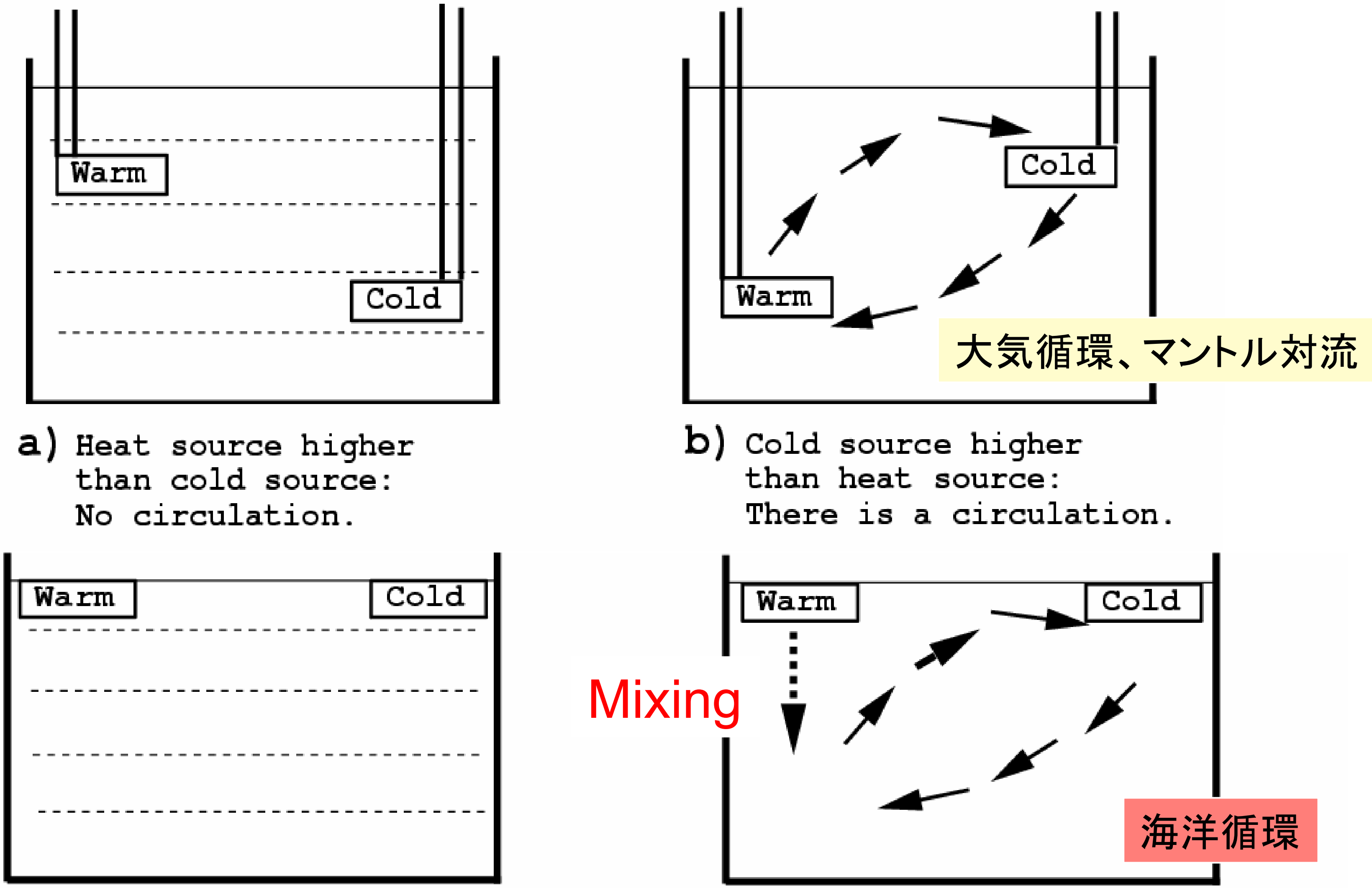
Marshall and Speer(2012)

深層海洋大循環の物理過程



乱流混合により表層の熱が深層に伝えられ、
その結果、深層水が浮力を得て湧昇する。

サンドストロームの定理：定常的な閉じた循環を維持するには、
Sandstrom(1908)　熱源が冷却源の下部に位置する必要がある。



a) Heat source higher than cold source: No circulation.

b) Cold source higher than heat source: There is a circulation.

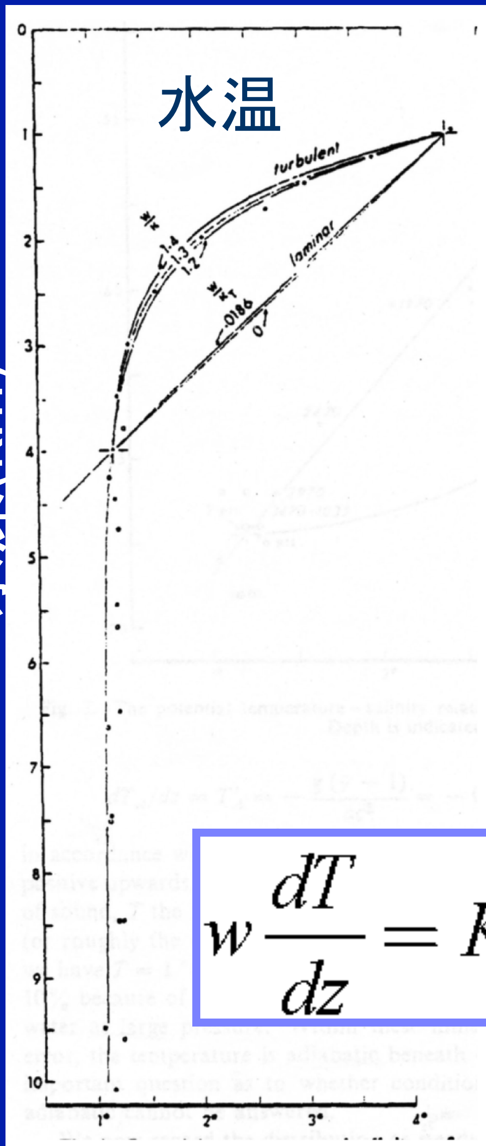
a) Circulation driven by molecular mixing is extremely weak.

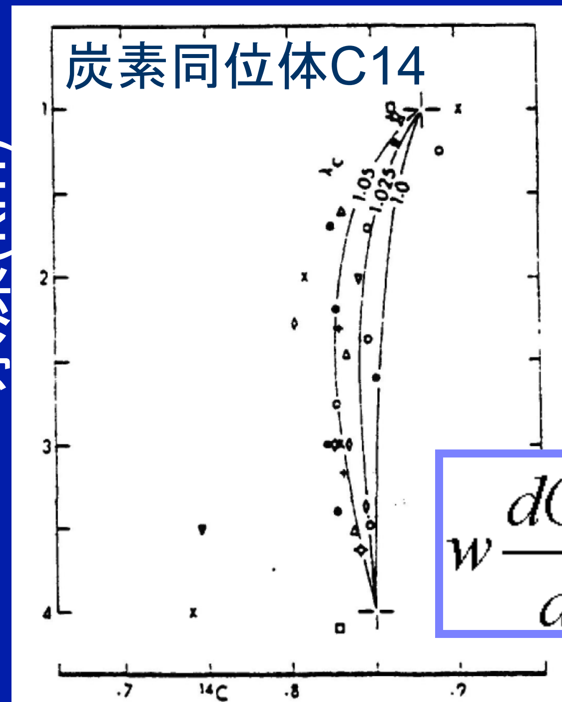
b) Effective depth of heat source moved downward by tidal and wind mixing: circulation is very strong.

Huang(2004)

Munk(1966): Abyssal Recipes

水温と炭素同位体の鉛直分布から鉛直乱流混合係数を推定





Kv,w=一定と仮定

$$w\frac{dC^{14}}{dz} = Kv\frac{d^2C^{14}}{dz^2} - \mu C^{14}$$

$$w\frac{dT}{dz} = Kv\frac{d^2T}{dz^2}$$

$$Kv \approx 1\times10^{-4}\, m^2/s$$

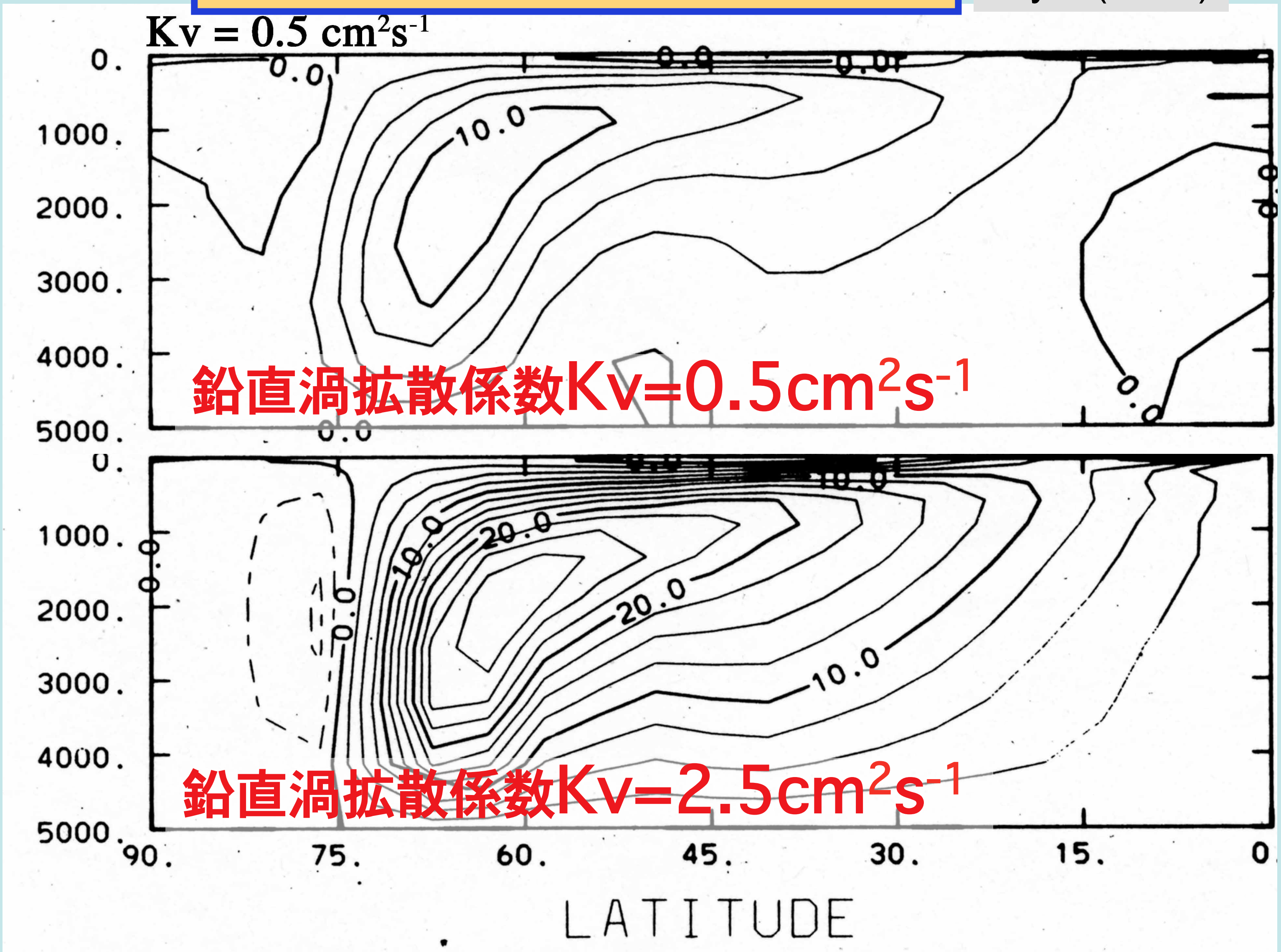
$$w = 1.2cm/day \Rightarrow 20SV$$

全湧昇量

Munk(1966)

海洋深層大循環の数値実験

Bryan(1987)



深層海洋大循環モデルの流量・パターンが
サブグリッドスケールの鉛直渦拡散係数に強く依存する

熱輸送量の乱流混合係数(Kv)依存性

Park and Bryan(2000)

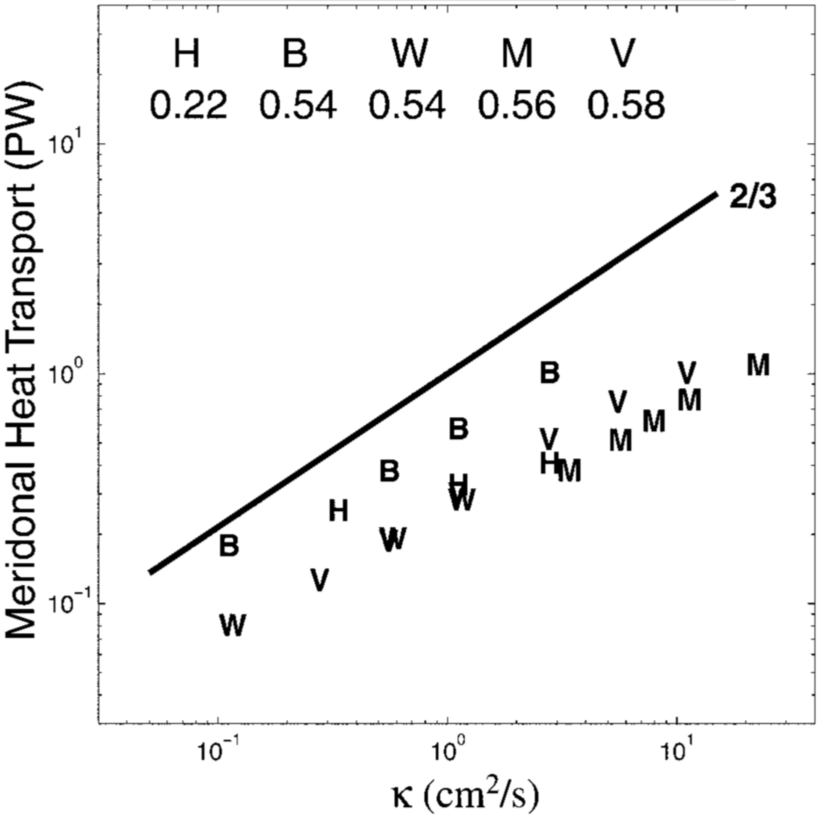


FIG. 1. Results from earlier studies. **B** is for Bryan (1987), **V** is for Colin de Verdière (1988), **W** is for Winton (1996), **H** is for Hu (1996), and **M** is for Marotzke (1997). Single hemispheric sector basins with flat-bottom geometry are used in all cases. **B**, **W**, and **M** are from depth coordinate models based on primitive equations, **V** is from a depth coordinate model based on planetary geostrophic equation, and **H** is from an isopycnal layer model. In **M**, κ is nonzero along eastern and western boundaries. In other cases κ is uniform throughout the domain. Surface wind stress is considered in **B** and **H**. Numbers represents the power dependence of the meridional heat transport on κ for each case.

$$W\frac{\Delta T}{H} = K_V \frac{\Delta T}{H^2}$$ 鉛直移流拡散バランス

$$\frac{U}{H} = \frac{g\alpha\Delta T}{fL}$$ 温度風の関係

$$\frac{W}{H} = \frac{U}{L}$$ 連続の式

$$H = \left(\frac{K_V f L^2}{g\alpha\Delta T}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad U = \left(\frac{K_V (g\alpha\Delta T)^2}{f^2 L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

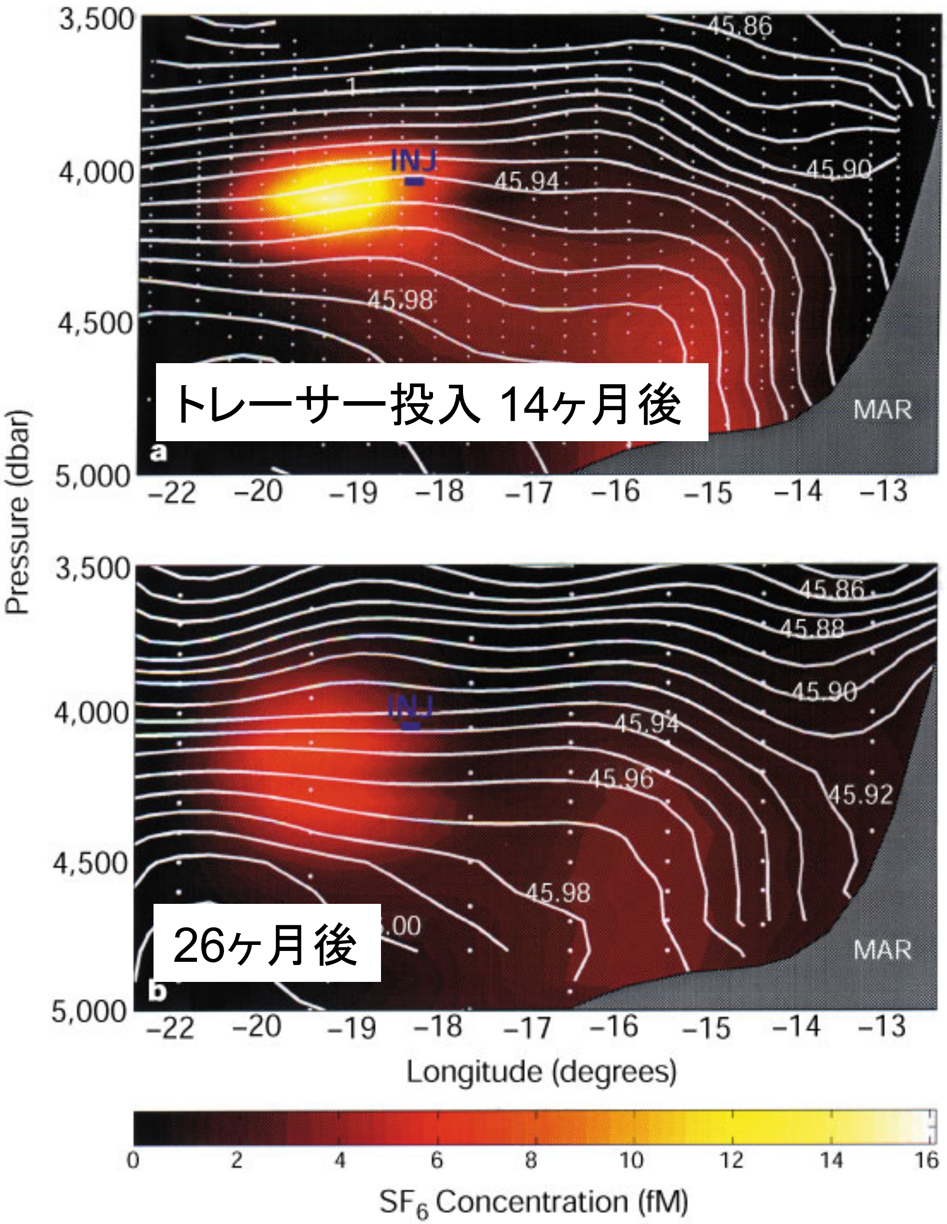
熱輸送量 $\propto \Delta T U H L$

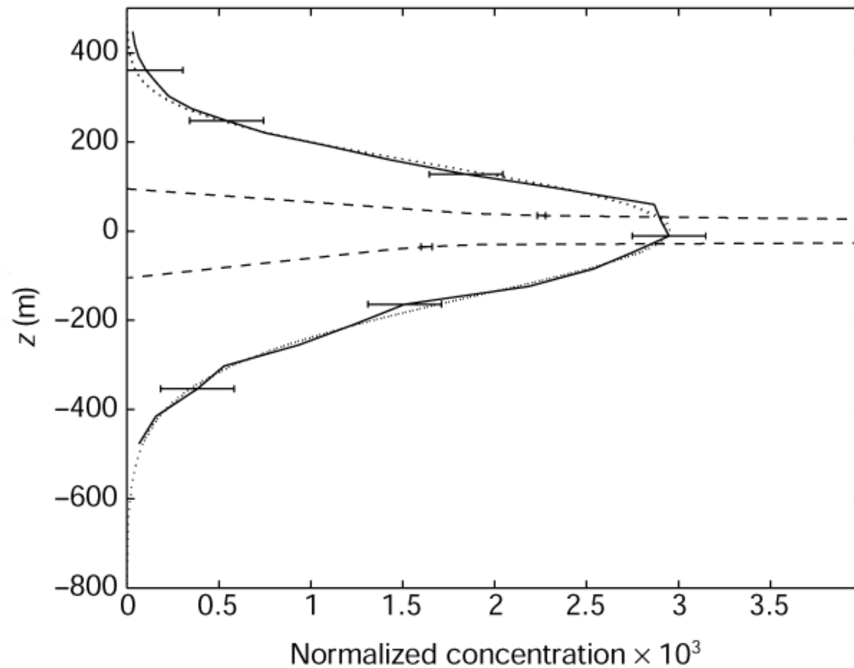
$$= \left(\frac{K_V^2 g\alpha\Delta T^4 L^4}{f}\right)^{\frac{1}{3}} \propto K_V^{2/3}$$

鉛直渦拡散係数Kvの直接測定

Tracer Release実験

Ledwell et al.(2000)





鉛直渦拡散係数

トレーサー濃度の鉛直分散

$$K_V = \frac{1}{2}\frac{d\sigma_V^2}{dt}$$

鉛直渦拡散係数Kvの測定

$$\langle \rho' w' \rangle = K_V \frac{d\rho_0}{dz}$$

乱流密度フラックス
→海洋中での
直接測定が困難

乱流エネルギーバランス（仮定：定常性、水平一様性）

$$0 = -\langle u' w' \rangle \frac{dU}{dz} - \frac{g}{\rho_0} \langle \rho' w' \rangle - \varepsilon$$

内部波シアーによる
乱流エネルギーの生成

内部波の砕波に伴う
乱流混合による位置
エネルギーの増加

乱流エネルギー
散逸

フラックス
リチャードソン数

$$R_f \equiv \frac{-\dfrac{g}{\rho_0}\langle \rho' w' \rangle}{\langle u' w' \rangle \dfrac{dU}{dz}} \sim 0.15$$

水理
実験

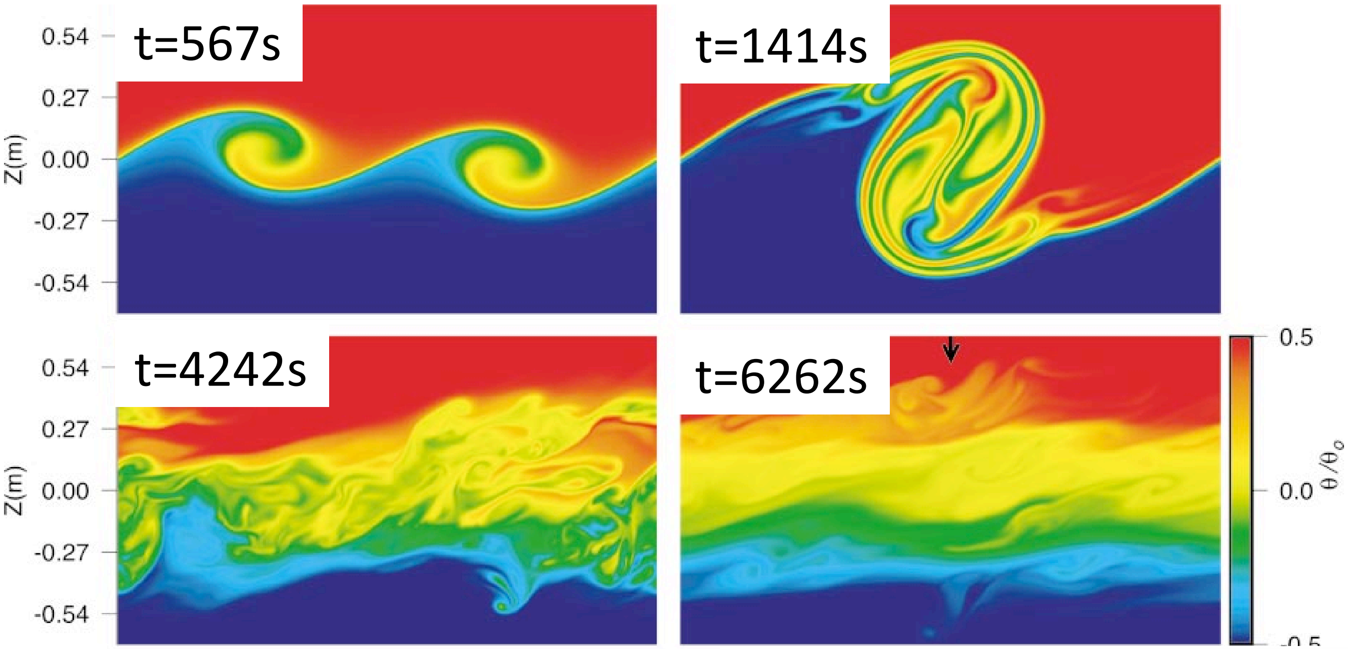
$$\left(R_f = \frac{K_V N^2}{A_V \left(\dfrac{dU}{dz} \right)^2} = \frac{K_V}{A_V} R_i \right)$$

$$\frac{g}{\rho_0}\langle \rho' w' \rangle = \frac{R_f}{1-R_f}\varepsilon$$

Osborn(1980)の式

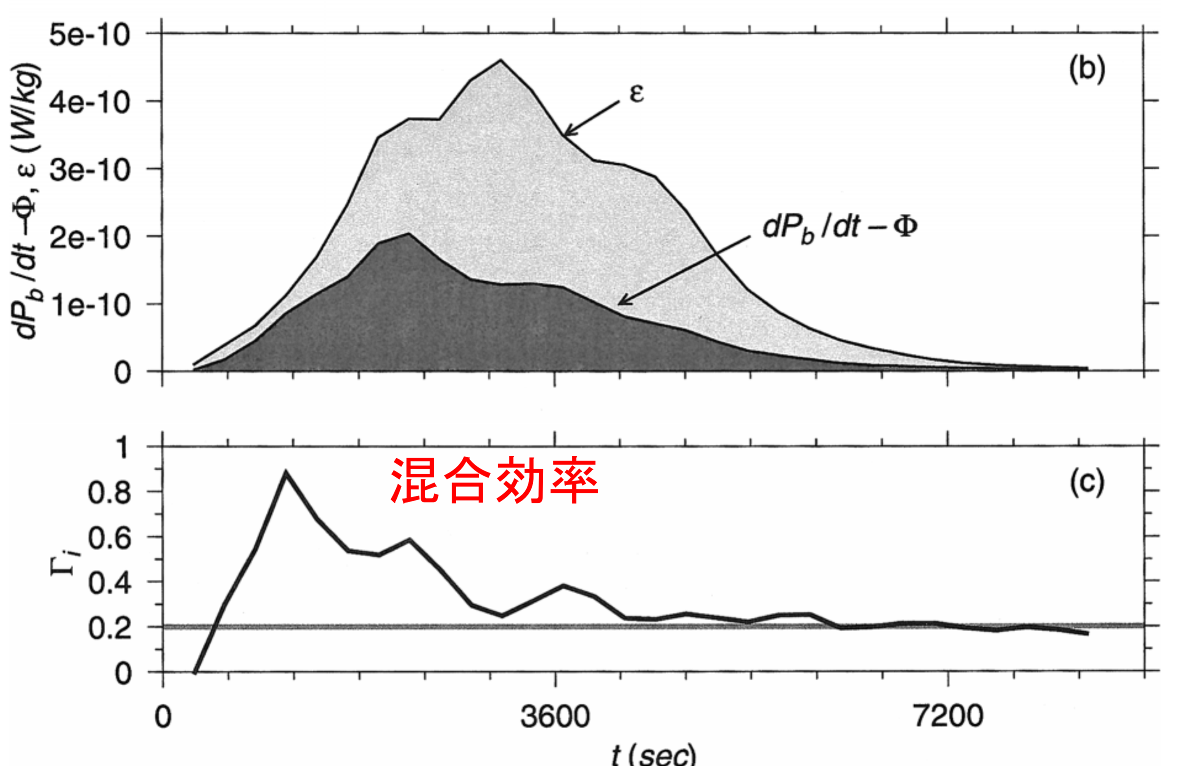
$$K_V = \frac{R_f}{1-R_f}\frac{\varepsilon}{N^2} = \Gamma \frac{\varepsilon}{N^2}$$

$\Gamma \approx 0.2$ 混合効率

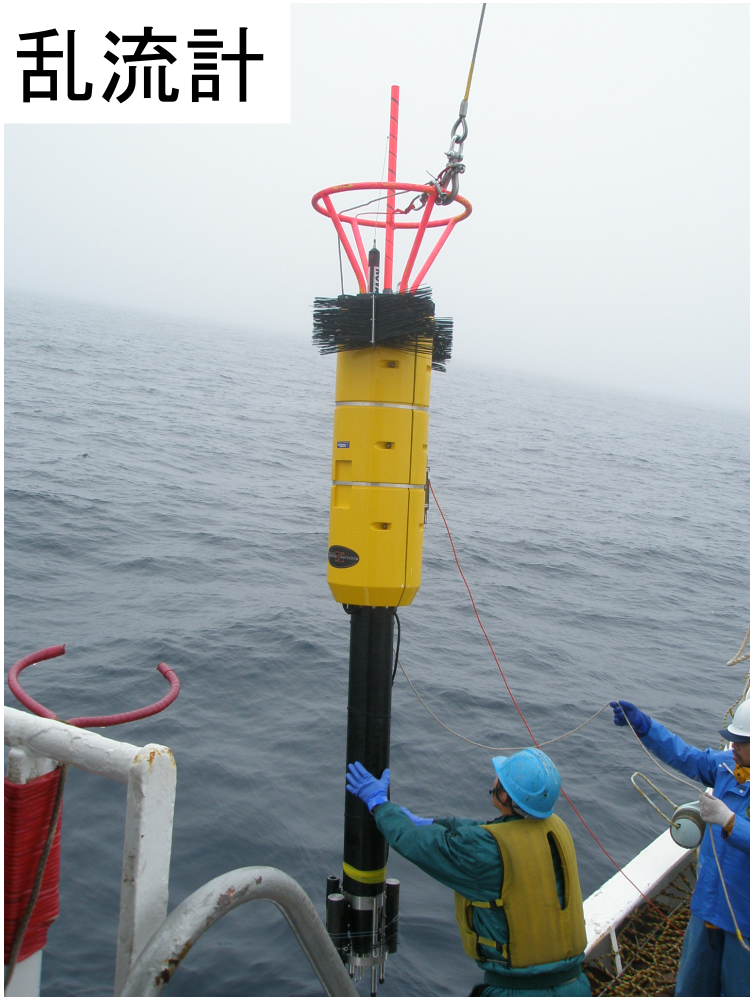


シアー不安定の数値実験

Smyth et al.(2001)



乱流計



エネルギー散逸率

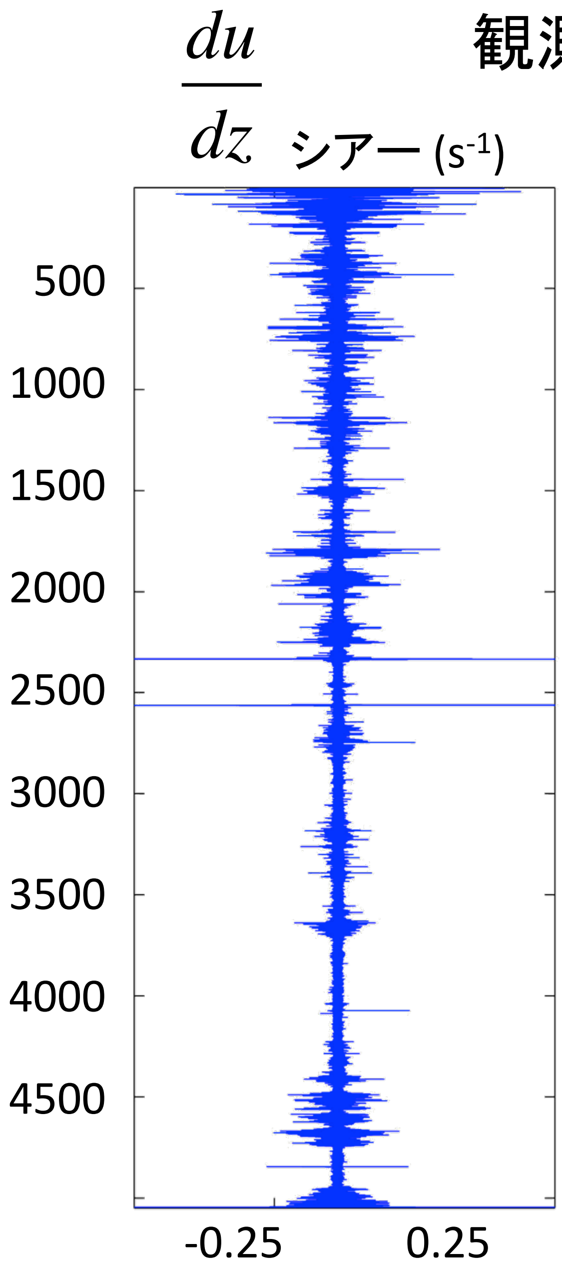
$$\varepsilon = \underset{\text{分子粘性}}{\nu} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$$

等方性乱流の場合

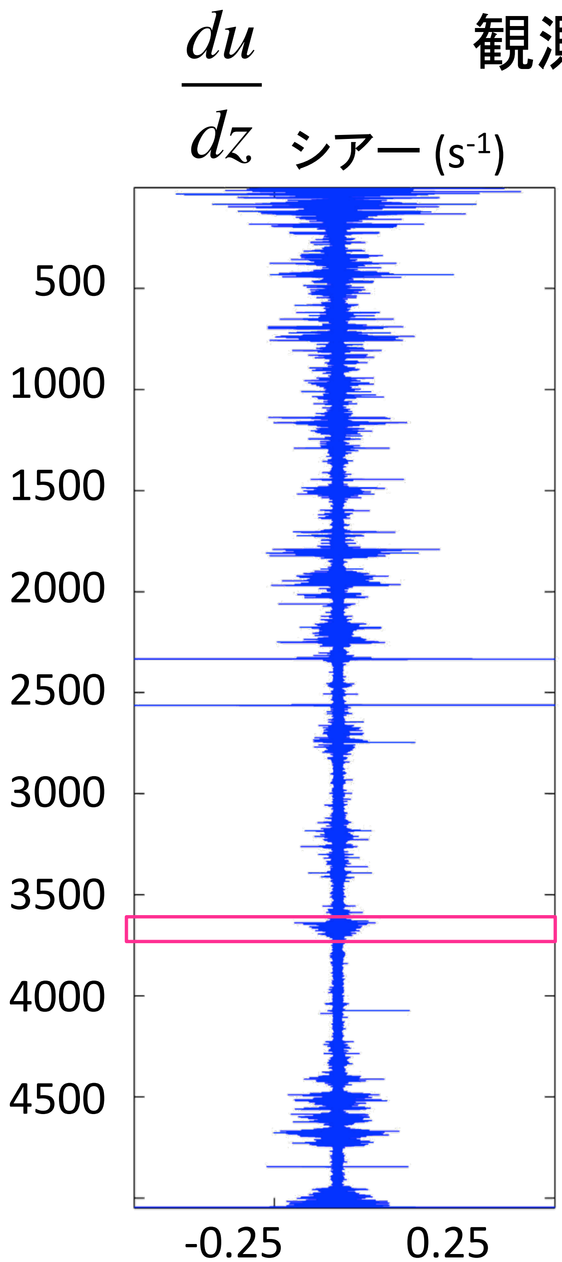
$$\boxed{\varepsilon = \frac{15}{2} \nu \left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2}$$

$$K_V = \Gamma \frac{\varepsilon}{N^2}$$

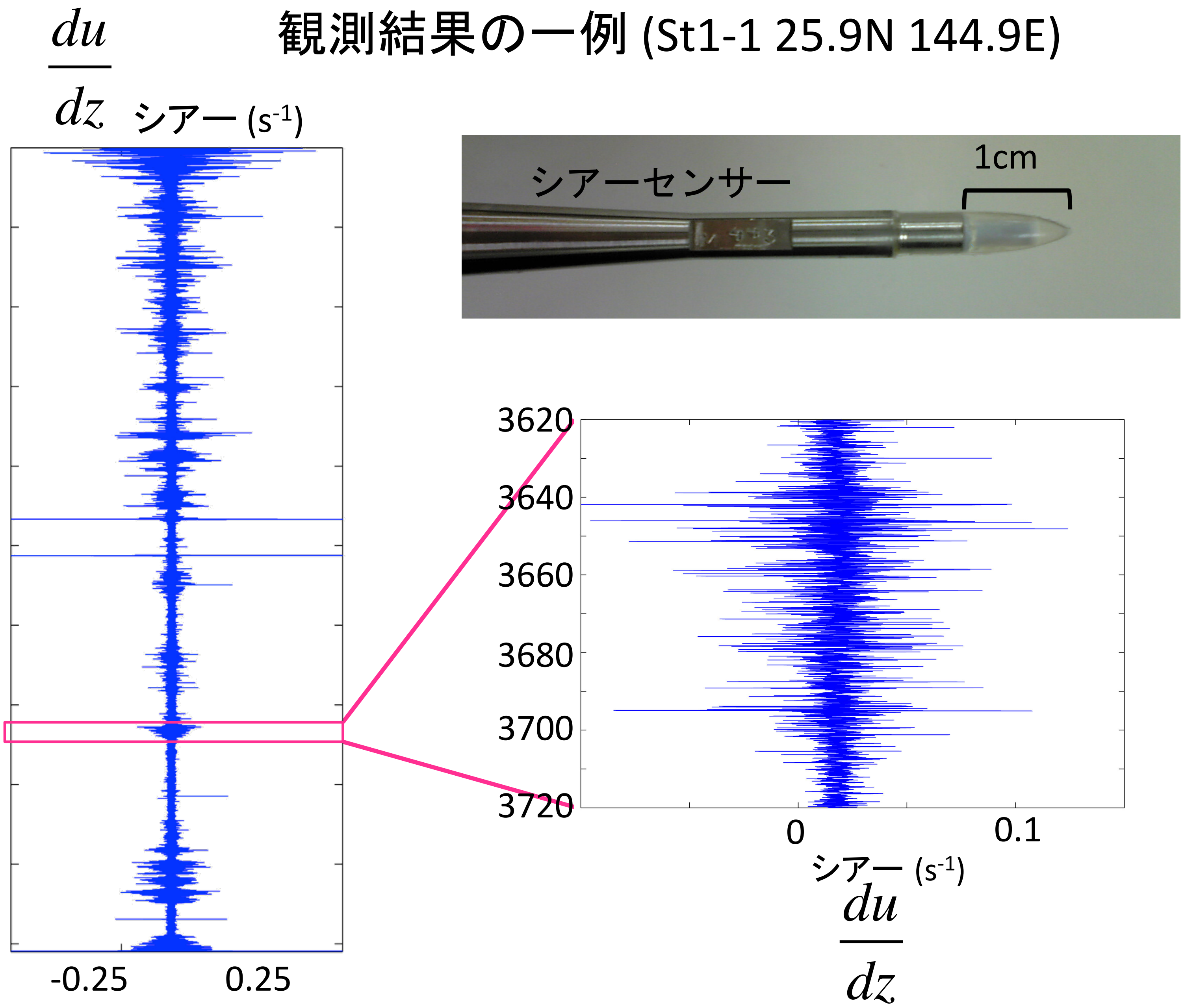
観測結果の一例 (St1-1 25.9N 144.9E)



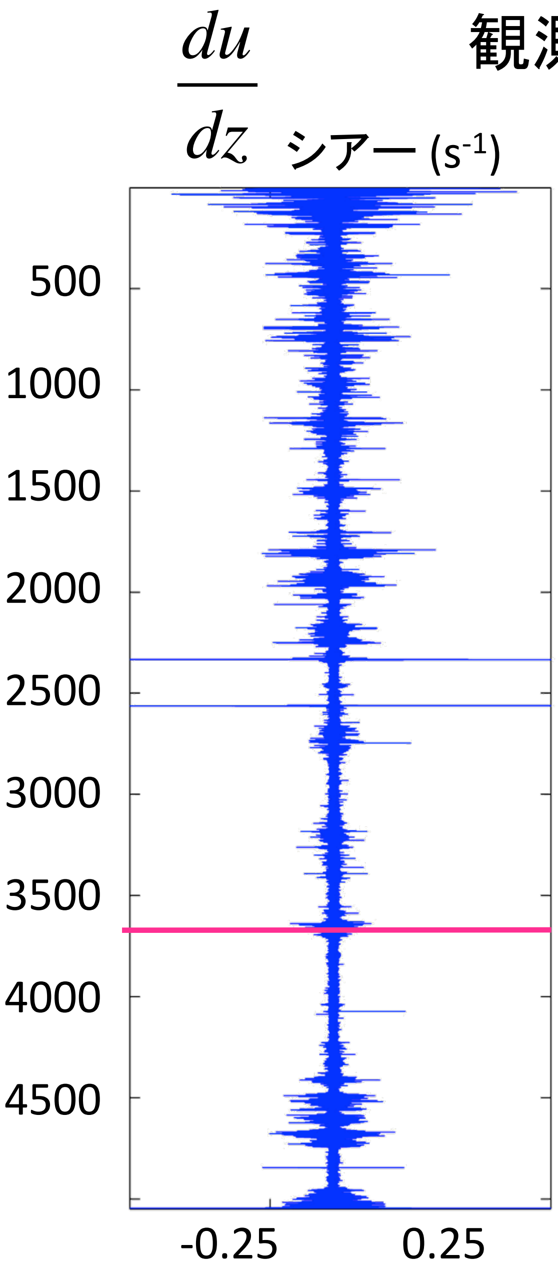
観測結果の一例 (St1-1 25.9N 144.9E)

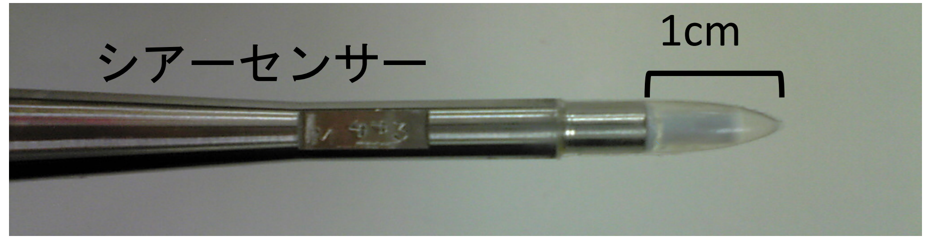


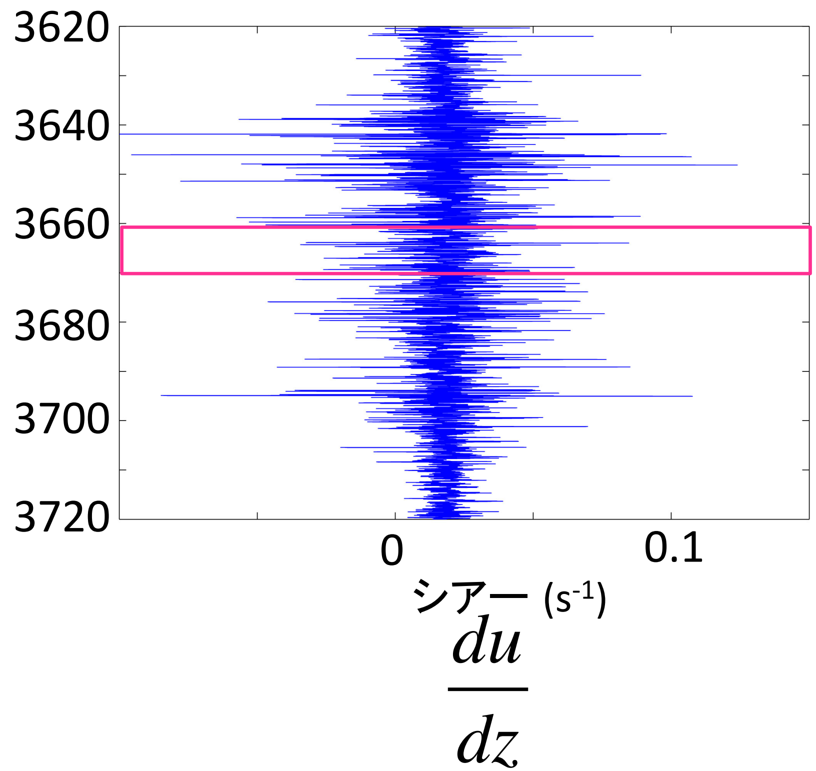
観測結果の一例 (St1-1 25.9N 144.9E)



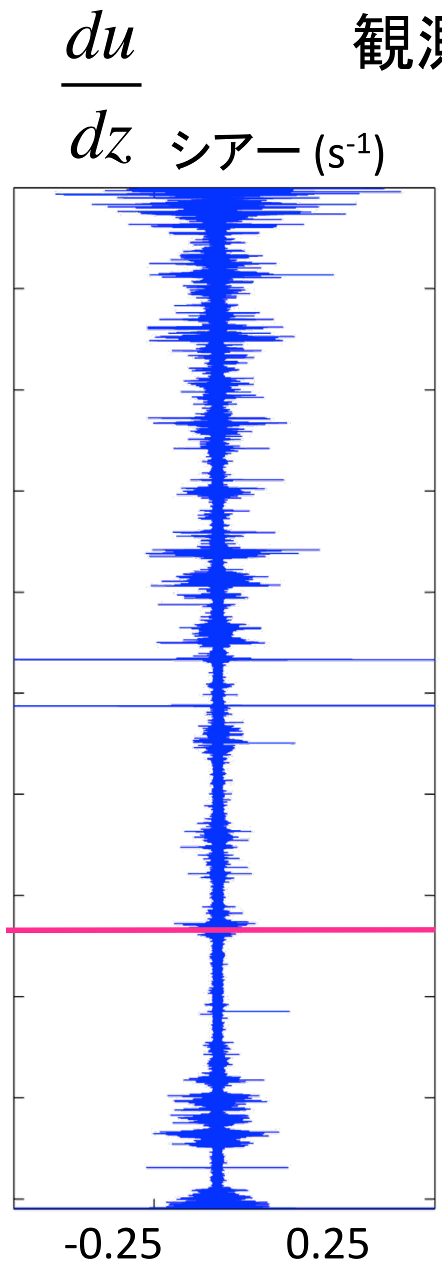
観測結果の一例 (St1-1 25.9N 144.9E)

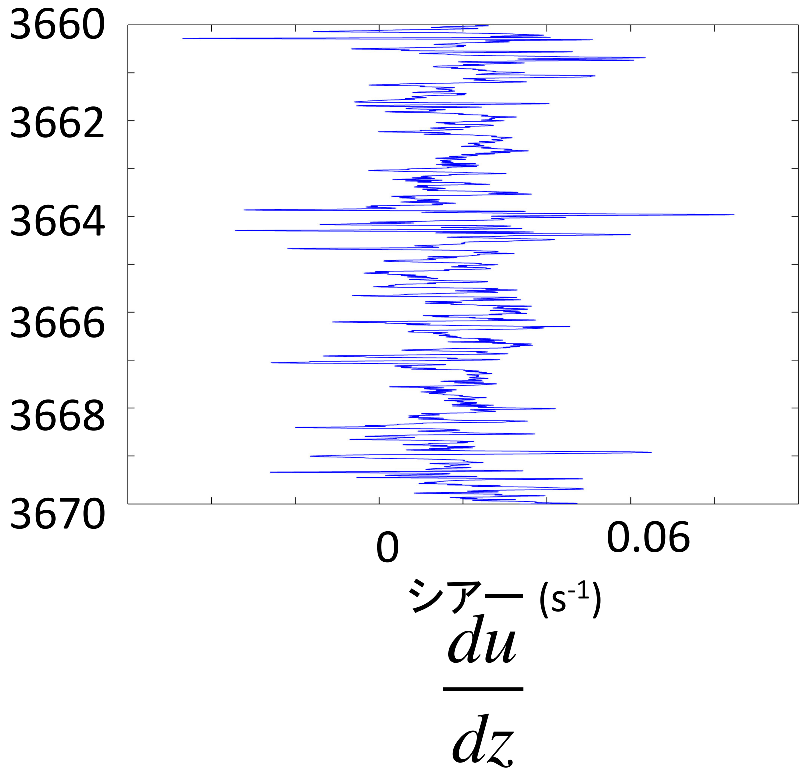




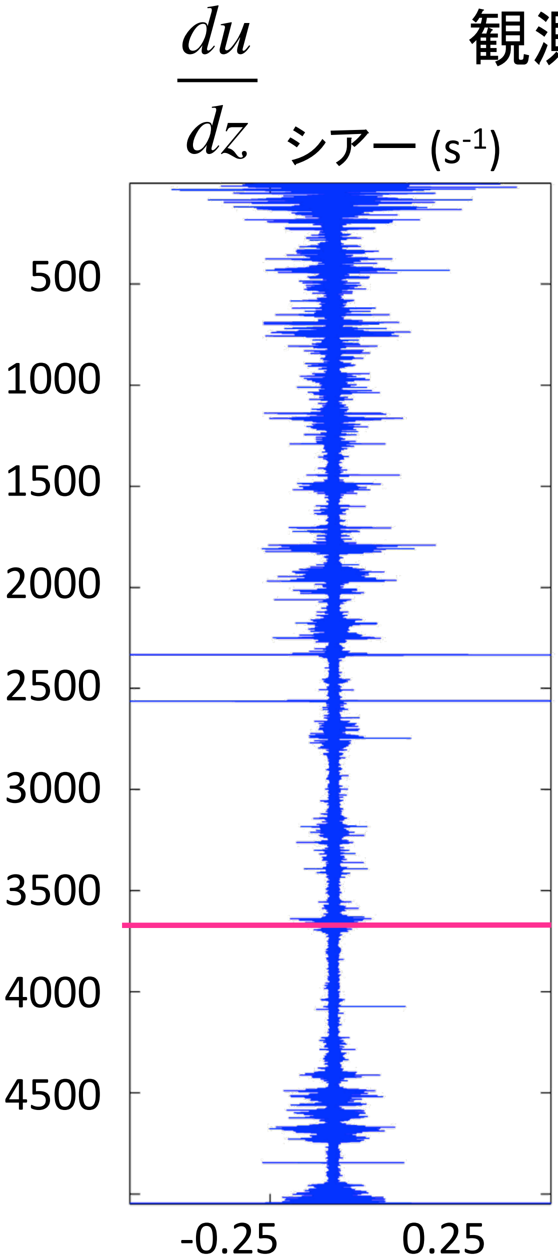


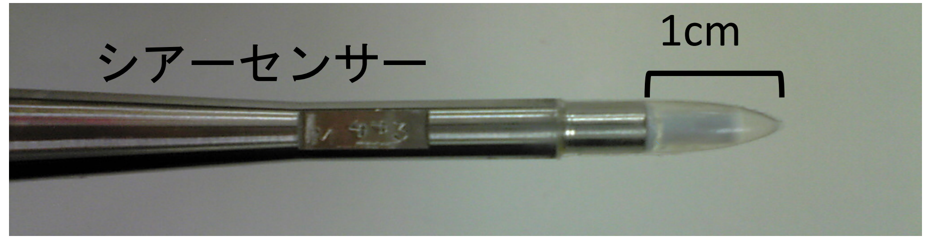
観測結果の一例 (St1-1 25.9N 144.9E)

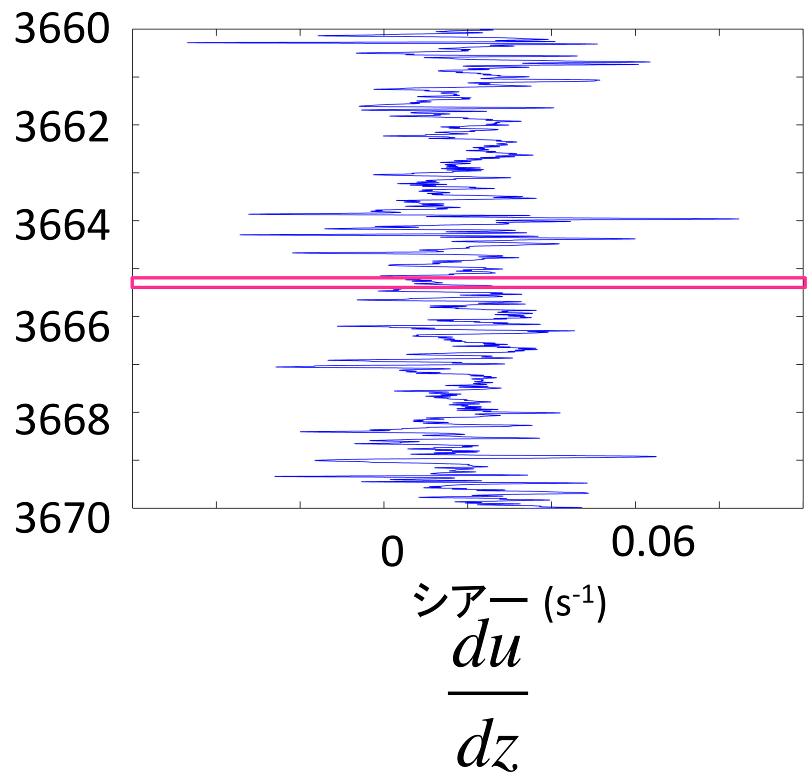




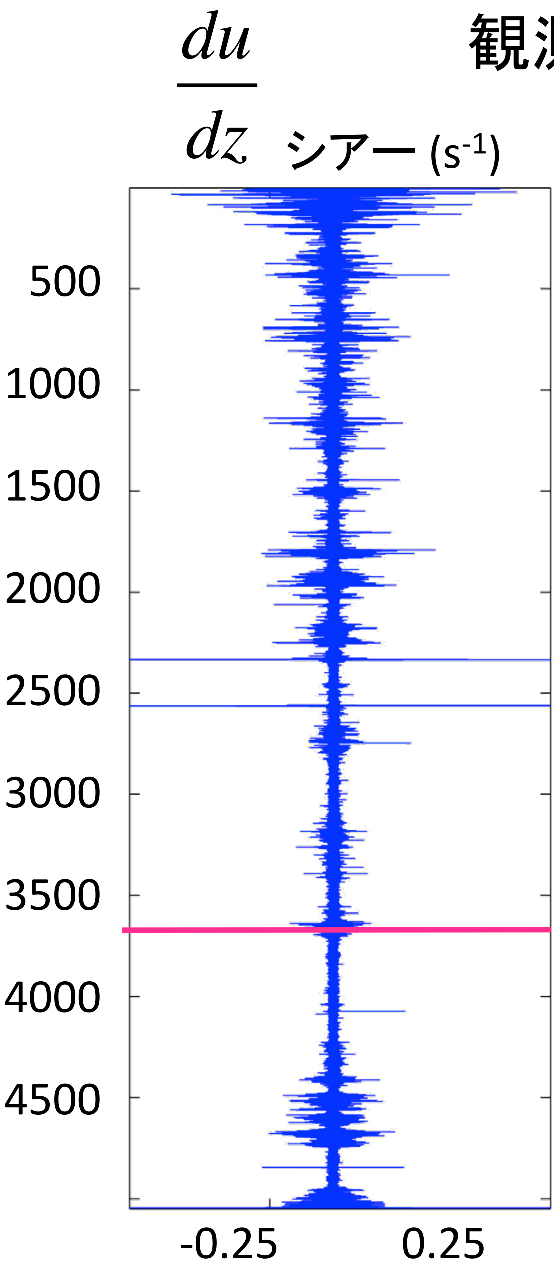
観測結果の一例 (St1-1 25.9N 144.9E)

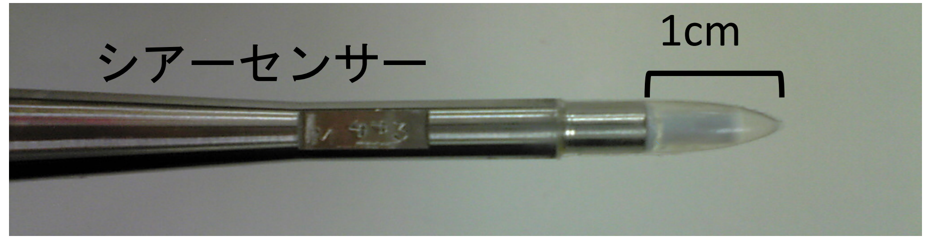


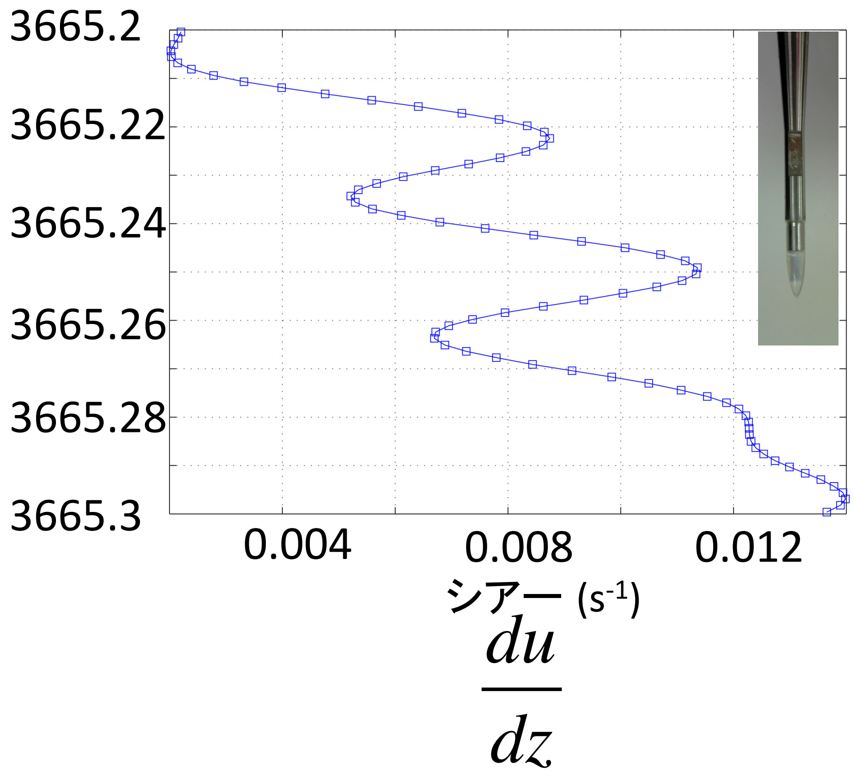


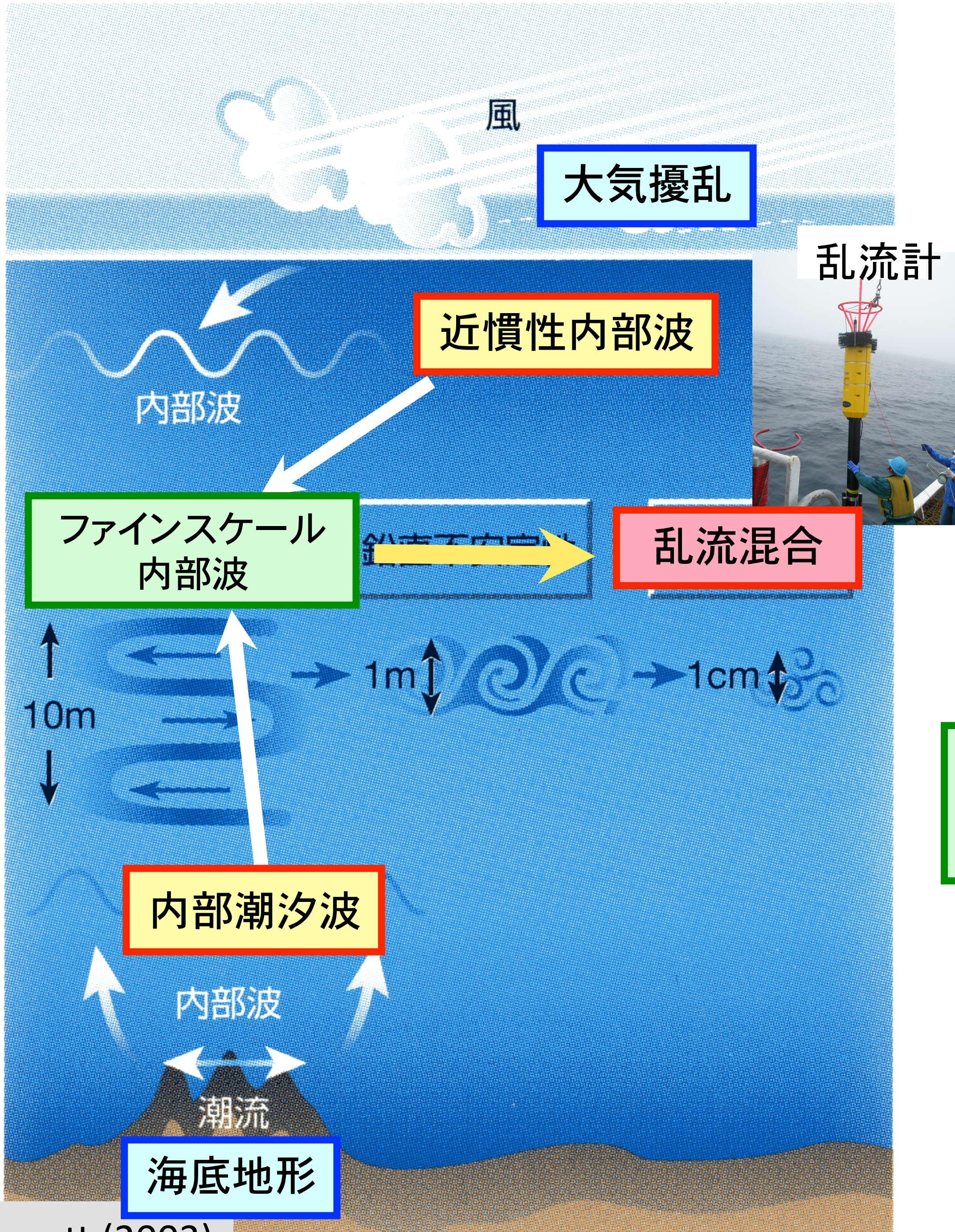


観測結果の一例 (St1-1 25.9N 144.9E)

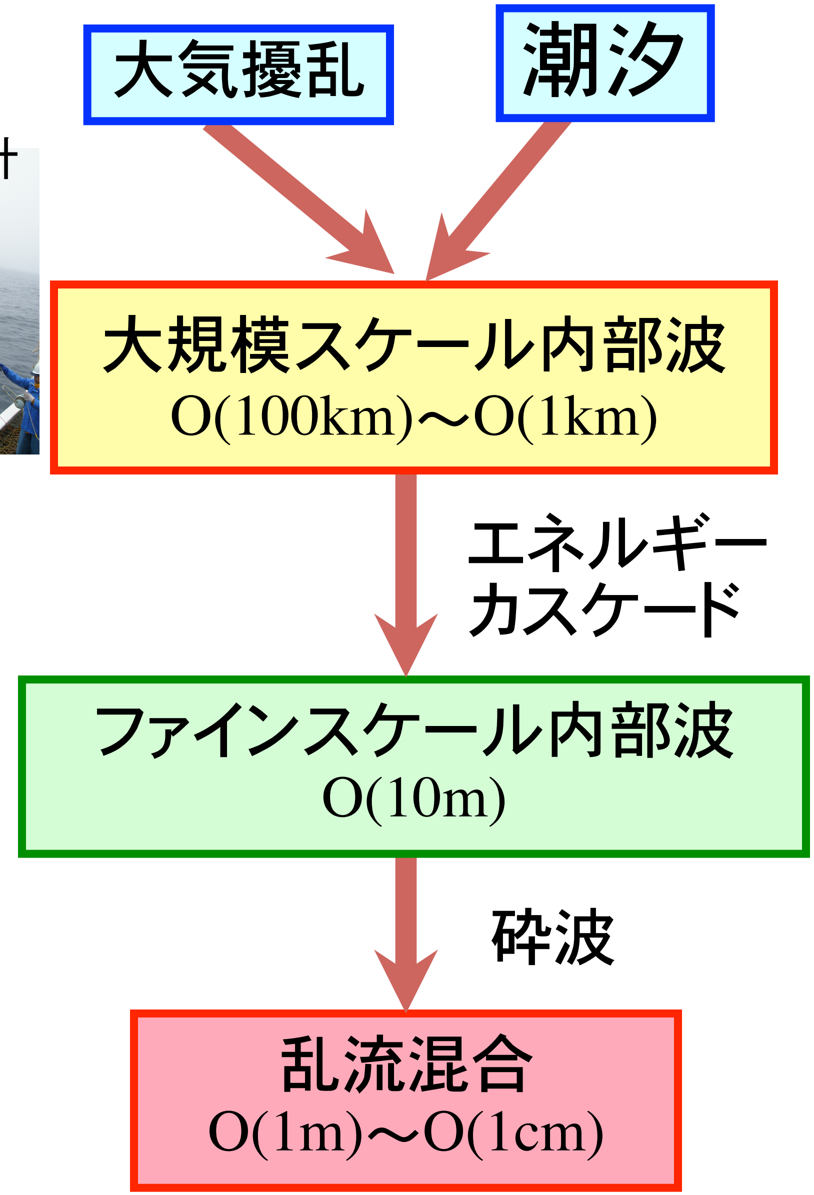


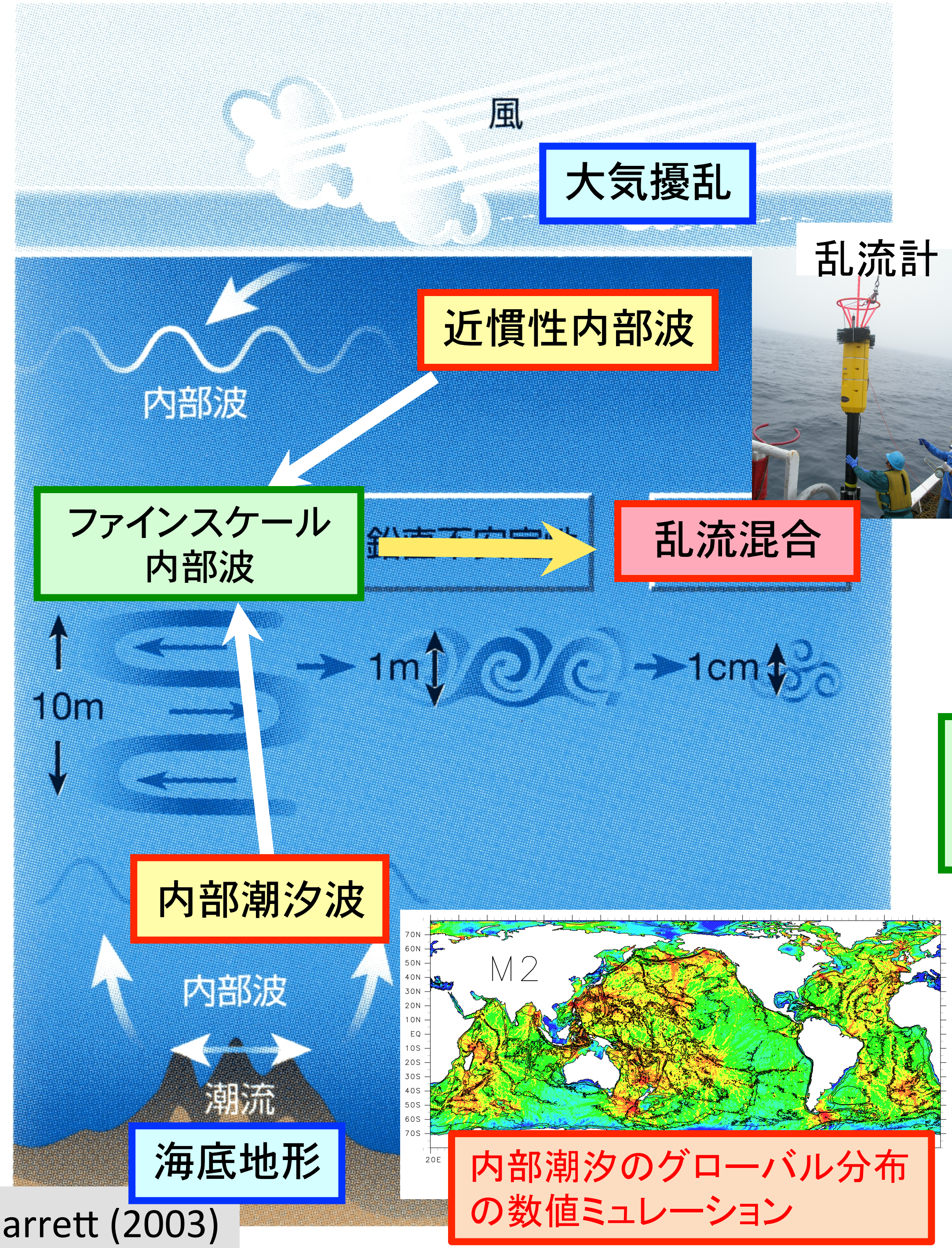






Garrett (2003)





Garrett (2003)

大気擾乱　潮汐

↓

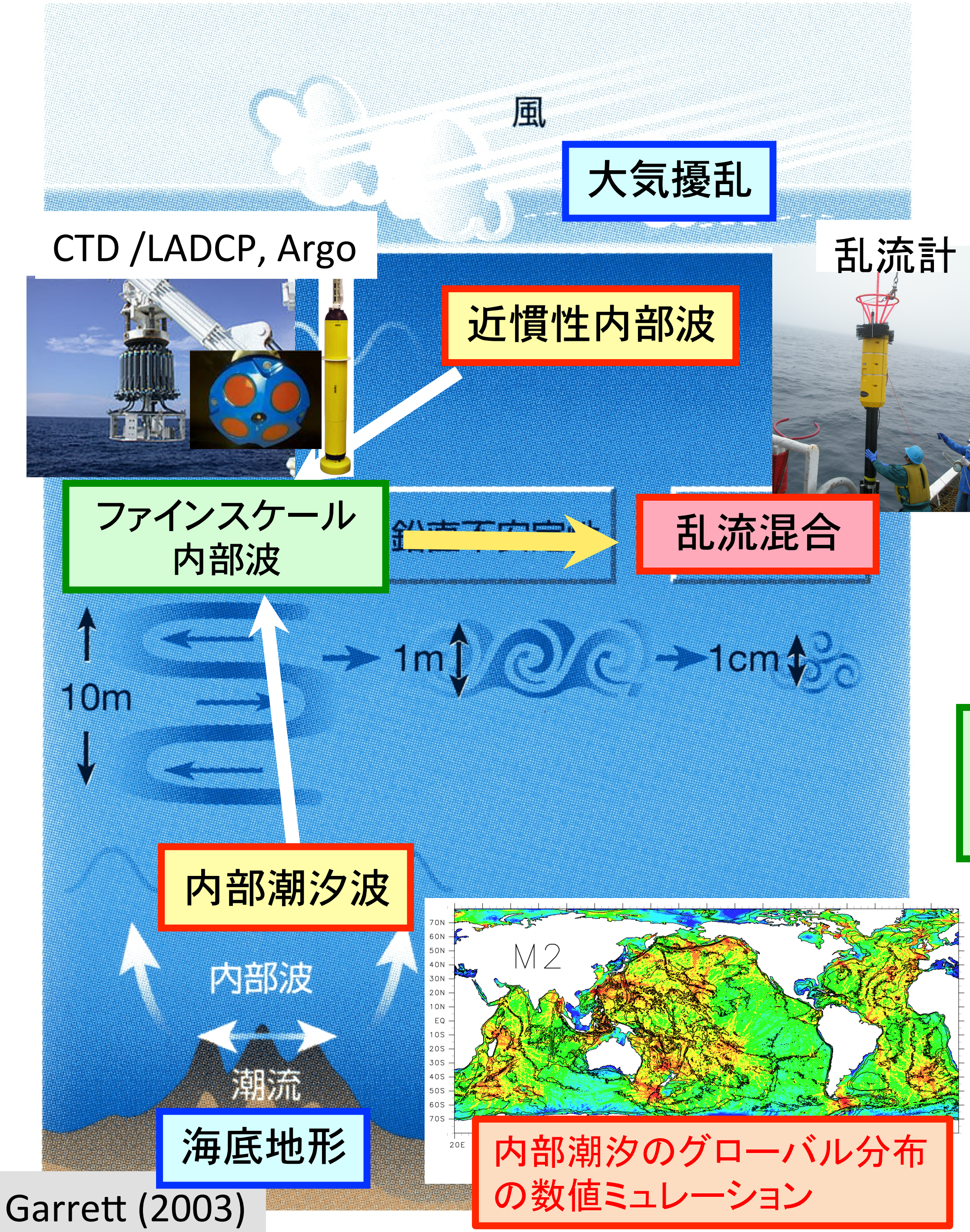
大規模スケール内部波
O(100km)～O(1km)

↓ エネルギー
カスケード

ファインスケール内部波
O(10m)

↓ 砕波

乱流混合
O(1m)～O(1cm)



大気擾乱　潮汐

↓

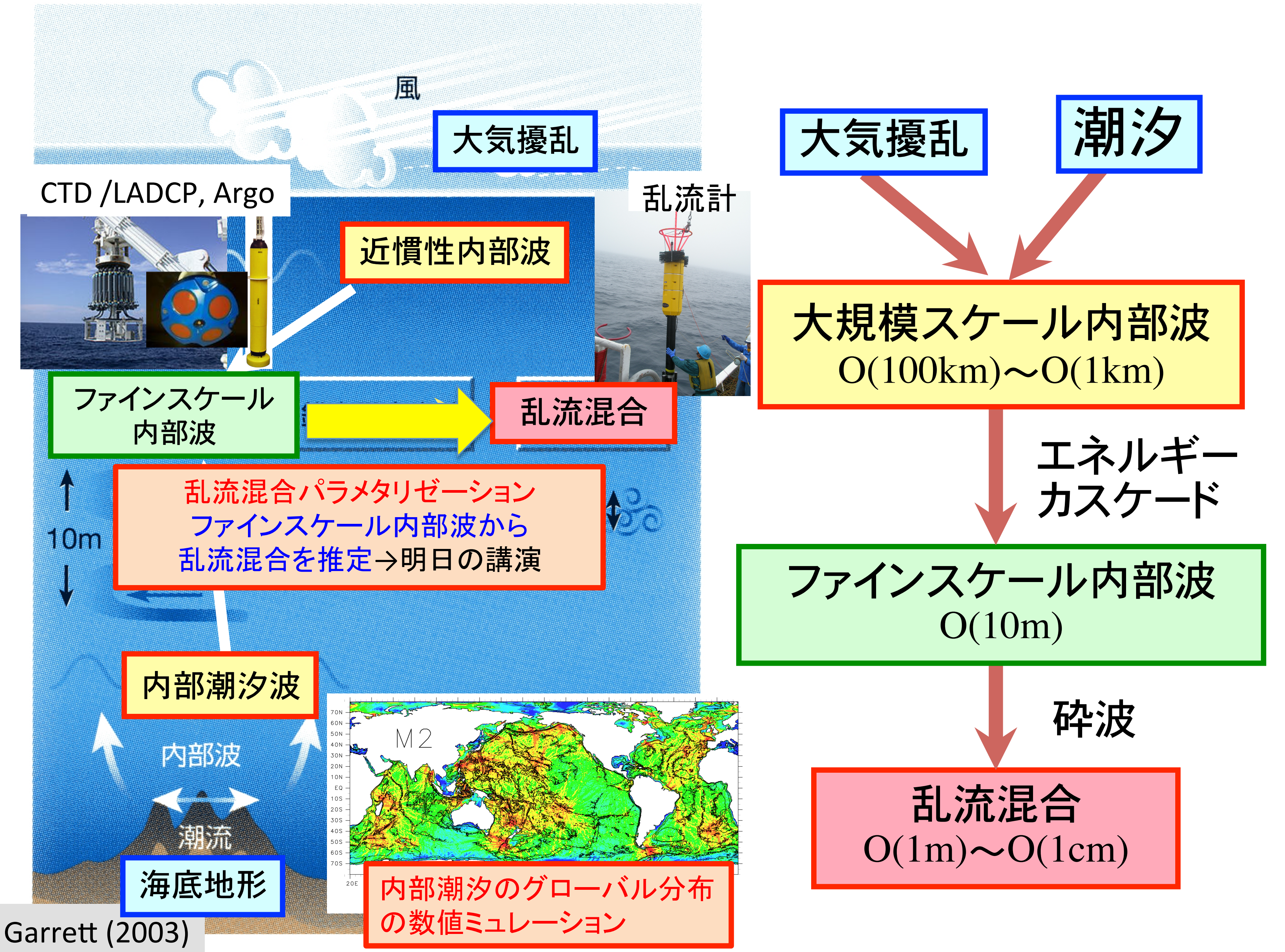
大規模スケール内部波
O(100km)～O(1km)

↓ エネルギーカスケード

ファインスケール内部波
O(10m)

↓ 砕波

乱流混合
O(1m)～O(1cm)


風
大気擾乱
CTD /LADCP, Argo
乱流計
近慣性内部波
ファインスケール
内部波
乱流混合
乱流混合パラメタリゼーション
ファインスケール内部波から
乱流混合を推定→明日の講演
10m
内部潮汐波
内部波
潮流
海底地形
M2
内部潮汐のグローバル分布
の数値ミュレーション
Garrett (2003)
大気擾乱
潮汐
大規模スケール内部波
O(100km)～O(1km)
エネルギー
カスケード
ファインスケール内部波
O(10m)
砕波
乱流混合
O(1m)～O(1cm)

3. 内部波の物理-2層流体モデル-

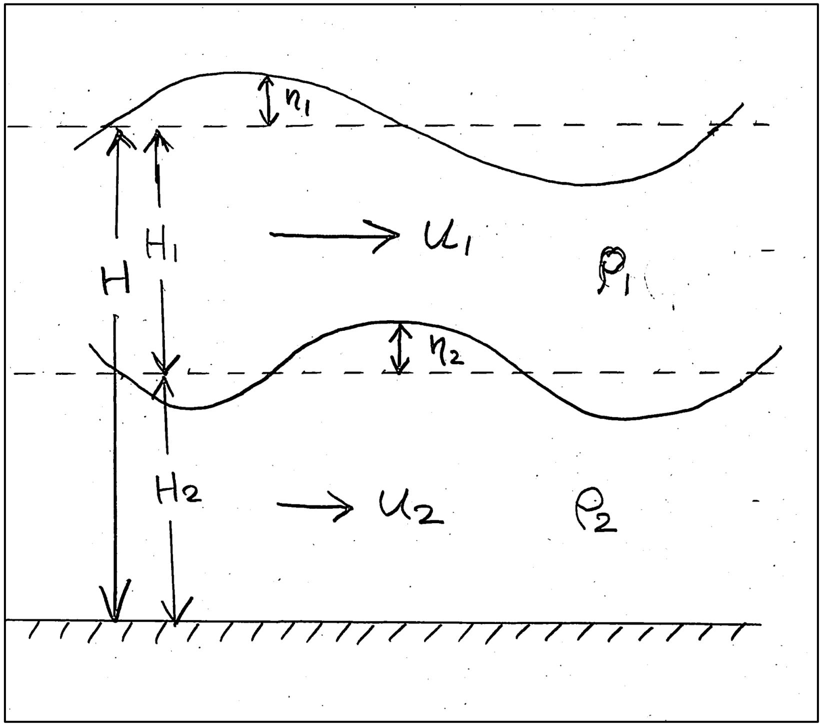
1.1 非回転系における内部波-2層流体モデル-

基礎方程式(x-z平面, y方向は無視)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$



・線形化＋静水圧近似

仮定1：流速Uが波の伝播速度Cに比べ十分に小さい（U<<C）。
→非線形項が無視できる（線形化）。

$$\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial t}} \approx \frac{U\dfrac{U}{L}}{\dfrac{U}{T}} = \frac{U}{L/T} \approx \frac{U}{C} \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \gg u\frac{\partial u}{\partial x}$$

(伝播速度)

仮定2：水平波長Lが水深Hに比べ十分に大きい
(H<<L)。→静水圧近似ができる。

(静水圧近似）

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0$$

第1式より $\rho\dfrac{U}{T} \approx \dfrac{P}{L} \to P \approx \dfrac{\rho LU}{T}$

第3式より $\dfrac{U}{L} = \dfrac{W}{H}$

第2式の第1項と第3項の比

$$\frac{\rho\dfrac{\partial w}{\partial t}}{\dfrac{\partial P}{\partial z}} \approx \frac{\dfrac{\rho W}{T}}{\dfrac{P}{H}} \approx \frac{\dfrac{\rho HU}{LT}}{\dfrac{\rho LU}{TH}} = \frac{H^2}{L^2} \ll 1 \Rightarrow \rho\frac{\partial w}{\partial t} \ll \frac{\partial P}{\partial z}$$

２層流体モデル方程式←非回転系、線形・静水圧近似

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - g'\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + g'\frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + H_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + H_2\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

Reduced gravity

$$g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g \simeq 10^{-3} g$$

④'、⑤'、⑥'式より u_1, u_2, η_2をη_1で表すと、

$$u_1 = \frac{g}{c}\eta_1, \quad u_2 = \frac{g}{c}\left(1-\frac{g'H_1}{c^2}\right)\eta_1, \quad \eta_2 = \left(1-\frac{gH_1}{c^2}\right)\eta_1$$

バロトロピックモード（外部モード、順圧モード）

$$c = \pm\sqrt{gH}\left(1+O(\delta)\right)$$

$$\eta_2 = \frac{H_2}{H}\eta_1\left(1+O(\delta)\right)$$

$$u_1 = \pm\sqrt{\frac{g}{H}}\eta_1\left(1+O(\delta)\right)$$

$$u_2 = \pm\sqrt{\frac{g}{H}}\eta_1\left(1+O(\delta)\right)$$

バロクリニックモード（内部モード、傾圧モード）

$$c = \pm\sqrt{g'\frac{H_1H_2}{H}}\left(1+O(\delta)\right)$$

$$\eta_2 = -\frac{gH}{g'H_2}\eta_1\left(1+O(\delta)\right)$$

$$u_1 = \mp\sqrt{\frac{g'H_2}{H_1H_2}}\underline{\eta_2}\left(1+O(\delta)\right)$$

$$u_2 = \pm\sqrt{\frac{g'H_1}{H_1H_2}}\underline{\eta_2}\left(1+O(\delta)\right)$$

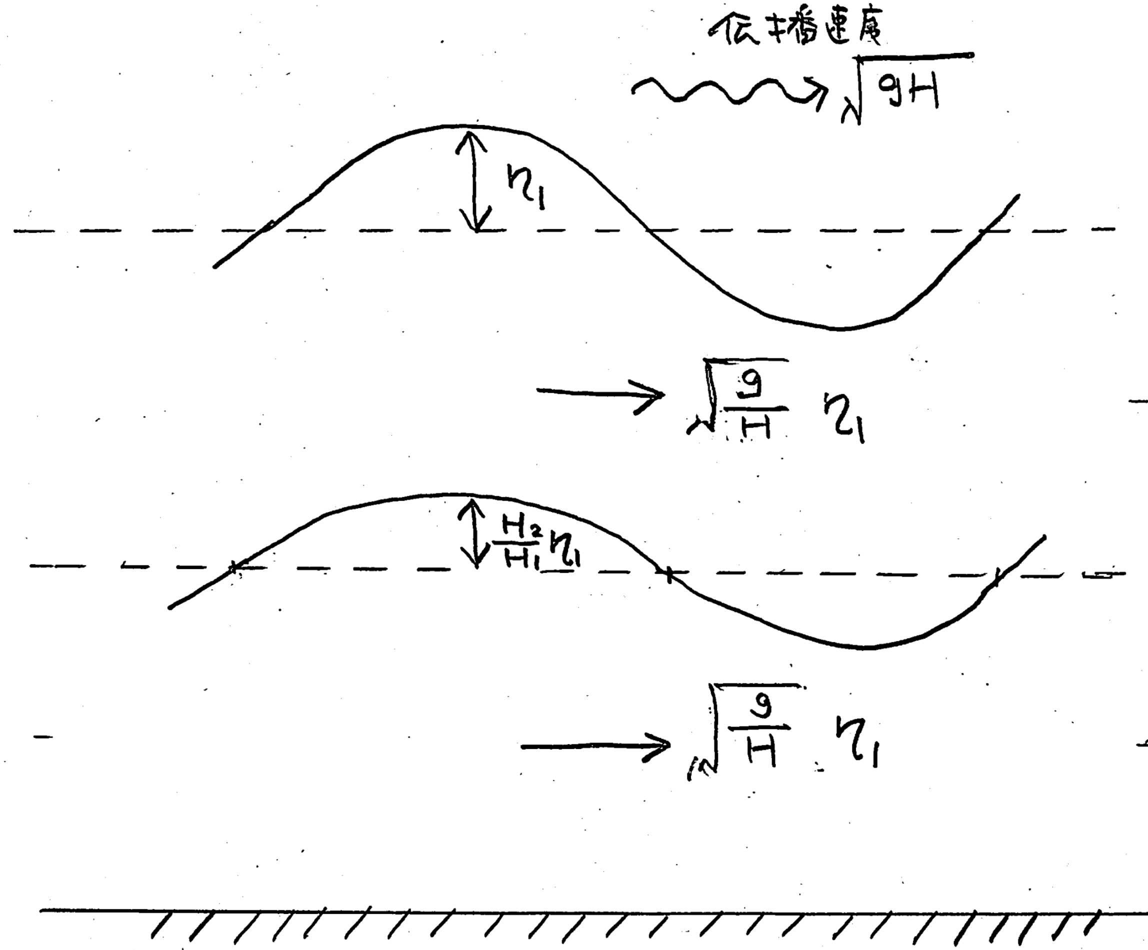
バロトロピックモード（外部モード、順圧モード）

伝播速度 $\boxed{C_0 = \pm\sqrt{g\left(H_1 + H_2\right)} \times \left(1 + O\left(\delta\right)\right)}$ $\delta \sim \dfrac{g'}{g} = \dfrac{\Delta\rho}{\rho_2} \sim 10^{-3}$ 海の場合
表層と深層の密度差

$$\eta_2 = \frac{H_2}{H}\eta_1\left(1 + O\left(\delta\right)\right)$$

$$u_1 = \pm\sqrt{\frac{g}{H}}\eta_1\left(1 + O\left(\delta\right)\right)$$

$$u_2 = \pm\sqrt{\frac{g}{H}}\eta_1\left(1 + O\left(\delta\right)\right)$$



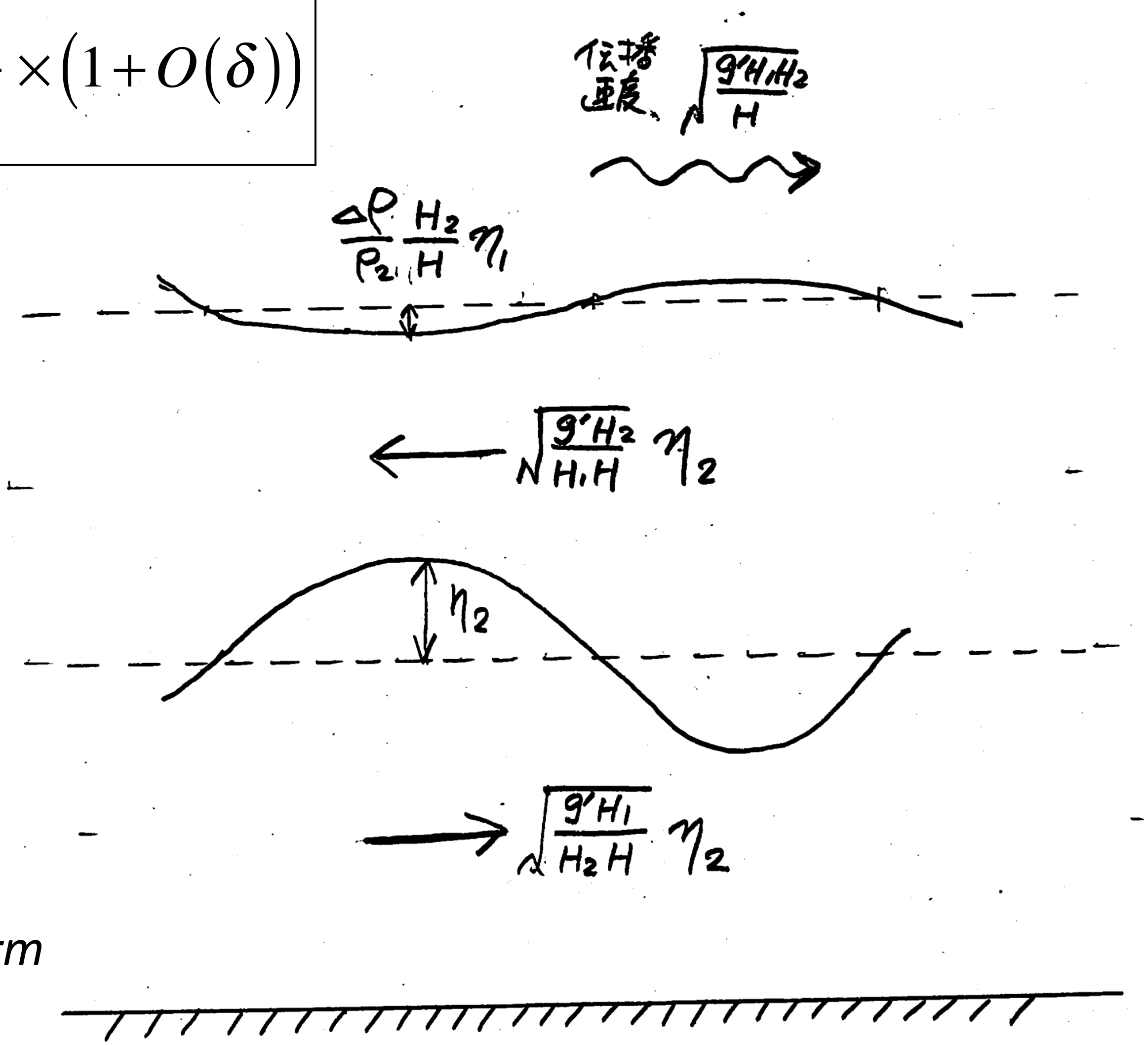
バロクリニックモード（内部モード、傾圧モード）

伝播速度 $$\boxed{C_1 = \pm\sqrt{g'\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}} \times \left(1 + O(\delta)\right)}$$

$$\eta_2 = -\frac{\rho_2 H}{\Delta\rho H_2}\eta_1\left(1+O(\delta)\right)$$

$$u_1 = \mp\sqrt{\frac{g' H_2}{H_1 H}}\eta_2\left(1+O(\delta)\right)$$

$$u_2 = \pm\sqrt{\frac{g' H_1}{H_2 H}}\eta_2\left(1+O(\delta)\right)$$



$$\frac{\eta_2}{\eta_1} \approx \frac{\rho}{\Delta\rho} \approx 10^3$$

海表面の変位η_1が数cm

→内部境界面の変位η_2が数十m

全流量 $$u_1 H_1 + u_2 H_2 = \sqrt{\frac{g' H_1 H_2}{H}}\eta_2 \times O(\delta) \approx 0$$

バロクリニックモードの全流量は殆どゼロ＝非発散

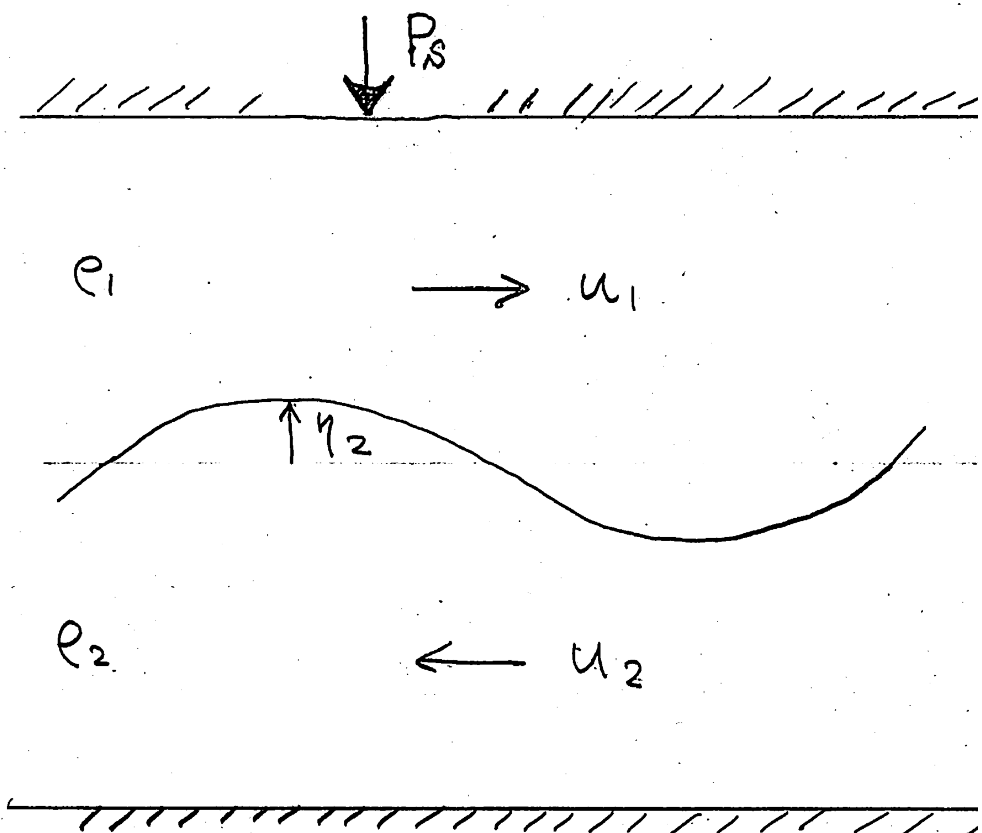
バロクリニックモードを記述する式

・近似1: **<u>Rigid-lid（鍋ブタ）近似</u>**　←バロクリモード $\eta_1/\eta_2 \sim \Delta\rho/\rho \sim 10^{-3}$

⇒海表面にフタをする（η_1=0）。フタの下の圧力Psを導入。

・近似2: **<u>ブジネスク近似</u>** ← 慣性項（加速度項）の密度差(ρ_1=ρ_2)を無視。

浮力項(g'の項）のみに密度差($\Delta\rho \neq 0$)を考慮する。



Rigid-Lid近似＋ブジネスク近似

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial P_s}{\partial x} - g'\frac{\partial \eta_2}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + H_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + H_2\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

バロクリニックモード変数

$$u_{BC} = u_2 - u_1$$

$$\eta_{BC} = \eta_2$$

バロクリニックモード方程式

$$\frac{\partial u_{BC}}{\partial t} = -g'\frac{\partial \eta_{BC}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \eta_{BC}}{\partial t} + \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\frac{\partial u_{BC}}{\partial x} = 0$$

波動方程式

$$\frac{\partial^2 \eta_{BC}}{\partial t^2} = g'\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\frac{\partial^2 \eta_{BC}}{\partial x^2}$$

伝播速度 $C = \sqrt{g'\dfrac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}}$

1.4 回転流体の場合

コリオリ力が加わる

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + fv_1$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - fu_1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - g'\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + fv_2$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = -g\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - g'\frac{\partial \eta_2}{\partial y} - fu_2$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + H_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + H_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = 0$$

$$f = 2\Omega\sin\theta$$

コリオリパラメター
定数と仮定

バロトロピックモード方程式

$$\frac{\partial u_{BT}}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta_{BT}}{\partial x} + fv_{BT}$$

$$\frac{\partial v_{BT}}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta_{BT}}{\partial y} - fu_{BT}$$

$$\frac{\partial \eta_{BT}}{\partial t} + H_{BT}\left(\frac{\partial u_{BT}}{\partial x} + \frac{\partial v_{BT}}{\partial y}\right) = 0$$

$$(H_{BT} \equiv H_1 + H_2)$$

バロクリニックモード方程式

$$\frac{\partial u_{BC}}{\partial t} = -g'\frac{\partial \eta_{BC}}{\partial x} + fv_{BC}$$

$$\frac{\partial v_{BC}}{\partial t} = -g'\frac{\partial \eta_{BC}}{\partial y} - fu_{BC}$$

$$\frac{\partial \eta_{BC}}{\partial t} + H_{BC}\left(\frac{\partial u_{BC}}{\partial x} + \frac{\partial v_{BC}}{\partial y}\right) = 0$$

$$(H_{BC} \equiv \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2})$$

1.4　回転流体の場合分散関係

バロクリニックモード
波動解を仮定

$$u_{BC}=\tilde{u}_{BC}e^{i(kx+ly-\omega t)}$$
$$v_{BC}=\tilde{v}_{BC}e^{i(kx+ly-\omega t)}$$
$$\eta_{BC}=\tilde{\eta}_{BC}e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

バロクリニック方程式に代入

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & ig'k \\ f & -i\omega & ig'l \\ iH_{BC}k & iH_{BC}l & -i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}_{BC} \\ \tilde{v}_{BC} \\ \tilde{\eta}_{BC} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列式＝0

バロクリニックモード分散関係式

$$\boxed{\omega^2=f^2+g'\frac{H_1H_2}{H_1+H_2}\left(k^2+l^2\right)}$$

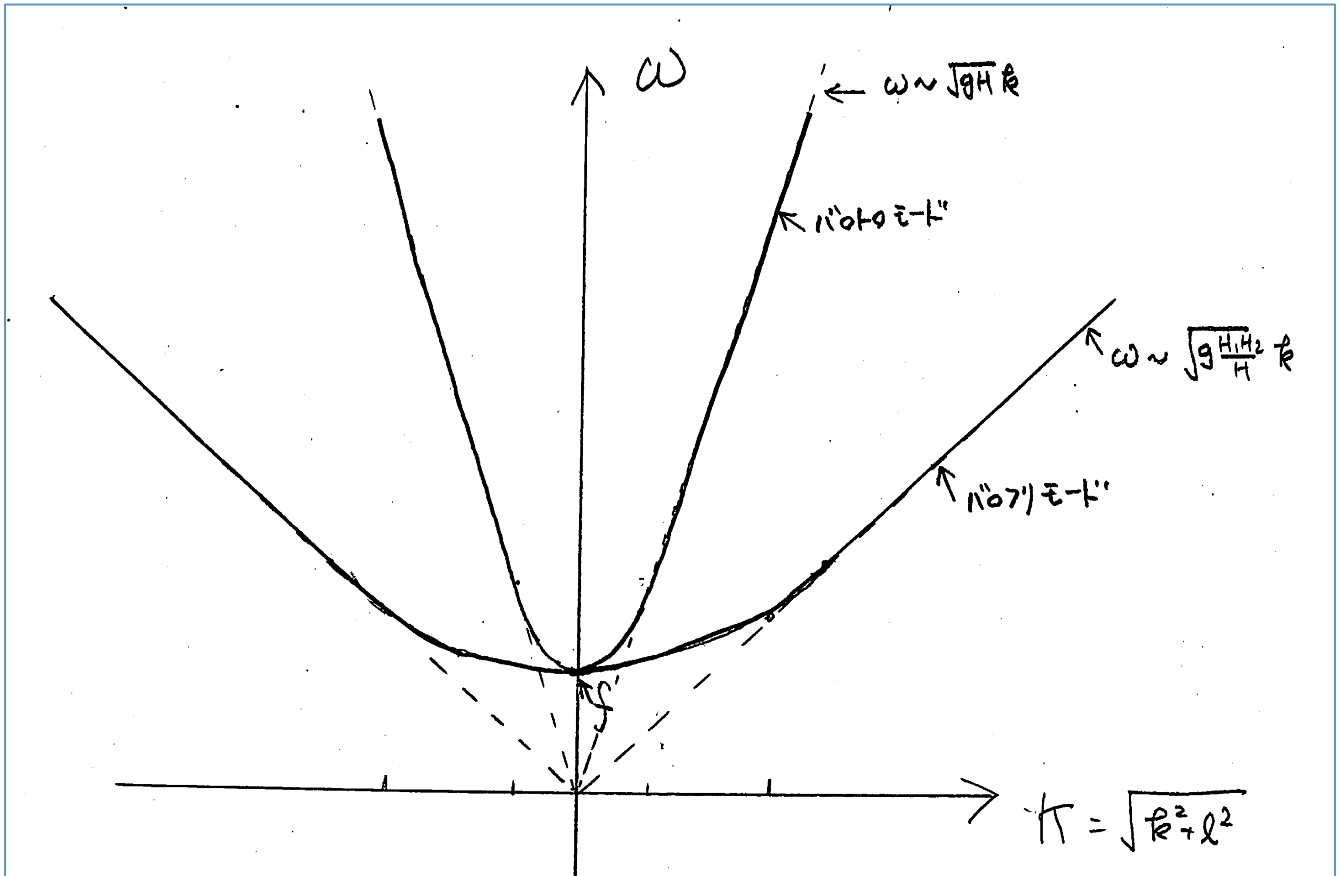
バロトロピックモード分散関係式

$$\boxed{\omega^2=f^2+g\left(H_1+H_2\right)\left(k^2+l^2\right)}$$

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}} \to \infty \Rightarrow \omega \to f \left(\text{慣性周波数＝最小周波数} \right)$$

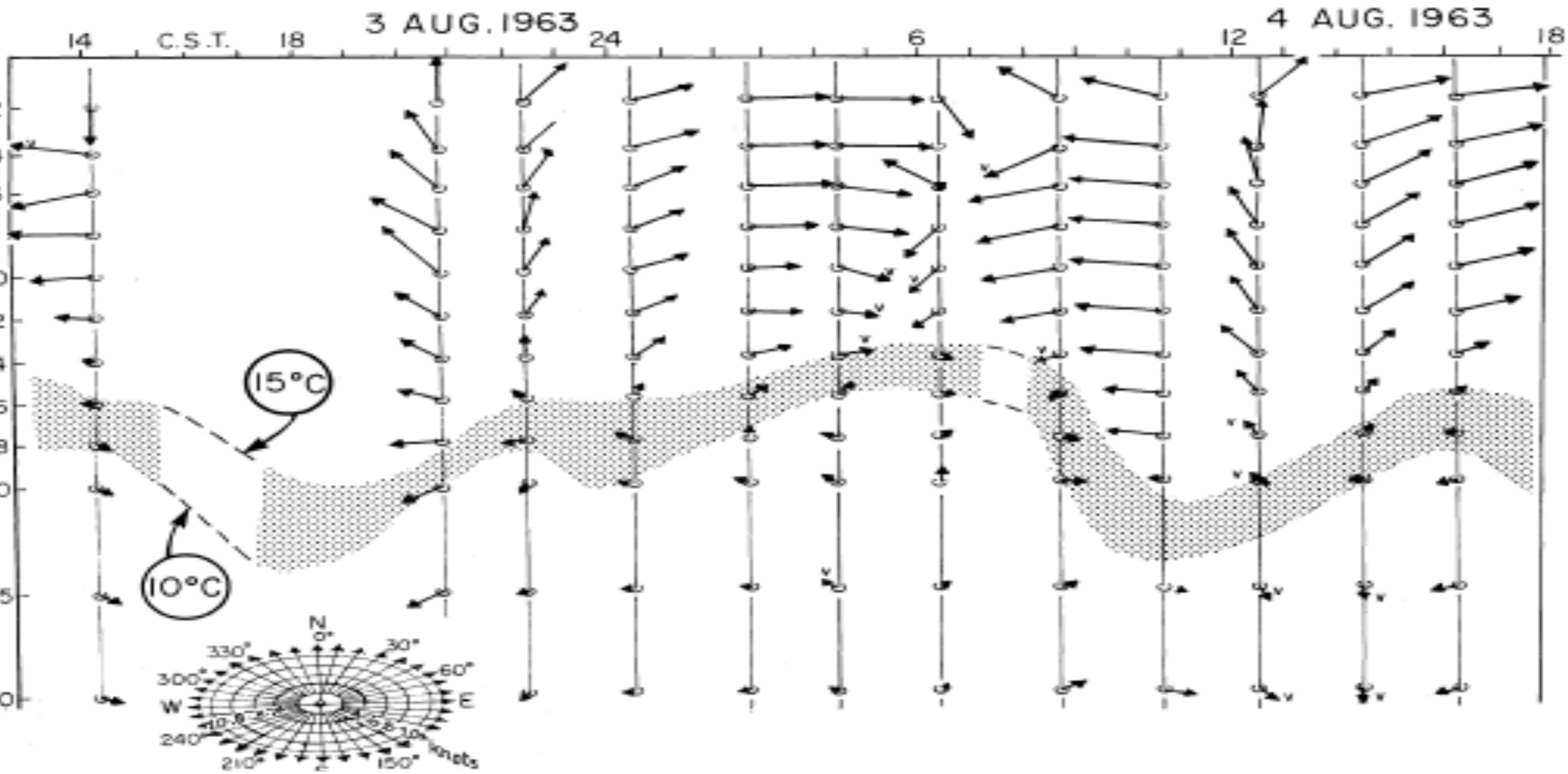
$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}} \ll \frac{\sqrt{g(H_1 + H_2)}}{f} \left(\begin{array}{c}\text{バロトロピックモード}\\ \text{ロスビー変形半径}\end{array} O(1000)km \right) \Rightarrow \omega^2 = g(H_1 + H_2)\kappa^2$$

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}} \ll \frac{\sqrt{g' \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}}}{f} \left(\begin{array}{c}\text{バロクリニックモード}\\ \text{ロスビー変形半径}\end{array} O(100)km \right) \Rightarrow \omega^2 = g' \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \kappa^2$$



2層内部波の観測（ミシガン湖）

Mortimer (1971)



コリオリ力の影響で流速ベクトルが時計回り（北半球）に回転

＊海洋内部波の記述方法

1. 鉛直モードの方法

二層流体→連続成層に拡張
海底と海面の境界を考慮
鉛直構造を保ちつつ水平方向に伝播
鉛直波長の大きな内部波に適用

2. 単色波の方法

上下境界を考慮せず
鉛直斜め方向に伝播
鉛直波長の小さな内部波に適用

2. 連続成層流体中の内部波：鉛直モード

2.1 基礎方程式

ρ_* 基準密度（一定値）←ブジネスク近似

$$\rho_*\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho_* fv$$

$$\rho_*\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho_* fu$$

$$\rho_*\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}=0$$

流体粒子に乗って密度は一定(時間変化)せず。
ただし流体粒子間で密度は異なる。

基本静止状態

$$(u,v,w)=(0,0,0)$$

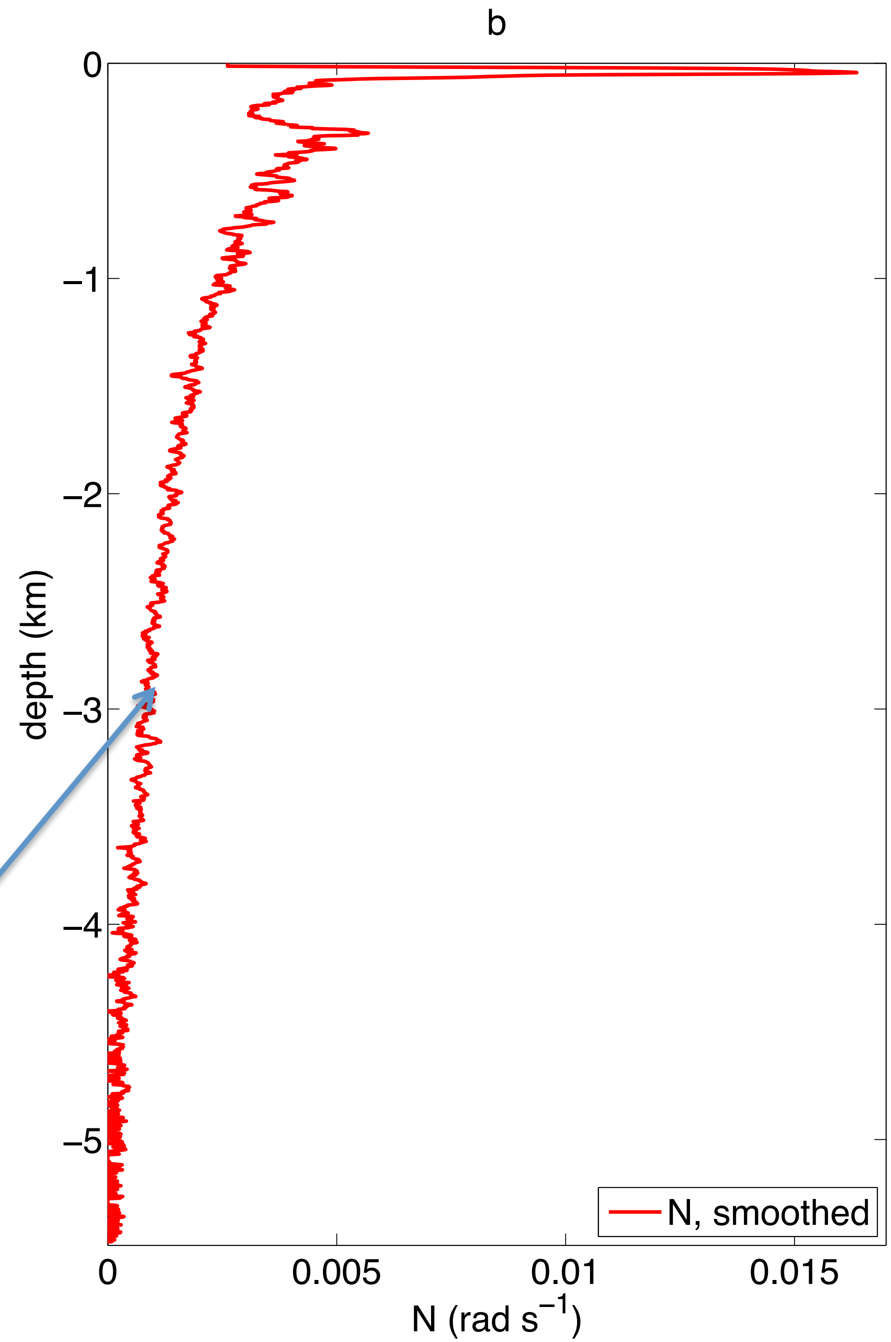
基本密度成層 $\rho_0(z)$

基本圧力場(静水圧平衡)

$$\frac{\partial p_0(z)}{\partial z}=-\rho_0(z)g$$

浮力周波数

$$\boxed{N(z)=\sqrt{-\frac{g}{\rho_*}\frac{d\rho_0(z)}{dz}}}$$



Gerkema and Zimmerman (2008)

・基本静止状態からのズレ： $\rho = \rho' + \rho_0(z),\ p = p' + p_0(z)$

$$\rho_*\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \rho_* f v$$

$$\rho_*\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \rho_* f u$$

$$\rho_*\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u\frac{\partial \rho'}{\partial x} + v\frac{\partial \rho'}{\partial y} + w\frac{\partial \rho'}{\partial z} = \frac{\rho_* N^2(z)}{g} w$$

$\boxed{\text{線形近似}}$ $\boxed{w = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}}$ η ＝鉛直変位を導入

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial x} + fv \\
&\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial y} - fu \\
&\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial z} - N^2(z)\eta \\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z \partial t} = 0 \\
&\rho' = \frac{\rho_* N^2(z)}{g}\eta
\end{aligned}
}
$$

p' が存在しない仮想的条件下では

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -N^2 \eta \longrightarrow$$

浮力周波数
で上下に振動

さらに静水圧近似（水平波長＞＞水深）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial x}+fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial y}-fu$$

$$0=-\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial z}-N^2\left(z\right)\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial z\partial t}=0$$

※同じ鉛直(z)依存性を持つ変数

$$u,v,p'$$

※同じ水平・時間(x,y,t)依存性を持つ変数

$$p',\eta$$

2.2 鉛直モード解

鉛直(z)依存性、水平時間(x,y,t)依存性の考察から解が次のような変数分離形で表せる。

$$u=\tilde{u}(x,y,t)P(z)$$
$$v=\tilde{v}(x,y,t)P(z)$$
$$p'=\alpha\tilde{\eta}(x,y,t)P(z)$$
$$\eta'=\tilde{\eta}(x,y,t)W(z)$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=-\frac{\alpha}{\rho_*}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x}+f\tilde{v}$$
$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}=-\frac{\alpha}{\rho_*}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial y}-f\tilde{u}$$

$\boxed{\alpha=\rho_* g}$ と選ぶと一層の方程式と同じ形になる

基礎方程式(第1,2,3式)に代入

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=-g\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x}+f\tilde{v}$$
$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}=-g\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial y}-f\tilde{u}$$
$$\frac{dP(z)}{dz}+\frac{N^2}{g}W(z)=0$$

基礎方程式(第4式)・連続の式に代入

$$\left(\frac{\partial\tilde{u}(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}(x,y,t)}{\partial y}\right)P(z)+\frac{\partial\tilde{\eta}(x,y,t)}{\partial t}\frac{dW(z)}{dz}=0$$

$$\Rightarrow\quad\frac{-\dfrac{\partial\tilde{\eta}(x,y,t)}{\partial t}}{\left(\dfrac{\partial\tilde{u}(x,y,t)}{\partial x}+\dfrac{\partial\tilde{v}(x,y,t)}{\partial y}\right)}=\frac{P(z)}{\dfrac{dW(z)}{dz}}=h$$ 分離定数

$$\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}+h\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)=0$$
$$P(z)=h\frac{dW(z)}{dz}$$

内部波の水平伝播を決める方程式

$$\frac{\partial \tilde{u}(x,y,t)}{\partial t} = -g\frac{\partial \tilde{\eta}(x,y,t)}{\partial x} + f\tilde{v}(x,y,t)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}(x,y,t)}{\partial t} = -g\frac{\partial \tilde{\eta}(x,y,t)}{\partial y} - f\tilde{u}(x,y,t)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}(x,y,t)}{\partial t} + h\left(\frac{\partial \tilde{u}(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}(x,y,t)}{\partial y}\right) = 0$$

水深hの一層流の
運動方程式と同じ形

h: 等価水深
(Equivalent Depth)

分散関係式

$$\boxed{\omega^2 = f^2 + gh\left(k^2 + l^2\right)}$$

内部波の鉛直構造（鉛直モード）を決める方程式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP(z)}{dz} + \frac{N^2(z)}{g}W(z) = 0 \\ &P(z) = h\frac{dW(z)}{dz} \end{aligned}\right\} \frac{d^2W(z)}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{gh}W(z) = 0$$

2.3 鉛直モードと等価水深の決定

鉛直モード方程式

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2}+\frac{N^2(z)}{gh}W(z)=0$$

境界条件：Rigid-Lid近似

海面 $W(0)=0$

海底 $W(-H)=0$

等価水深がある決まった値を持つ場合のみ

$$h=h_1,h_2,h_3,\cdots h_n \quad (h_1>h_2>h_3\cdots)$$

海底と海面の二つの境界条件を同時に
満たす鉛直モード解が存在する。

鉛直モードの例

$$N(z) = N_0 \text{（一定値）}$$

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2} = -\frac{N_0^2}{gh}W(z) \quad \Rightarrow$$

一般解

$$W(z) = A\sin\left(\frac{N_0}{\sqrt{gh}}z\right) + B\cos\left(\frac{N_0}{\sqrt{gh}}z\right)$$

境界条件1　$W(0) = 0 \to W(z) = A\sin\left(\frac{N_0}{\sqrt{gh}}z\right)$

境界条件2　$W(-H) = 0 \to A\sin(\frac{N_0}{\sqrt{gh}}H) = 0 \to \frac{N_0 H}{\sqrt{gh}} = n\pi$

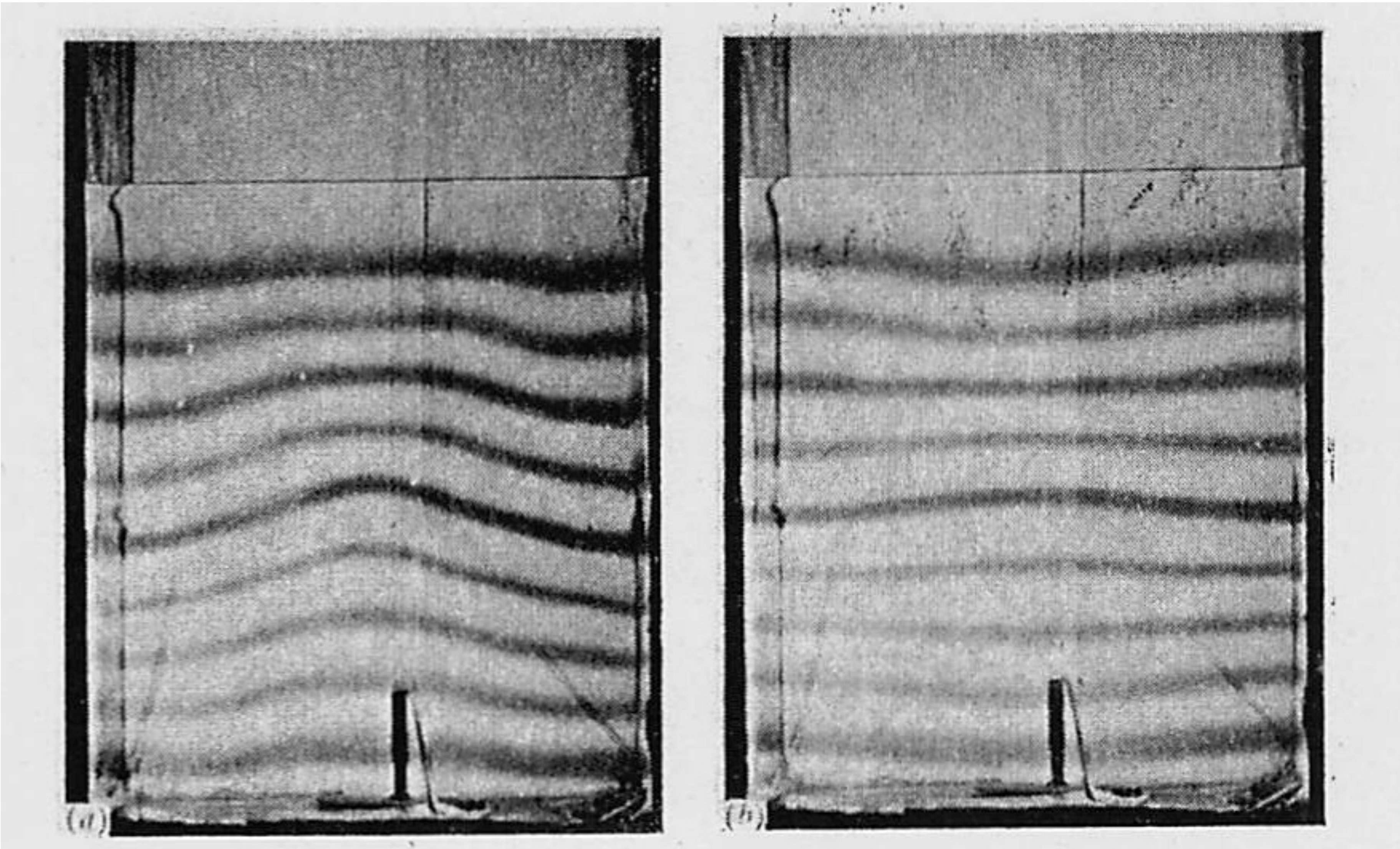
$$h_n = \frac{N_0^2 H^2}{g\pi^2}\frac{1}{n^2}$$

$$c_n = \sqrt{gh_n} = N_0\frac{H}{n\pi}$$

$$W_n(z) = \sin(\frac{n\pi}{H}z)$$

$$P_n(z) = h_n\frac{dW_n}{dz} = \frac{N_0^2 H}{g\pi n}\cos(\frac{n\pi}{H}z)$$

鉛直モード波の例



Thorpe (1968)

鉛直モードの例

$N(z)$ 現実の密度成層の場合 ⇒ 数値的に鉛直モード・等価水深（固有値）を求める

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2}+\frac{N^2(z)}{gh}W(z)=0 \xrightarrow{\text{離散化}} \frac{W(i+1)+W(i-1)-2W(i)}{\Delta z^2}+\frac{N^2(i)}{gh}W(i)=0$$

Shooting Method

hの値を非常に細かく変えて、各hに対して

$$\boxed{h^*, h^*+\delta h^*, h^*+2\delta h^*, \cdots}$$

海面

$$W_{h^*}(0)=0, W_{h^*}(1)=1 \Rightarrow W_{h^*}(i+1)=\left(2-\frac{N^2(i)\Delta z^2}{gh^*}\right)W_{h^*}(i)-W_{h^*}(i-1) \Rightarrow \boxed{W_{h^*}(iq)}$$

海底

の値を計算する

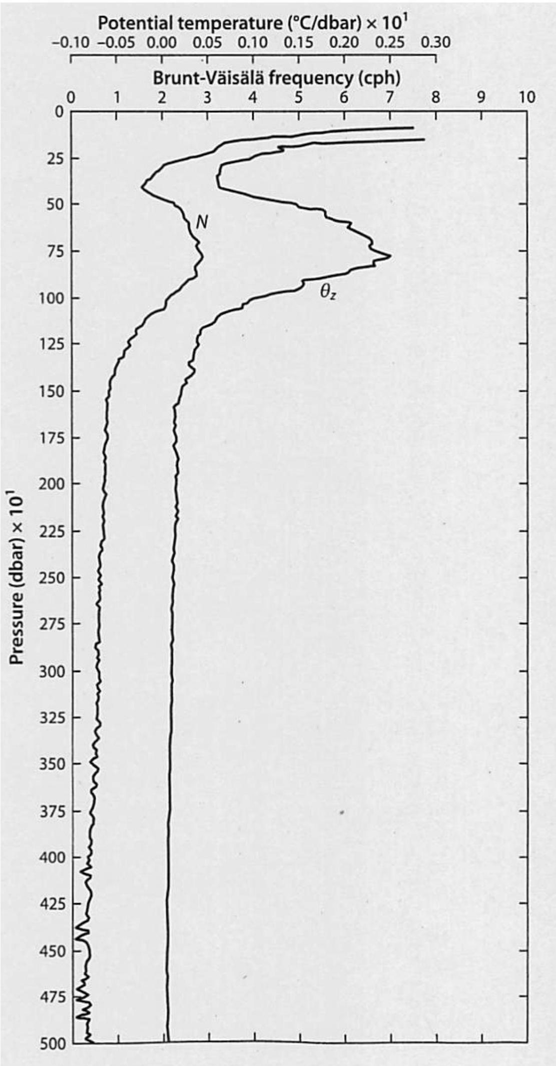
h*とh*+δh*で海底Wの負号が変化

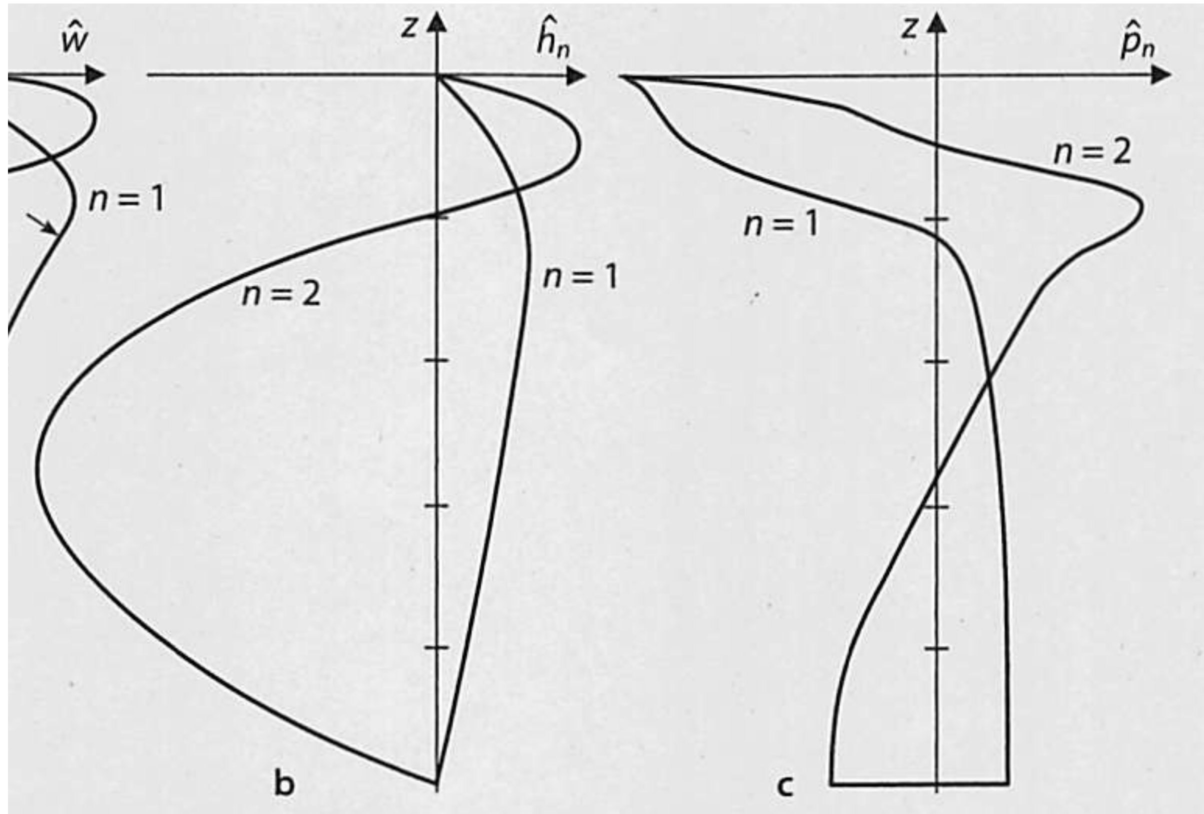
$$W_{h^*}(iq)>0,\ W_{h^*+\delta h^*}(iq)<0$$
$$or$$
$$W_{h^*}(iq)<0,\ W_{h^*+\delta h^*}(iq)>0$$

固有値h_nはh*とh*+δh*の間に存在

$$h^*<h_n<h^*+\delta h^*$$

現実の密度成層の鉛直モード





Gill (1982)

2.4鉛直モードの直交性

内部波場は鉛直モードの重ね合わせで表現できる

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n(x,y,t)P_n(z)$$

$$v(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{v}_n(x,y,t)P_n(z)$$

$$p'(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{p}'_n(x,y,t)P_n(z)$$

$$w(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n(x,y,t)W_n(z)$$

$$\rho'(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\rho}'_n(x,y,t)N^2(z)W_n(z)$$

異なるモードの鉛直モード関数は直交する

$$n \neq m \rightarrow \int_{-H}^{0} N^2(z) W_n(z) W_m(z)\, dz = 0$$

$$\int_{-H}^{0} P_n(z) P_m(z)\, dz = 0$$

証明

$$\int_{-H}^{0} W_m \times \left(\frac{d^2 W_n(z)}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{g h_n} W_n(z) \right) dz = 0$$

$$-\ \int_{-H}^{0} W_n \times \left(\frac{d^2 W_m(z)}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{g h_m} W_m(z) \right) dz = 0$$

⋮

直交性を利用して鉛直モード展開の係数を求める。

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n(x,y,t)P_n(z)$$

$$v(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{v}_n(x,y,t)P_n(z)$$

$$p'(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{p}'_n(x,y,t)P_n(z)$$

$$w(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_n(x,y,t)W_n(z)$$

$$\rho'(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\rho}'_n(x,y,t)N^2(z)W_n(z)$$

$$\tilde{u}_n(x,y,t)=\frac{\int_{-H}^{0}u(x,y,z,t)P_n(z)dz}{\int_{-H}^{0}P_n^2(z)dz}$$

$$\tilde{w}_n(x,y,t)=\frac{\int_{-H}^{0}w(x,y,z,t)N^2(z)W_n(z)dz}{\int_{-H}^{0}N^2(z)W_n^2(z)dz}$$

$$\tilde{\rho}'_n(x,y,t)=\frac{\int_{-H}^{0}\rho'(x,y,z,t)W_n(z)dz}{\int_{-H}^{0}N^2(z)W_n^2(z)dz}$$

2.5 非静水圧の場合

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial x} + fv
$$
$$
\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial y} - fu
$$
$$
\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial z} - N^2(z)\eta
$$
$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z \partial t} = 0
$$

周波数ωの依存性を仮定する

$$
u(x,y,z,t) = u(x,y,z)e^{-i\omega t}
$$
$$
v(x,y,z,t) = v(x,y,z)e^{-i\omega t}
$$
$$
p'(x,y,z,t) = p'(x,y,z)e^{-i\omega t}
$$
$$
\eta(x,y,z,t) = \eta(x,y,z)e^{-i\omega t}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial x} + fv
$$
$$
\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial y} - fu
$$
$$
0 = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial z} - \left(N^2(z) - \omega^2\right)\eta
$$
$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z \partial t} = 0
$$

$$
N^2 \Rightarrow N^2 - \omega^2
$$
に変わった以外は、
静水圧の基礎方程式と同じ

非静水圧の場合：鉛直モードを決める方程式

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2}+\frac{N^2(z)-\omega^2}{gh}W(z)=0 \Rightarrow$$

鉛直構造関数・等価水深が周波数に依存する

$$W_n(z)=W_n(z,\omega),\ h_n=h_n(\omega)$$

分散関係式

$$\omega^2=f^2+gh_n(\omega)\left(k^2+l^2\right)$$

$N(z)=N_0$（一定値）の場合

$$W_n(z,\omega)=\sin\frac{n\pi}{H}z$$

$$h_n(z,\omega)=\frac{\left(N_0^2-\omega^2\right)H^2}{g\pi^2}\frac{1}{n^2}$$

分散関係式

$$\omega^2=f^2+\frac{\left(N_0^2-\omega^2\right)H^2}{n^2\pi^2}\left(k^2+l^2\right)$$

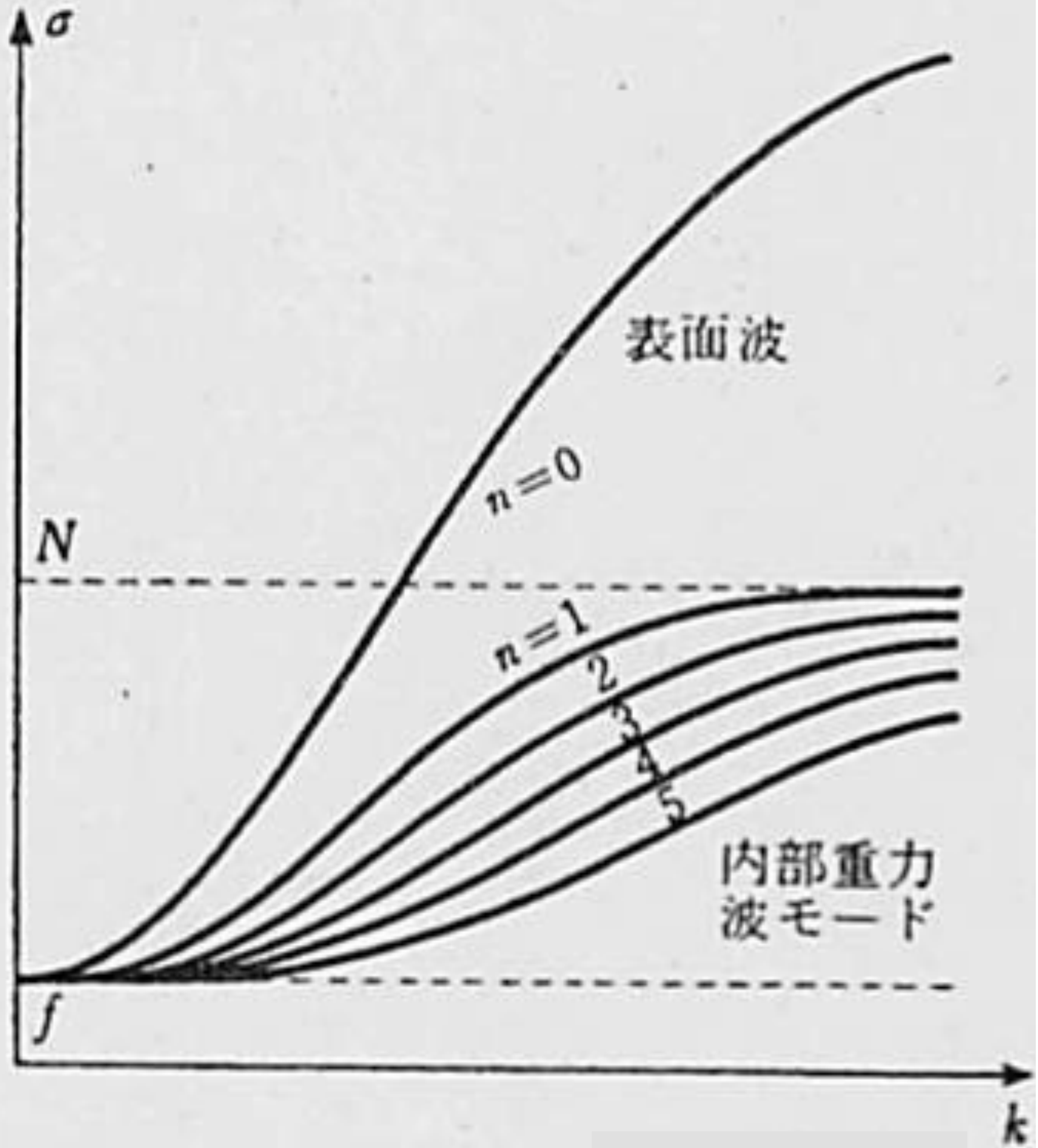
$$\rightarrow\omega^2=\frac{N_0^2\left(k^2+l^2\right)+f^2\dfrac{n^2\pi^2}{H^2}}{k^2+l^2+\dfrac{n^2\pi^2}{H^2}}$$

$$f<\omega<N_0$$

$$\sqrt{k^2+l^2}\rightarrow 0\quad \omega\rightarrow f$$

$$\sqrt{k^2+l^2}\rightarrow\infty\quad \omega\rightarrow N_0$$

5 非圧縮・一様水深の成層海洋中でのモード波の分散関係 [Eckart, 1960]



Eckart(1960)を加工

$$N(z) = N_0 e^{z/b}$$

$$W(z) = J_{\frac{\omega b}{\sqrt{gh}}}\left(\frac{N_0 b\,e^{z/b}}{\sqrt{gh}}\right) - \frac{J_{\frac{\omega b}{\sqrt{gh}}}\left(\frac{N_0 b\,e^{-H/b}}{\sqrt{gh}}\right)}{Y_{\frac{\omega b}{\sqrt{gh}}}\left(\frac{N_0 b\,e^{-H/b}}{\sqrt{gh}}\right)} Y_{\frac{\omega b}{\sqrt{gh}}}\left(\frac{N_0 b\,e^{z/b}}{\sqrt{gh}}\right)$$

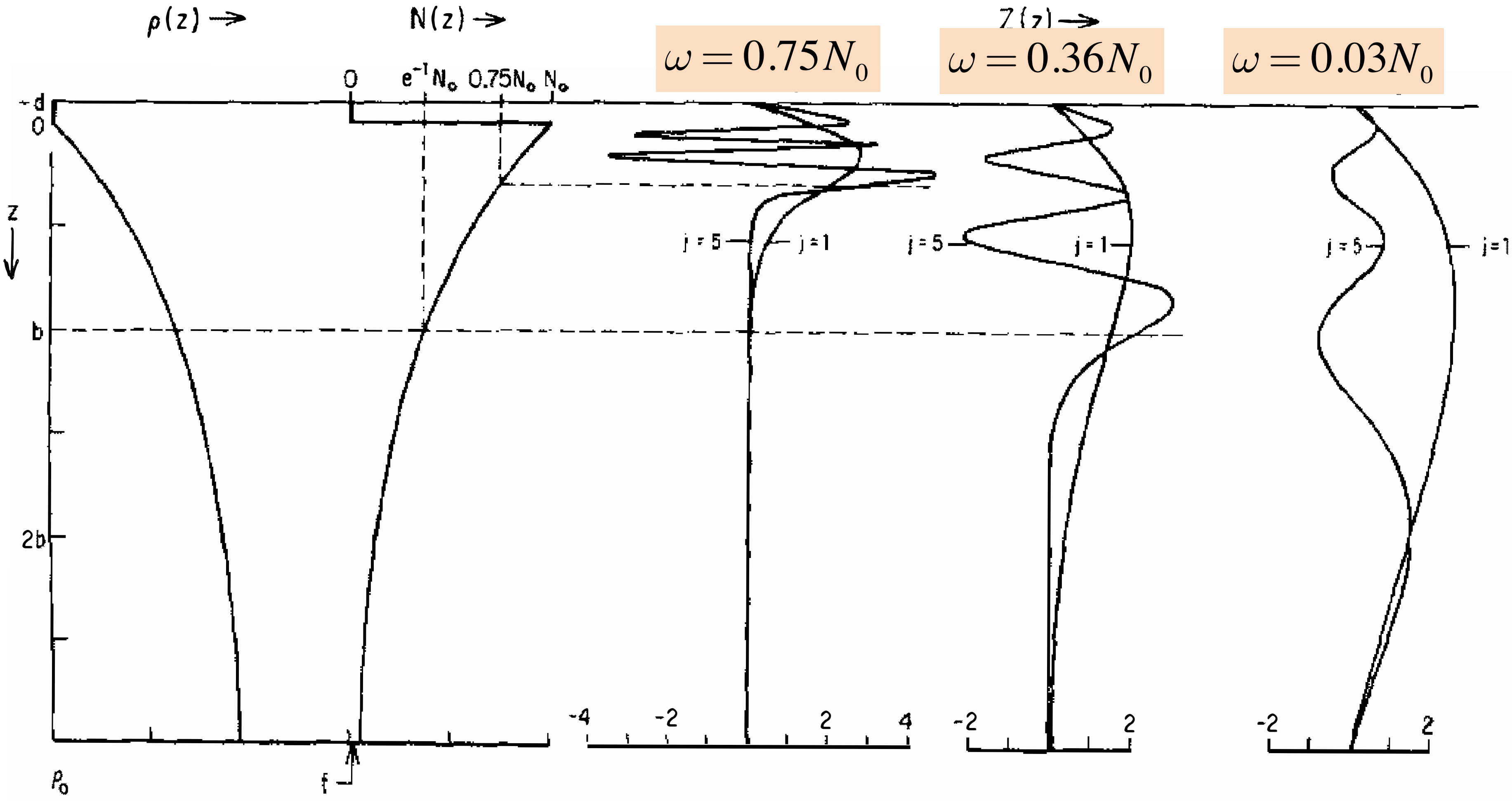


Figure 5 The wavefunctions for vertical displacement at three specified frequencies for modes 1 and 5 in a model ocean with density and Väisälä frequency as shown to the left (Garrett & Munk 1972a).

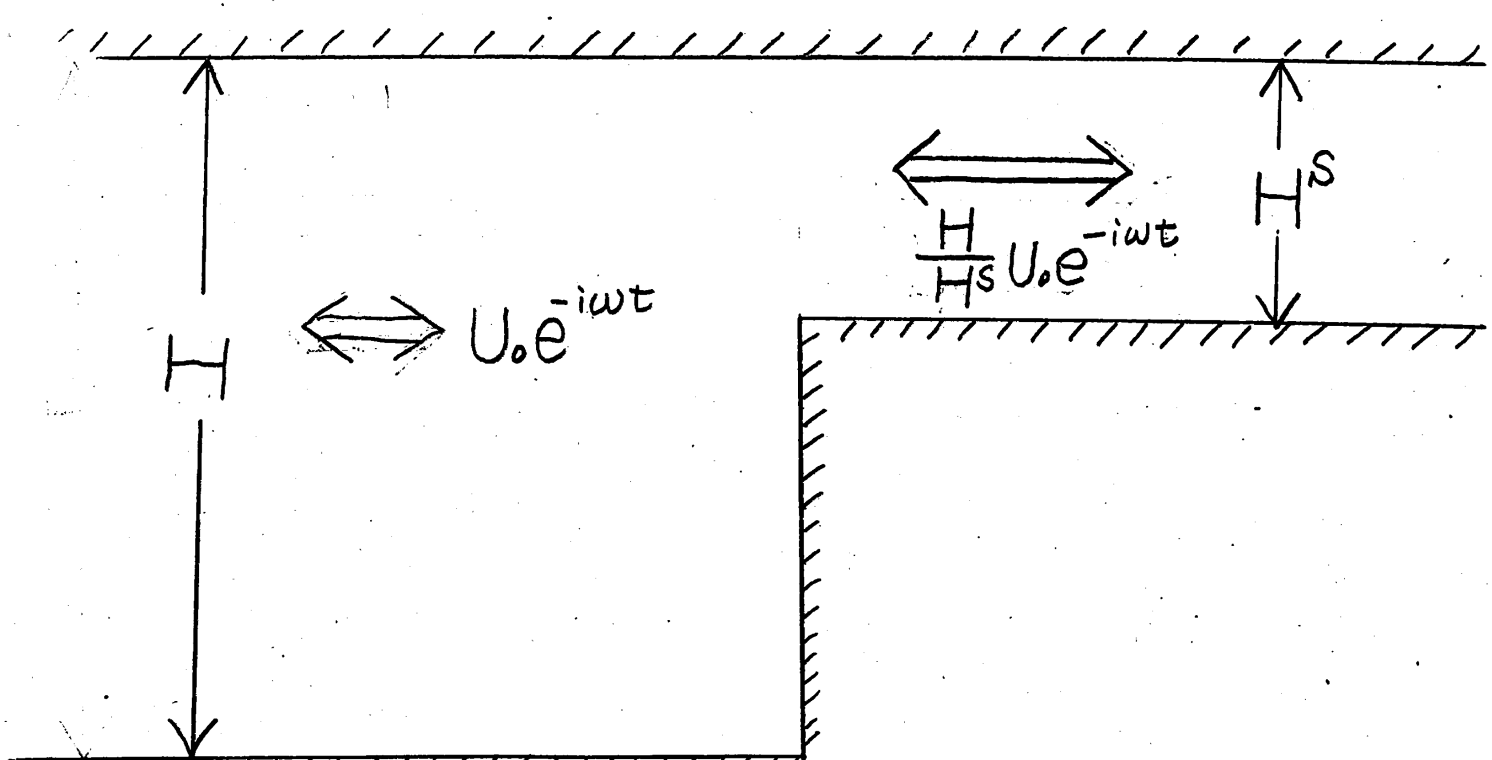
Garrett and Munk(1972)

3.4 内部潮汐波の励起1（大陸棚境界）

バロトロピック潮汐流　波長が十分に長い⇒流量が水平方向に一様

外洋
水深H
$$U_0 e^{-i\omega t}$$

大陸棚
水深H_S
$$U_0 \frac{H}{H^S} e^{-i\omega t}$$



外洋（内部波→xの負の方向に伝播）

$$u = U_0 e^{-i\omega t} + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(z) e^{i(-k_n x - \omega t)}$$

連続の式より

$$w = \qquad iU_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n k_n W_n(z) e^{i(-k_n x - \omega t)}$$

$$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g h_n}}$$

$$P_n(z) = h_n \frac{dW_n}{dz}$$

大陸棚（内部波→xの正の方向に伝播）

$$u^S = U_0 \frac{H}{H^S} e^{-i\omega t} + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^S(z) e^{i(+k_n^S x - \omega t)}$$

$$w^S = \qquad -iU_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n^S k_n^S W_n^S(z) e^{i(+k_n^S x - \omega t)}$$

$$k_n^S = \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g h_n^S}}$$

接続条件1

$$u(0,z)=\begin{cases} u^S(0,z) & for \quad -H^S<z<0 \\ 0 & for \quad -H<z<-H^S \end{cases}$$

両辺に$P_m(z)$を掛けて$-H<z<0$で積分

$$a_m=c_m+\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}b_n$$

$$c_m=\frac{\frac{H}{H^S}\int_{-H^S}^{0}P_m dz}{\int_{-H}^{0}P_m^2 dz},\quad A_{mn}=\frac{\int_{-H^S}^{0}P_m P_n^S dz}{\int_{-H}^{0}P_m^2 dz}$$

接続条件2

$$w(0,z)=w^S(0,z) \quad for \quad -H^S<z<0$$

両辺に$N^2(z)W_m^S(z)$を掛けて$-H_S<z<0$で積分

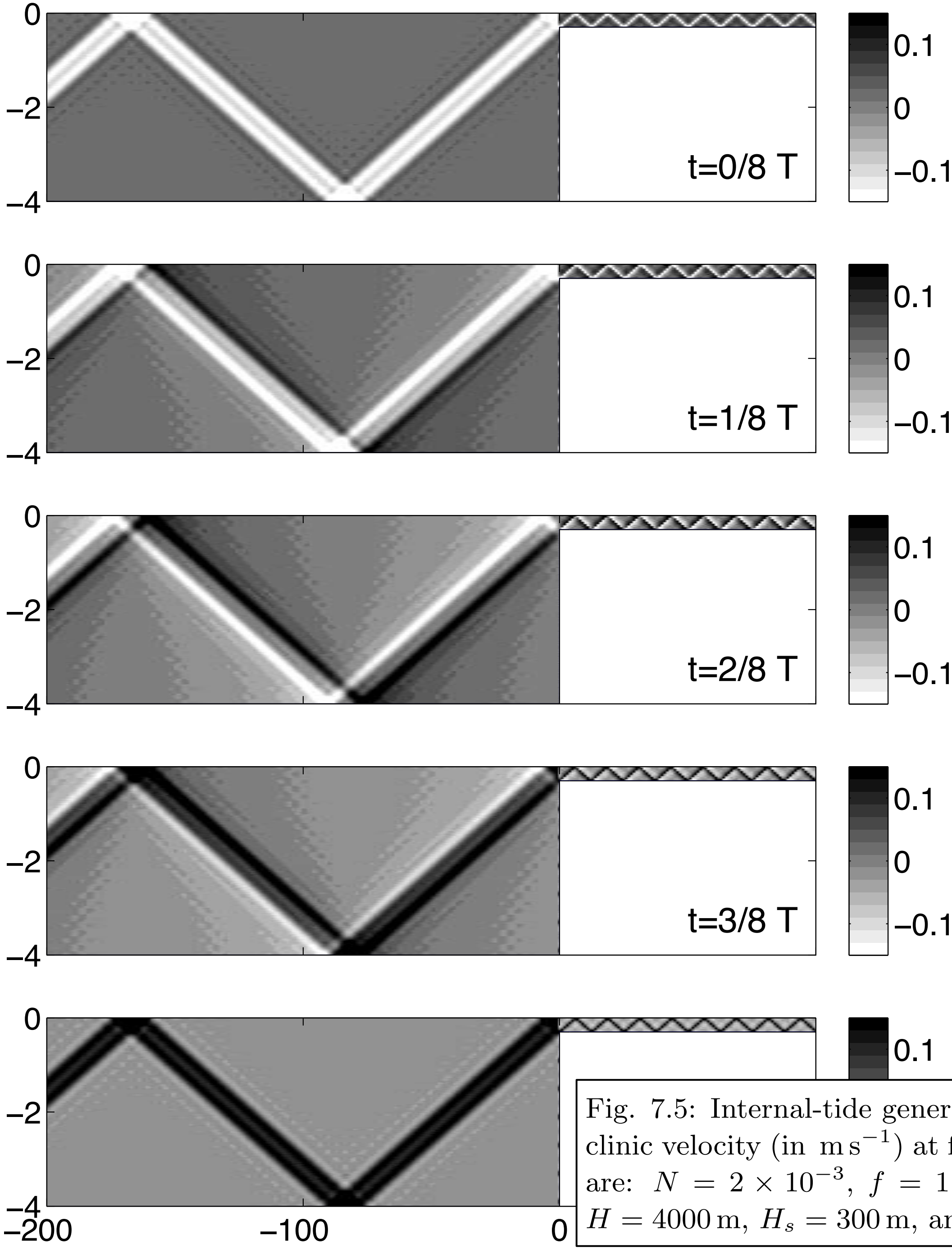
$$b_m=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}a_n$$

$$B_{mn}=\frac{-h_n k_n\int_{-H^S}^{0}N^2 W_n W_m^S dz}{h_m^S k_m^S\int_{-H^S}^{0}N^2\left(W_m^S\right)^2 dz}$$

和を有限項で打ち切る

$$a_m = c_m + \sum_{n=1}^{N} A_{mn} b_n, \quad b_m = \sum_{n=1}^{N} B_{mn} a_n$$

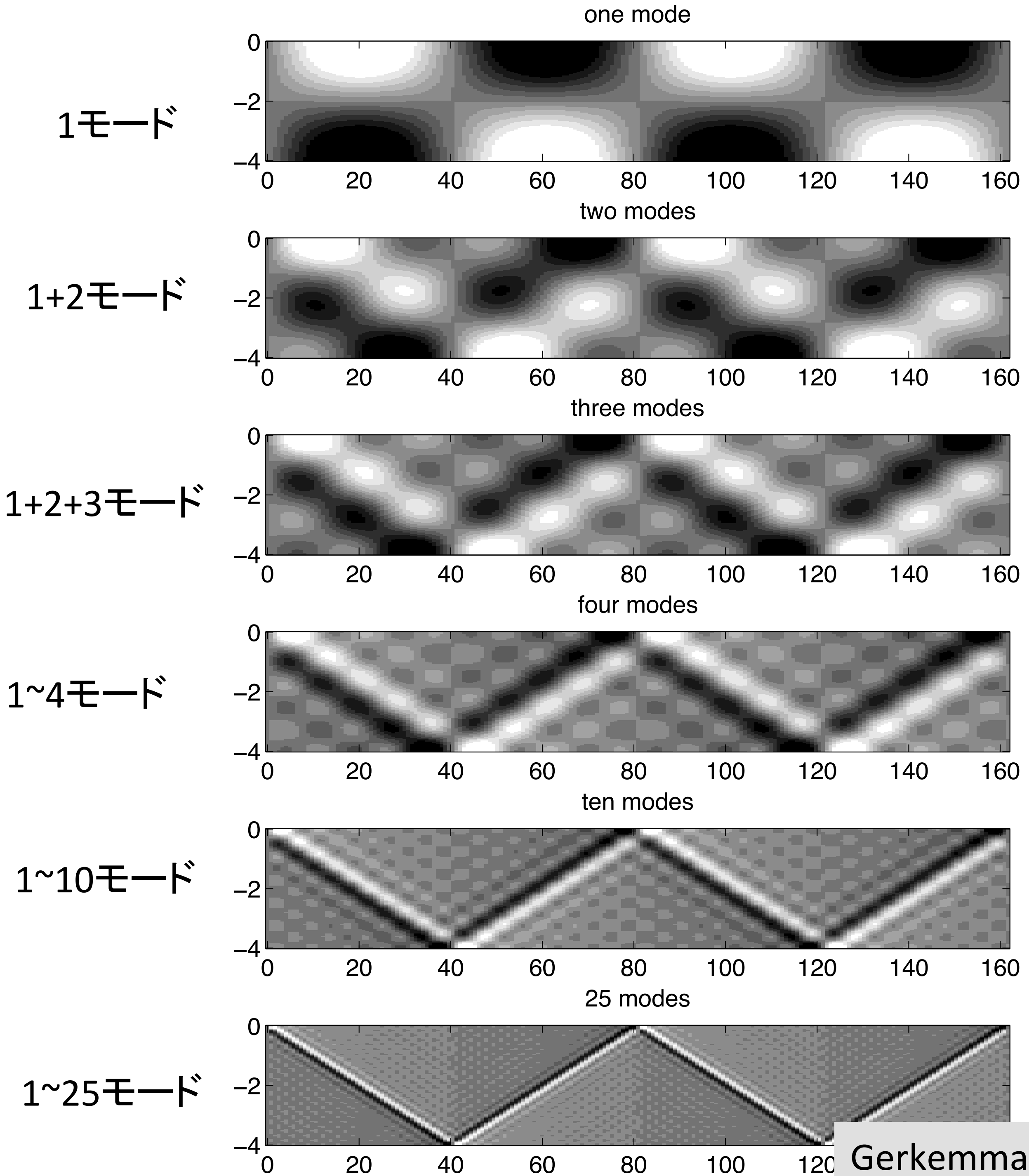
$$\vec{a} = \vec{c} + A\vec{b}, \vec{b} = B\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = (I - AB)^{-1}\vec{c}}$$



大陸棚境界で励起される内部潮汐波
→鉛直1～25モードの重ね合わせ。

Gerkemma and Zimmerman(2008)

Fig. 7.5: Internal-tide generation over a steep continental slope: the horizontal baroclinic velocity (in $\mathrm{m\,s^{-1}}$) at five instances during half a tidal period. Parameter values are: $N = 2 \times 10^{-3}$, $f = 1.0 \times 10^{-4}$ (latitude $\phi = 45°\mathrm{N}$), $\omega = 1.4 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$; $H = 4000\,\mathrm{m}$, $H_s = 300\,\mathrm{m}$, and $Q_0 = 100\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$; 25 modes are included.

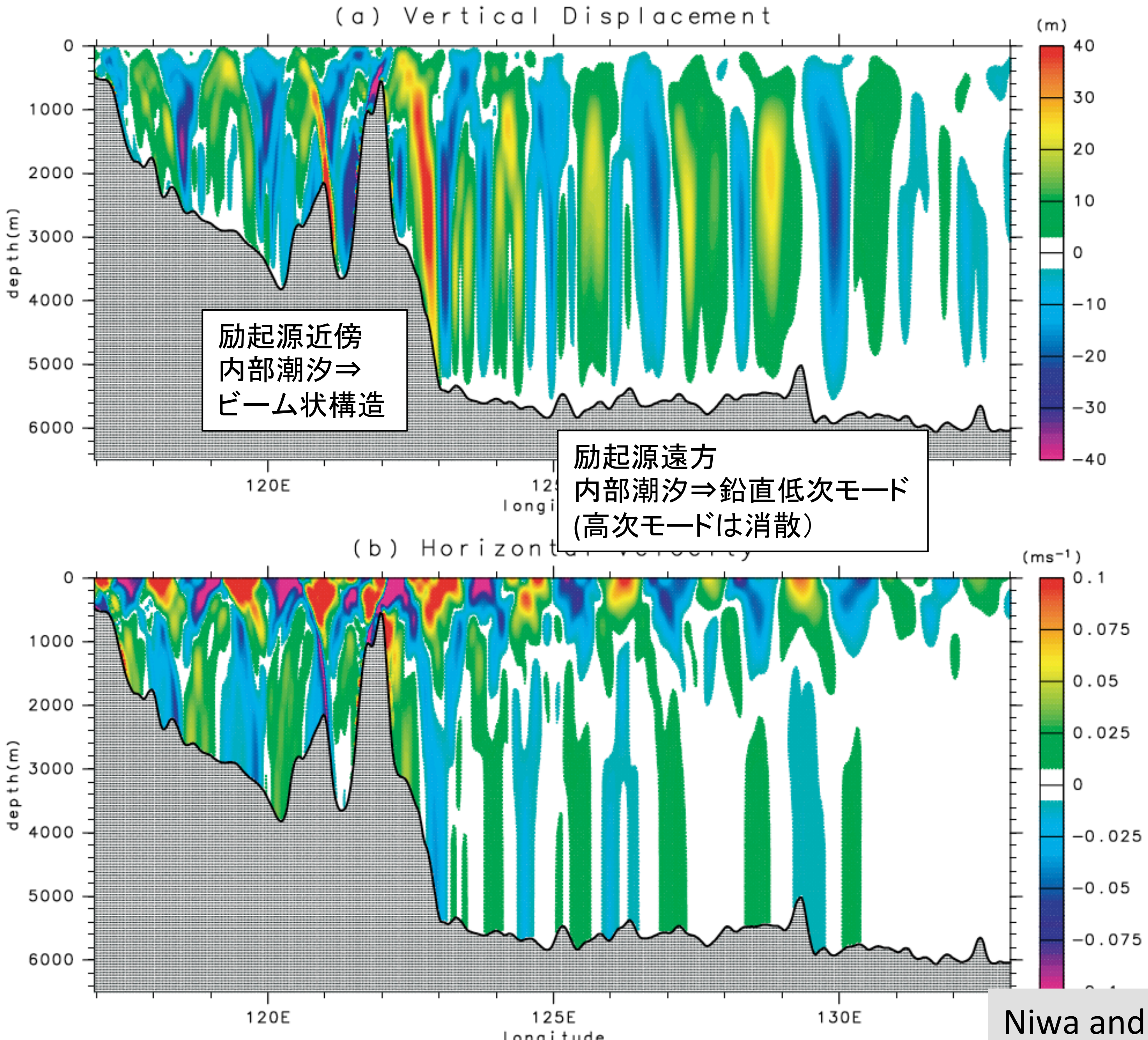


Gerkemma and Zimmerman(2008)

ルソン海峡海嶺で励起されたM_2内部潮汐波の鉛直断面図

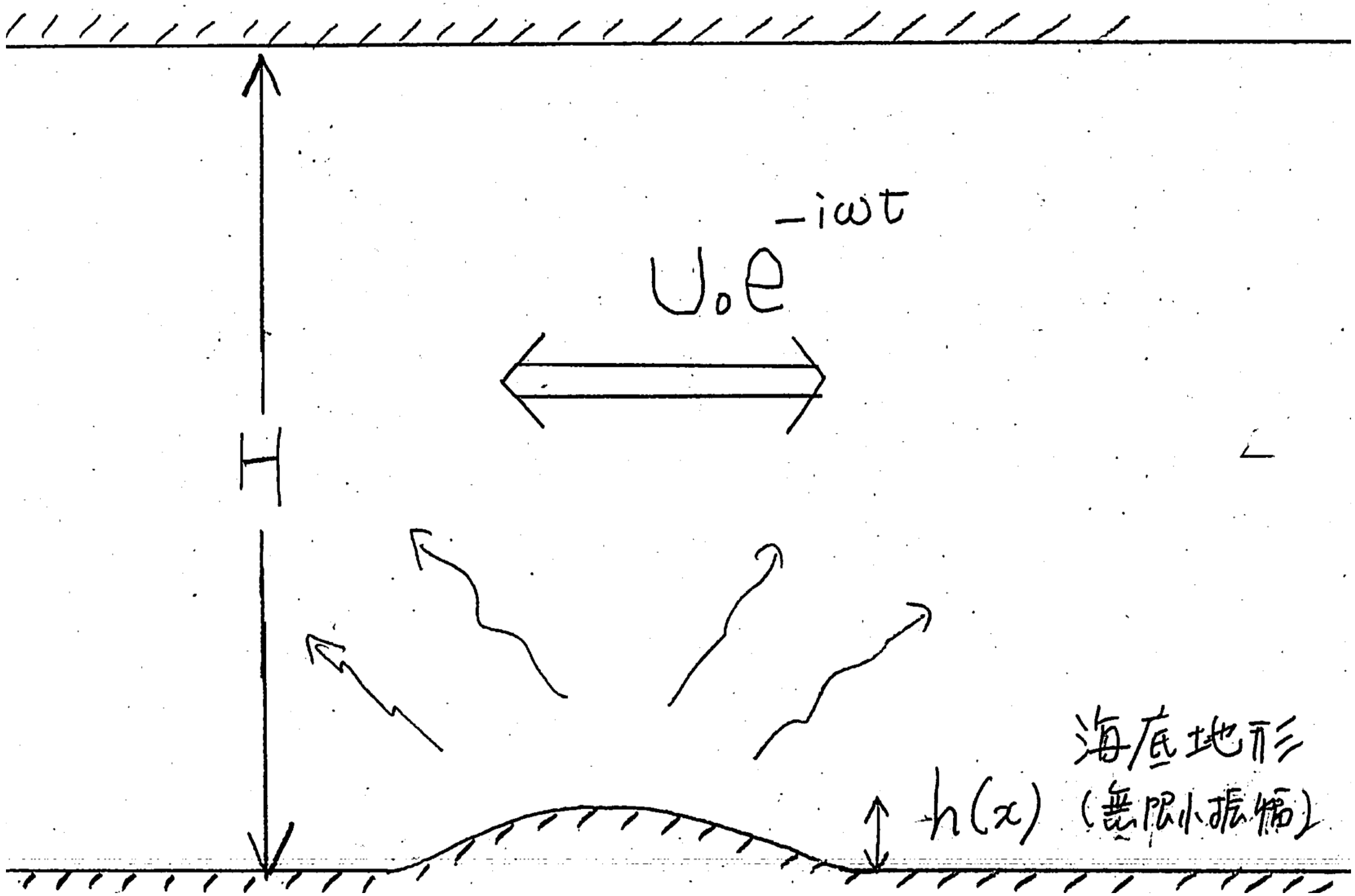
鉛直変位

東西流速



Niwa and Hibiya(2004)

3.3 内部波の励起（無限小振幅地形）



境界条件

$$w(x,0,t)=0$$ ⇒「Rigid-Lid近似」

$$w(x,-H,t)\approx w(x,-H+h,t)=U_0\frac{dh}{dx}e^{-i\omega t}$$

⇒「無限小振幅地形」

基礎方程式

静水圧近似＋ブジネスク近似
＋微少減衰項(後でε→0とする)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'}{\partial x} + fv - \varepsilon u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'}{\partial y} - fu - \varepsilon v$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\rho_* N^2(z)}{g} w - \varepsilon \rho'$$

⇒

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\right)^2 + f^2\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + N^2(z)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w = 0$$

$$w(x,y,z,t) = w(x,z)e^{-i\omega t}$$

⇓

$$\left\{(-i\omega + \varepsilon)^2 + f^2\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + N^2(z)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$w(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) W_n(z)$$

$$\Rightarrow a_n(x) = \int_{-H}^{0} N^2(z) w(x,z) W_n(z)\, dz$$

（規格化 $\int_{-H}^{0} N^2(z) W_n^2(z) = 1$ ）

$$\int_{-H}^{0} N^2(z)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}W_n(z)\,dz = \frac{d^2 a_n(x)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2W_n}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{gh_n}W_n = 0$$

$$W_n(0) = W_n(-H) = 0$$

$$\begin{aligned}\int_{-H}^{0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}W_n(z)\,dz &= \left[\frac{\partial w}{\partial z}W_n\right]_{-H}^{0} - \left[w\frac{dW_n}{dz}{}_n\right]_{-H}^{0} + \int_{-H}^{0} w\frac{d^2W_n}{dz^2}dz \\ &= w(x,-H)\frac{dW_n(-H)}{dz} - \int_{-H}^{0} w\frac{N^2(z)}{gh_n}W_n dz \\ &= U_0\frac{dh(x)}{dx}\frac{dW_n(-H)}{dz} - \frac{1}{gh_n}a_n(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d^2a_n(x)}{dx^2} - \frac{(-i\omega+\varepsilon)^2 + f^2}{gh_n}a_n(x) + \left((-i\omega+\varepsilon)^2 + f^2\right)U_0\frac{dh(x)}{dx}\frac{dW_n(-H)}{dz} = 0}$$

フーリエ変換

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

逆フーリエ変換

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}dk$$

$$\frac{df(x)}{dx}\Rightarrow ik\hat{f}(k),\quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Rightarrow -k^2\hat{f}(k)$$

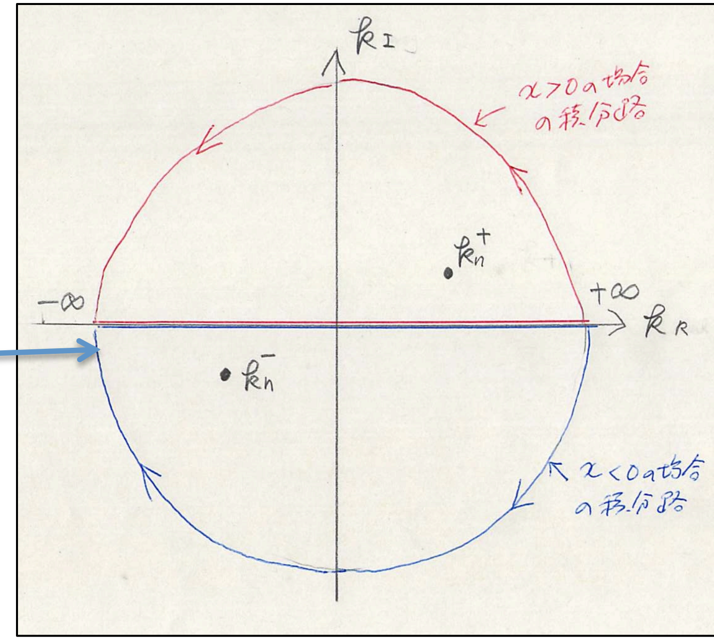
$$-k^2\hat{a}_n(k)-\frac{(-i\omega+\varepsilon)^2+f^2}{gh_n}\hat{a}_n(k)+\left((-i\omega+\varepsilon)^2+f^2\right)U_0\left(ik\hat{h}(k)\right)\frac{dW_n(-H)}{dz}=0$$

$$\hat{a}_n(k)=\frac{i\left(\omega^2-f^2-\varepsilon^2+2i\varepsilon\omega\right)U_0 k\hat{h}(k)\dfrac{dW_n(-H)}{dz}}{\left(k-k_n^+\right)\left(k-k_n^-\right)}$$

$$k_n^{\pm}=\pm\sqrt{\frac{\omega^2-f^2-\varepsilon^2}{gh_n}+i\frac{2\varepsilon\omega}{gh_n}}\approx\pm\sqrt{\frac{\omega^2-f^2}{gh_n}}\pm iO(\varepsilon)$$

$$a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{a}_n(k)e^{ikx}dk$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\oint\hat{a}_n(k)e^{ikx}dk$$



x>*0*と*x*<*0*の場合で積分路を変える

$$\because \begin{matrix} x>0,\ k_I\to+\infty \\ x<0,\ k_I\to-\infty \end{matrix} \Rightarrow\ e^{ikx}=e^{ik_Rx}e^{-k_Ix}\to 0$$

留数の定理：z_cは積分路の内側に存在。
f(z)は積分路内部で正則
積分路は反時計回り。

$$\oint\frac{f(z)}{(z-z_c)}dz=2\pi i f(z_c)$$

$\boxed{x>0\text{の場合}}$

$$a_n(x)=\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\frac{i(\omega^2-f^2-\varepsilon^2+2i\varepsilon\omega)U_0k_n^+\hat{h}(k_n^+)\frac{dW_n(-H)}{dz}}{(k_n^+-k_n^-)}e^{ik_n^+x}$$

$\boxed{\varepsilon\to 0\text{の極限を取る}}$

$$=\frac{-\sqrt{2\pi}(\omega^2-f^2)U_0\hat{h}(k_n)\frac{dW_n(-H)}{dz}}{2}e^{ik_nx}$$

$$\boxed{k_n=\sqrt{\frac{\omega^2-f^2}{gh_n}}>0}$$

$\boxed{x<0\text{の場合}}$（注意：積分路の向きが負）

$$a_n(x)=\frac{\sqrt{2\pi}(\omega^2-f^2)U_0\hat{h}(-k_n)\frac{dW_n(-H)}{dz}}{2}e^{-ik_nx}$$

Gerkemma and Zimmerman(2008)

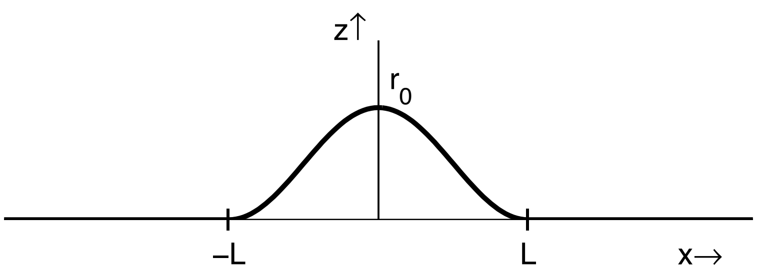
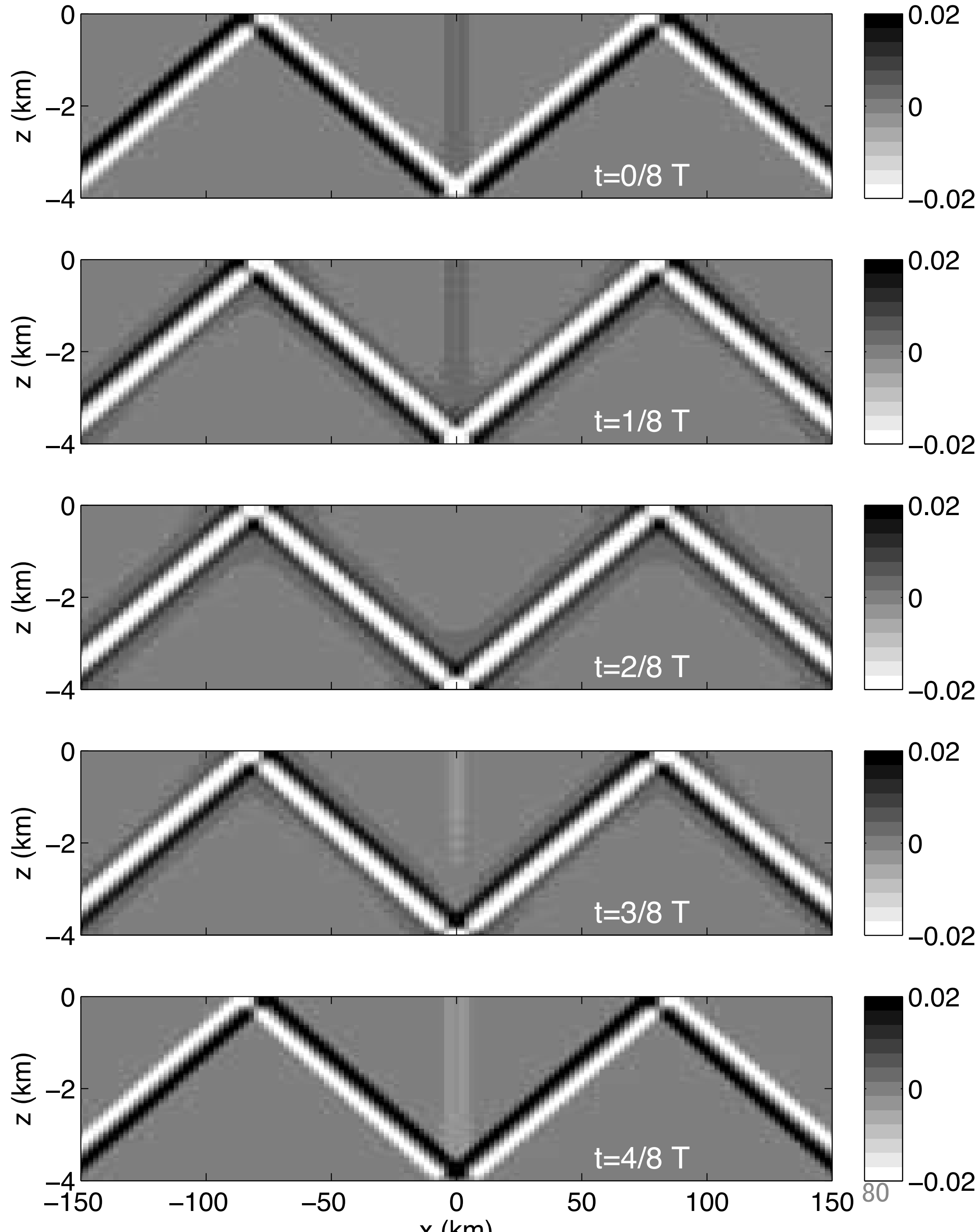
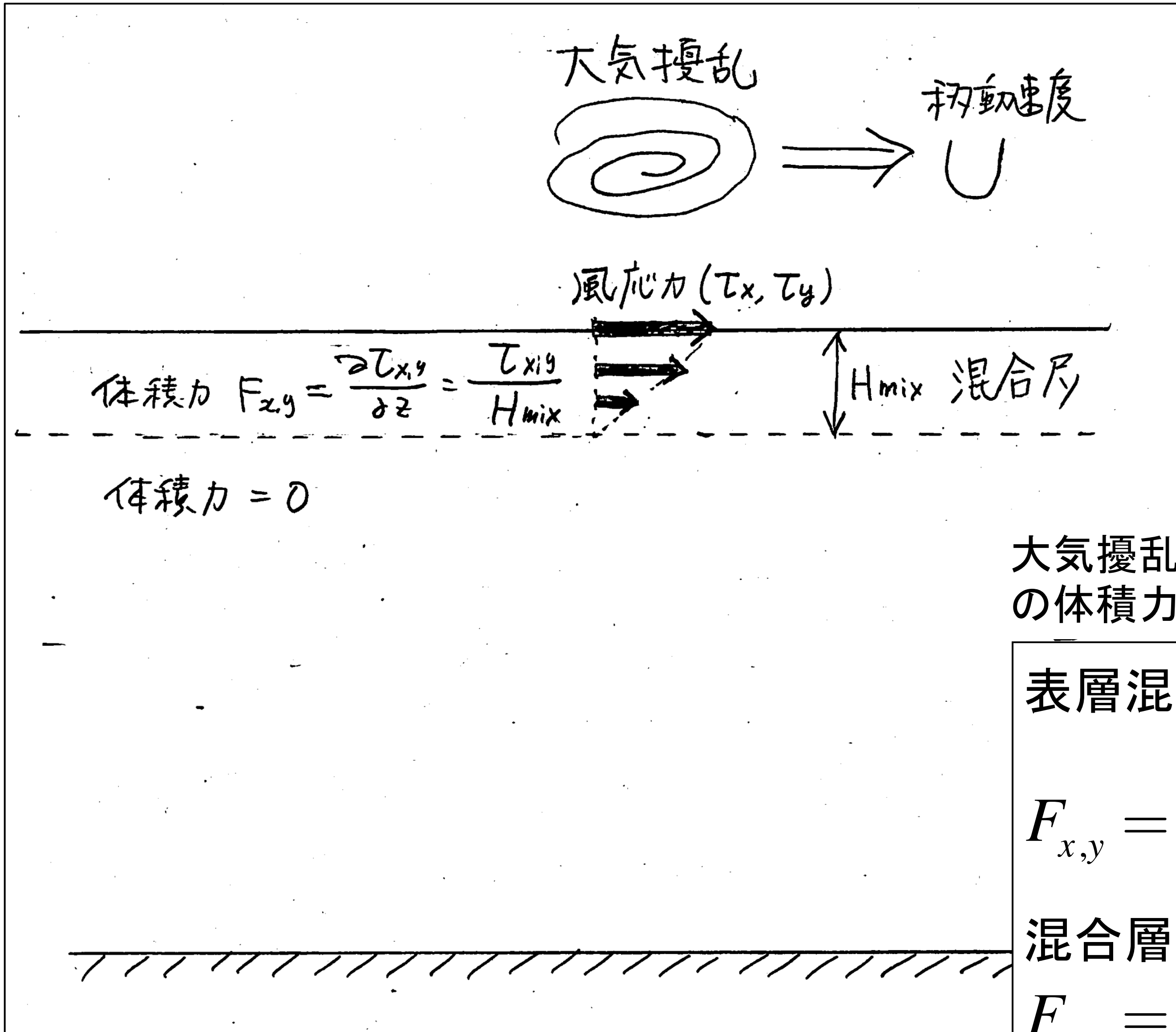


Fig. 7.9: Internal-tide generation over a small seamount (depicted in Figure 7.7): the horizontal baroclinic velocity u (in $\mathrm{m\,s^{-1}}$) at five instances during half a tidal period. Parameter values are: $N = 2 \times 10^{-3}$, $f = 1.0 \times 10^{-4}$ (latitude $\phi = 45°$N), $\omega = 1.4052 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ (M_2 tidal frequency); $H = 4000\,\mathrm{m}$, $r_0 = 500\,\mathrm{m}$, $L = 10\,\mathrm{km}$, and $Q_0 = 100\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$; 25 modes are included.



3.6 移動性大気擾乱（前線）による内部波の励起



大気擾乱の風応力は表層混合層内の体積力として作用する。

表層混合層内 $(-H_{mix}<z<0)$

$$F_{x,y} = \frac{\partial \tau_{x,y}}{\partial z} = \frac{\tau_{x,y}^{wind}}{H_{mix}}$$

混合層下部 $(-H<z<-H_{mix})$

$$F_{x,y} = 0$$

基礎方程式

静水圧近似＋ブジネスク近似+外力（風応力）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial x} + fv + \frac{\tau_x}{H_{mix}}F(z)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial y} - fu + \frac{\tau_y}{H_{mix}}F(z)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial z} - N^2(z)\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z \partial t} = 0$$

$$F(z) = \begin{cases} 0 & for \quad -H_{mix} < z < 0 \\ 1 & for \quad -H < z < -H_{mix} \end{cases}$$

モード展開

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta_n}{\partial x} + fv_n + F_n^x$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta_n}{\partial y} - fu_n + F_n^y$$

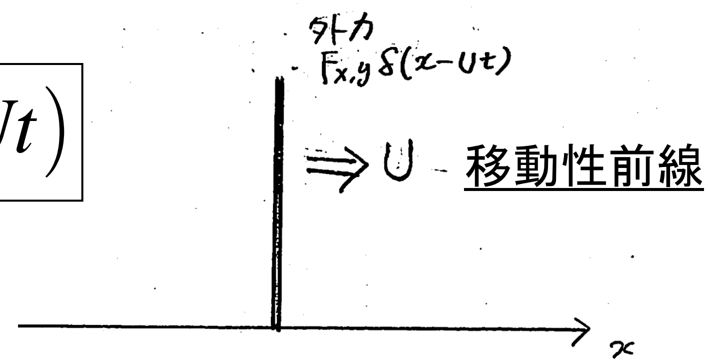
$$\frac{\partial \eta_n}{\partial t} + h_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y}\right) = 0$$

$$F_n^{x,y} = \frac{\tau^{x,y}}{H_{mix}} \frac{\int_{-H_{mix}}^{0} P_n(z)dz}{\int_{-H}^{0} P_n^2(z)dz}$$

大気擾乱

移動性前線＝デルタ関数、x方向に一定速度Uで移動、y方向に一定。

$$F_n^{x,y}(x,y,t) = F_n^{x,y}\delta(x-Ut)$$



解の形

$$\eta_n(x,y,t) = \eta_n(x-Ut),\ u_n(x,y,t) = u_n(x-Ut)\cdots$$

補足

本来ならば･･･

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial x}+fv+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \text{B.C.}\ A_v\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\tau_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial y}-fu+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad A_v\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0}=\tau_y$$

鉛直渦粘性項があるのでモード展開できない

鉛直渦粘性係数が特別な形だとモード展開できる。

$$A_v=\frac{\alpha}{N^2}$$

密度成層が弱いところで渦粘性が大

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}=-\frac{\partial p_n}{\partial x}+fv_n+\frac{\tau_x P_n(0)}{\int_{-H}^{0}P_n^2\,dz}-\frac{\alpha}{gh_n}u_n$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}=-\frac{\partial p_n}{\partial x}-fu_n+\frac{\tau_y P_n(0)}{\int_{-H}^{0}P_n^2\,dz}-\frac{\alpha}{gh_n}v_n$$

前ページ 混合層深H_{mix}が十分に薄ければ

$$F_n^{x,y}=\frac{\tau^{x,y}}{H_{mix}}\frac{\int_{-H_{mix}}^{0}P_n(z)dz}{\int_{-H}^{0}P_n^2(z)dz}$$

$$\approx\frac{\tau^{x,y}}{H_{mix}}\frac{H_{mix}P_n(0)}{\int_{-H}^{0}P_n^2(z)dz}=\frac{\tau^{x,y}P_n(0)}{\int_{-H}^{0}P_n^2(z)dz}$$

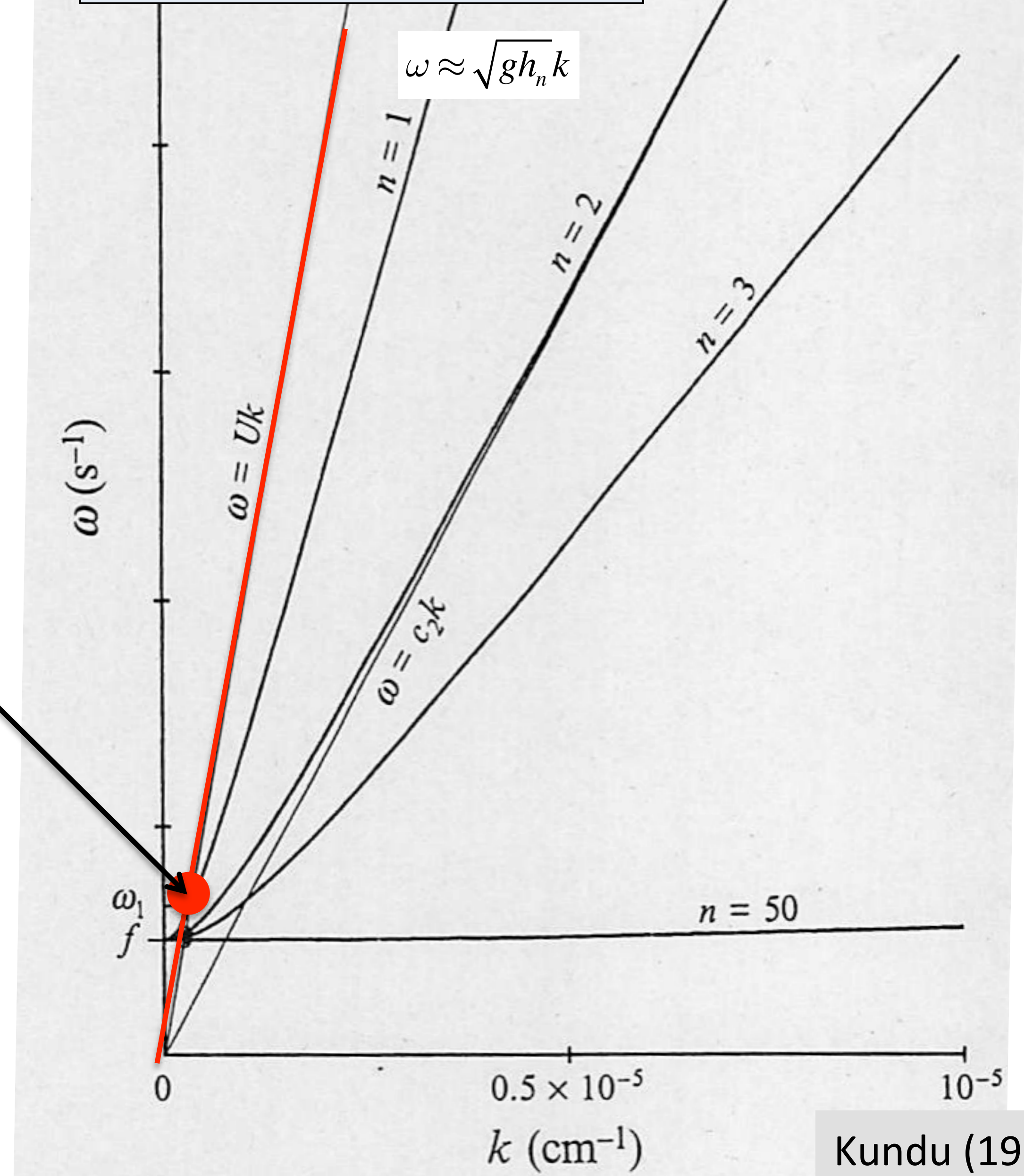
大気擾乱の移動速度U ＝ 内部波の位相速度$\dfrac{\omega}{k}$

傾きUの直線と
分散曲線との交点

$$\omega = Uk$$
$$\Updownarrow$$
$$\omega^2 = f^2 + gh_n k^2$$

内部波励起の条件
（静水圧近似）

$$U > \sqrt{gh_n}$$



Kundu (1993)

励起される内部波

$$k_n = \sqrt{\frac{f^2}{U^2 - gh_n}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{f^2}{1 - gh_n / U^2}}$$

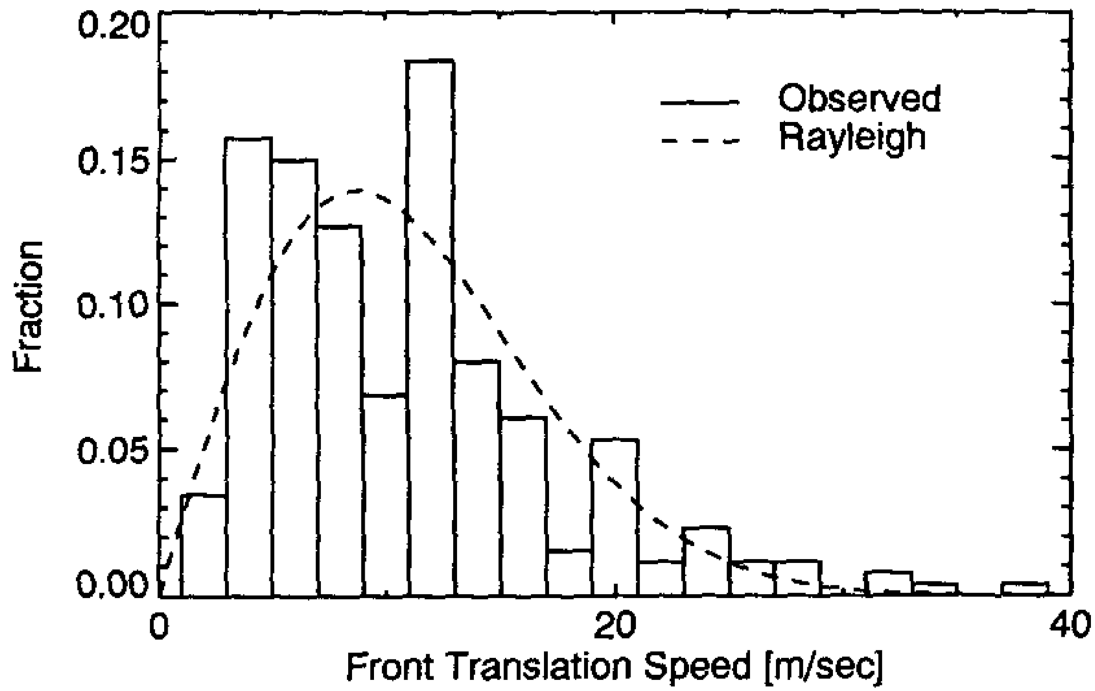
$$N_0 e^{\frac{z}{b}} \Rightarrow \sqrt{gh_n} \approx \frac{N_0 b}{x_n}$$

$$N_0 = 5 \times 10^{-3} s^{-1}, b = 1300 m$$

$$\sqrt{gh_1} = 2.7 m/s, \sqrt{gh_2} = 1.2 m/s \cdots$$

大気前線の移動速度

Rubenstein(1994)

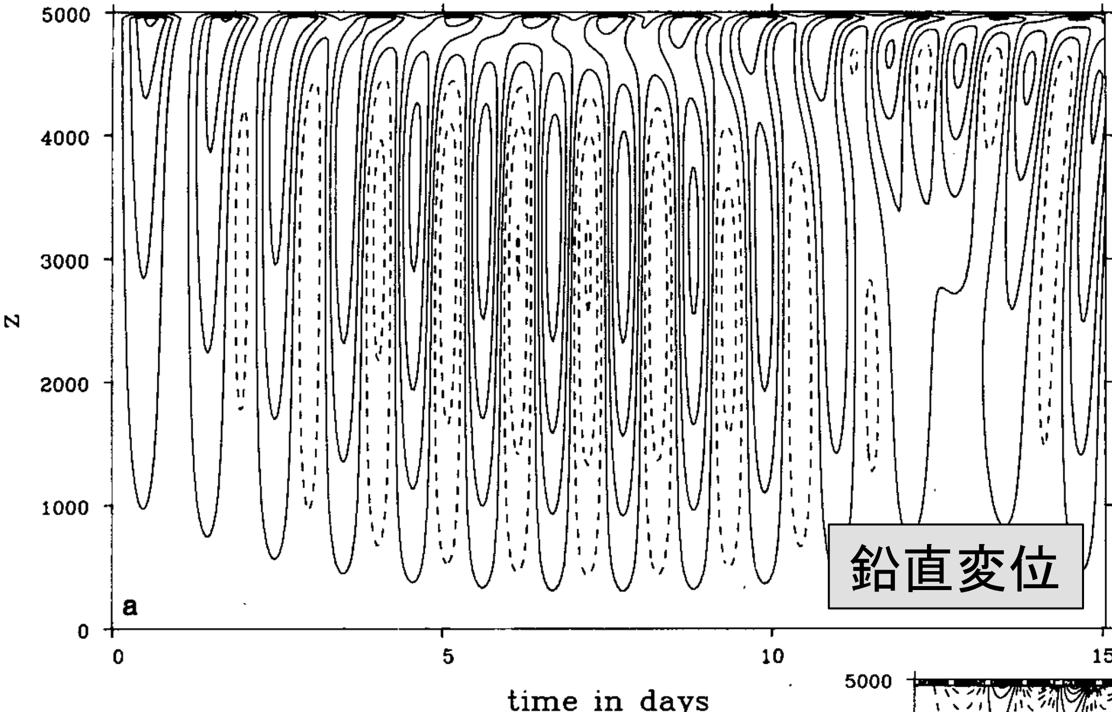


大気前線の移動速度>>内部波固有速度 $\Longrightarrow$ 大気擾乱起源の内部波
＝近慣性周期内部波

$$U \gg \sqrt{gh_n} \quad \Rightarrow \quad \omega \approx f$$

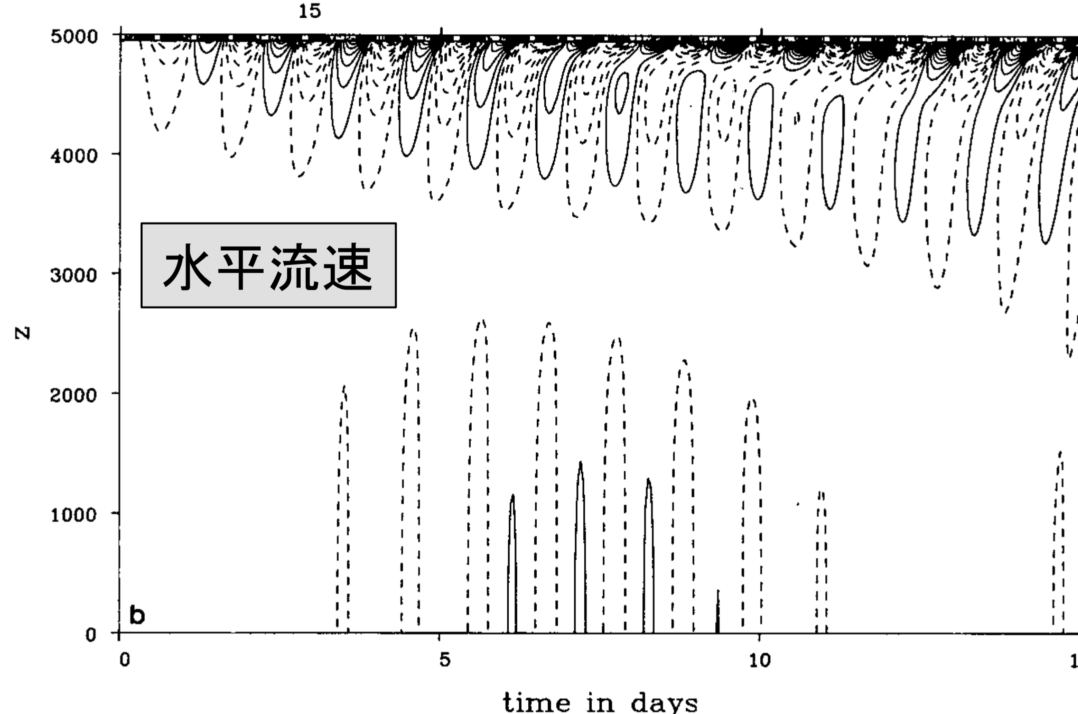
大気擾乱通過後に励起される近慣性内部波の鉛直分布

Gill(1984)

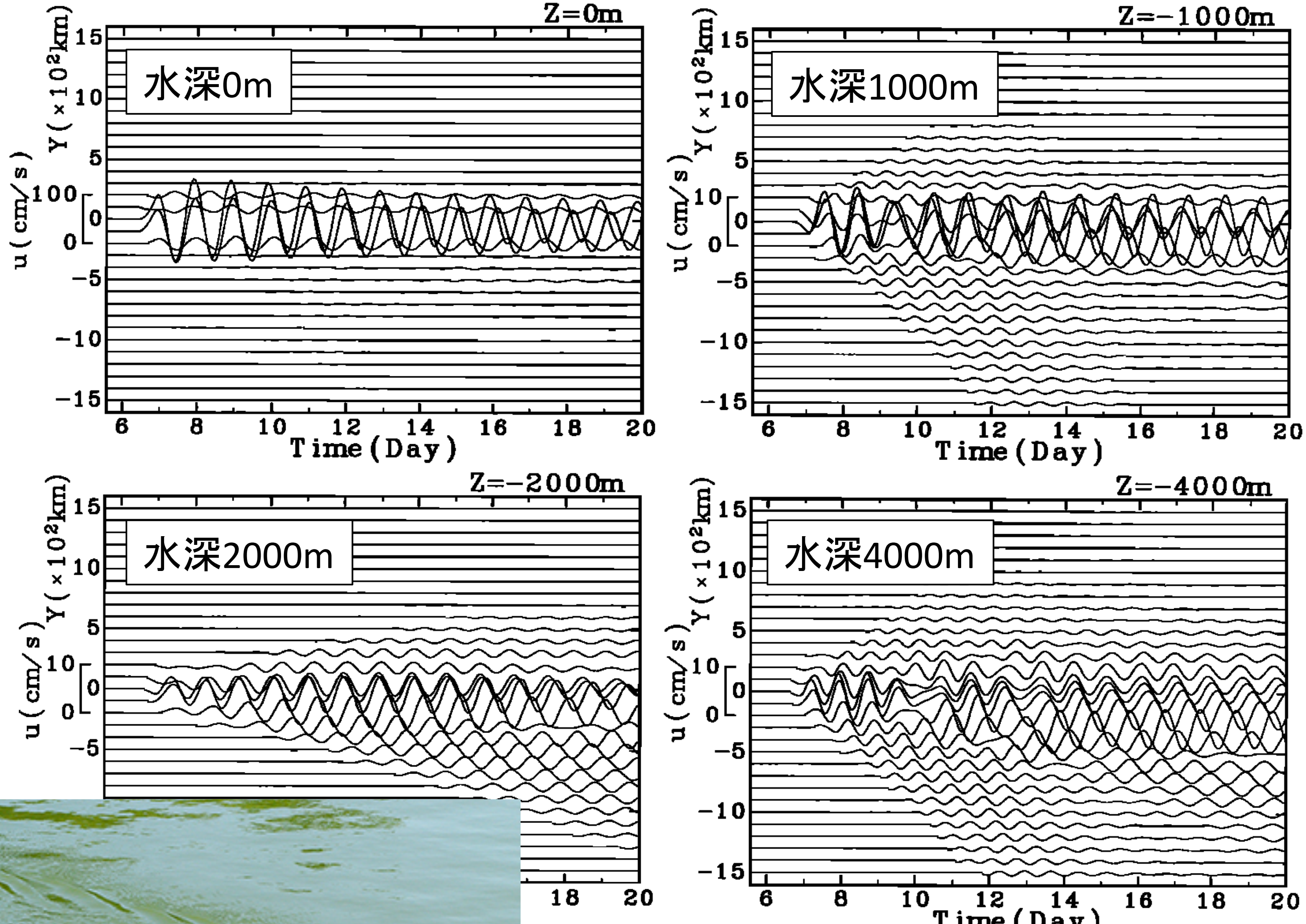


・混合層内部⇒強い近慣性流の励起

・混合層下部⇒
近慣性内部波が下層に伝播。
鉛直第１モード→第２モード、、、
徐々に高次モードが現れる。



一定速度で移動する大気擾乱により励起される内部波（線形計算）



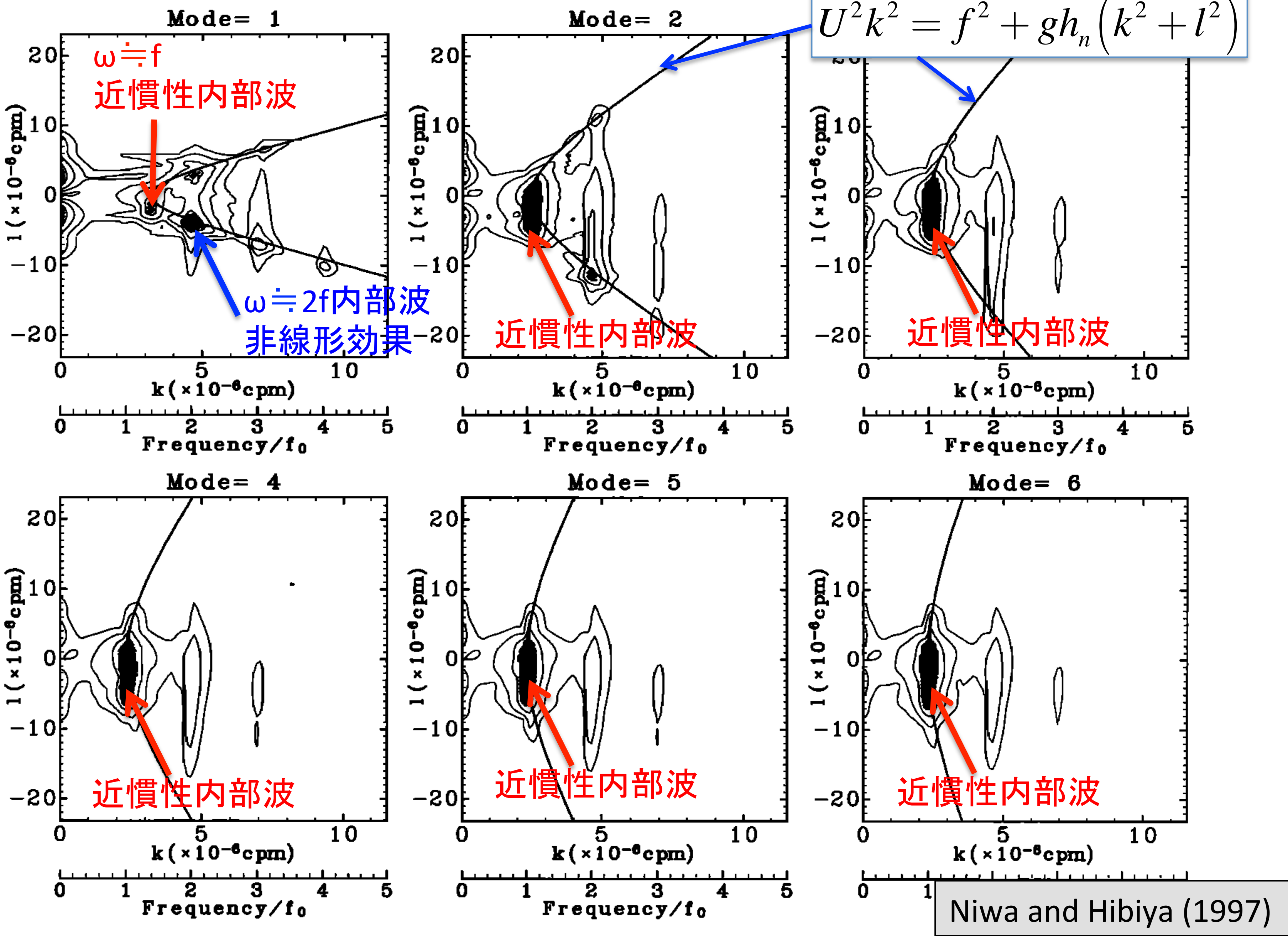
Niwa and Hibiya (1997)

擾乱源から見ると波は動かない。
→擾乱源と同じ速度で進む波のみが励起される。

各鉛直モードの運動エネルギーの水平波数スペクトル

移動速度U分散曲線

$$U^2k^2 = f^2 + gh_n\left(k^2 + l^2\right)$$



Niwa and Hibiya (1997)

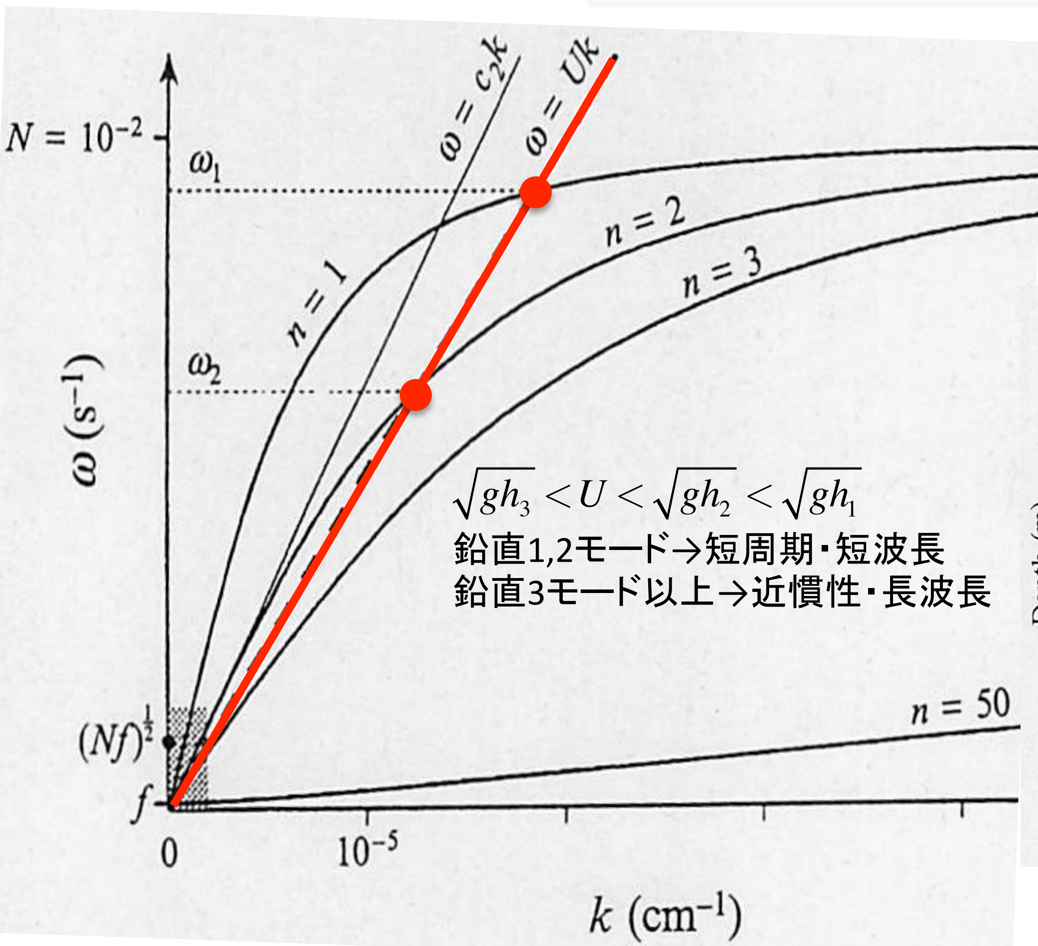
3.7 非静水圧の場合

大気擾乱の移動速度が
固有速度より遅い場合

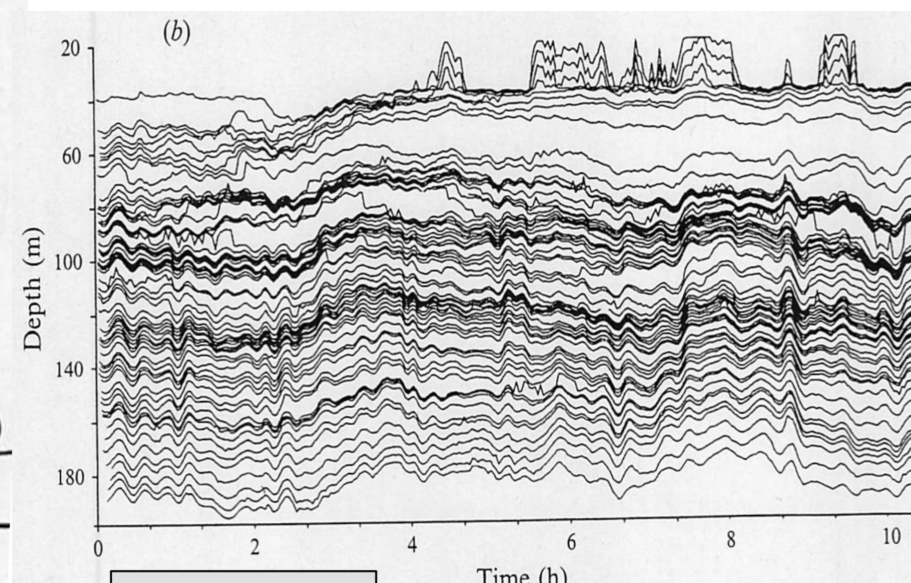
$$U < \sqrt{gh_n}$$

・静水圧近似の場合⇒近慣性内部波は励起されない。

・非静水圧の場合
⇒短周期(≈浮力周期)の内部波が励起。



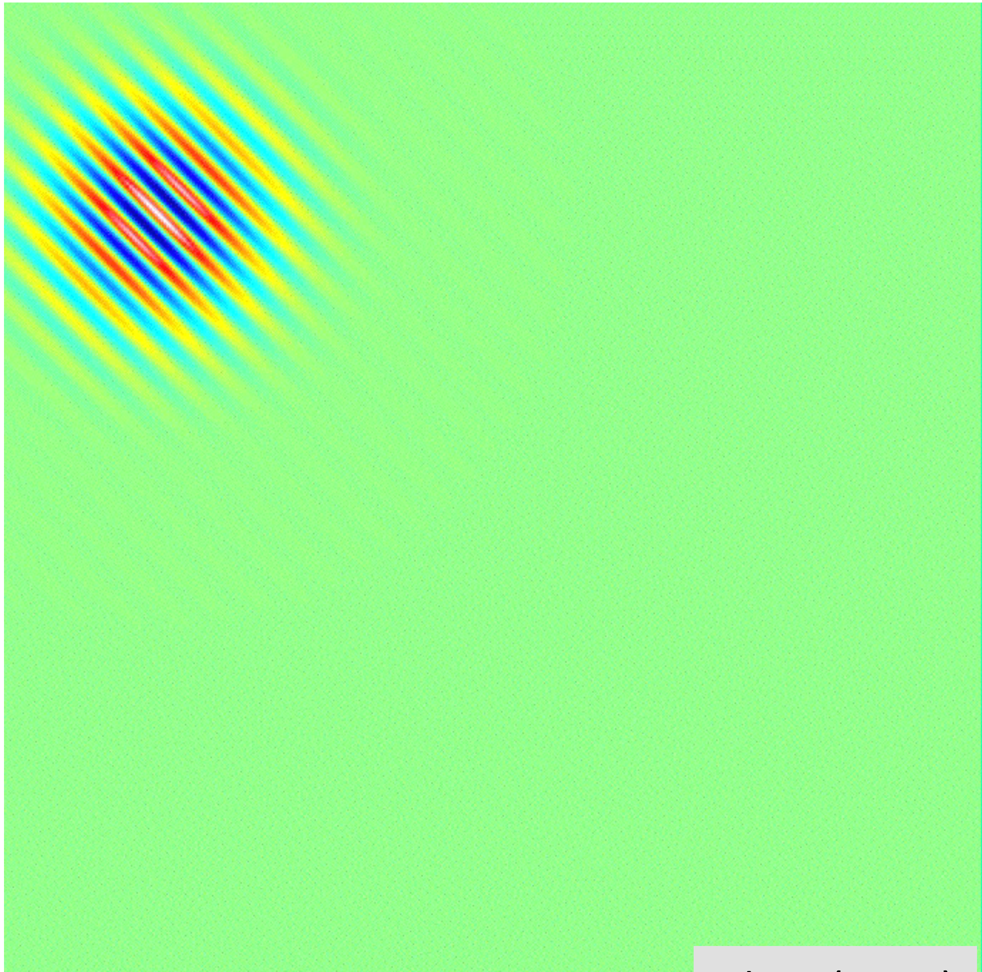
鉛直低次モード・短周期内部波の観測例



Kundu(1993)

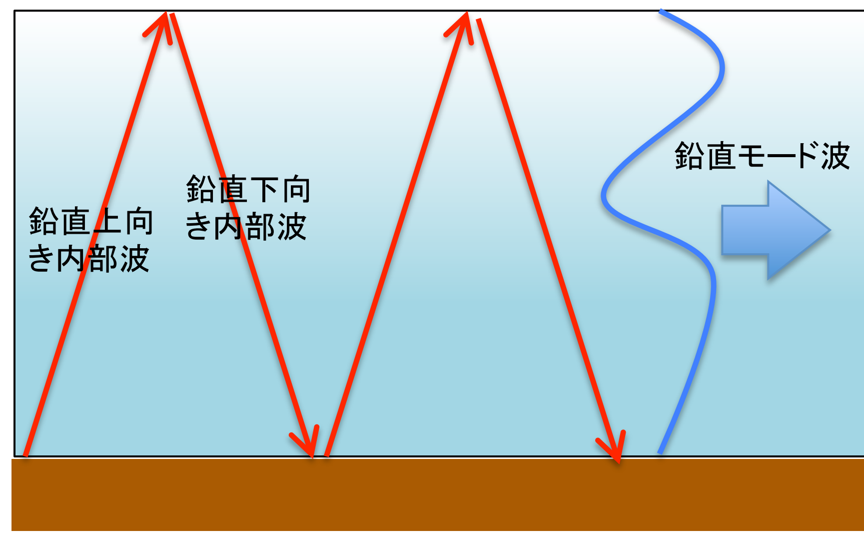
4. 内部波の鉛直伝播

内部波の基本的性質⇒鉛直斜めの特定の方向に伝播



Glenn(2004)

「鉛直モード波」
　海面と海底で反射される鉛直上向きと下向き内部波の重ね合わせで形成。



5.1 分散関係式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial x} + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial y} - fu$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\rho_*}\rho'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\rho_* N^2}{g} w$$

回転系＋非静水圧＋線形＋ブジネスク近似

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + N^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w = 0$$

$N(z) = N$一定の場合

鉛直斜め方向に伝播する波動解を仮定

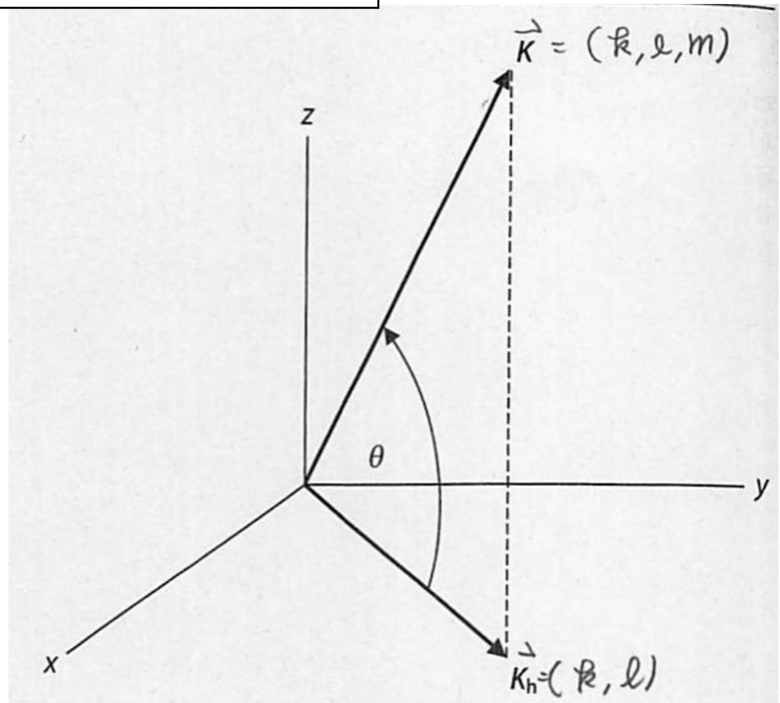
$$w = \tilde{w} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$$

分散関係式

$$\omega^2 = \frac{N^2(k^2 + l^2) + f^2 m^2}{k^2 + l^2 + m^2}$$

$$\omega^2 = N^2\cos^2\theta + f^2\sin^2\theta$$

内部波の周波数：波数ベクトルの向きのみに依存



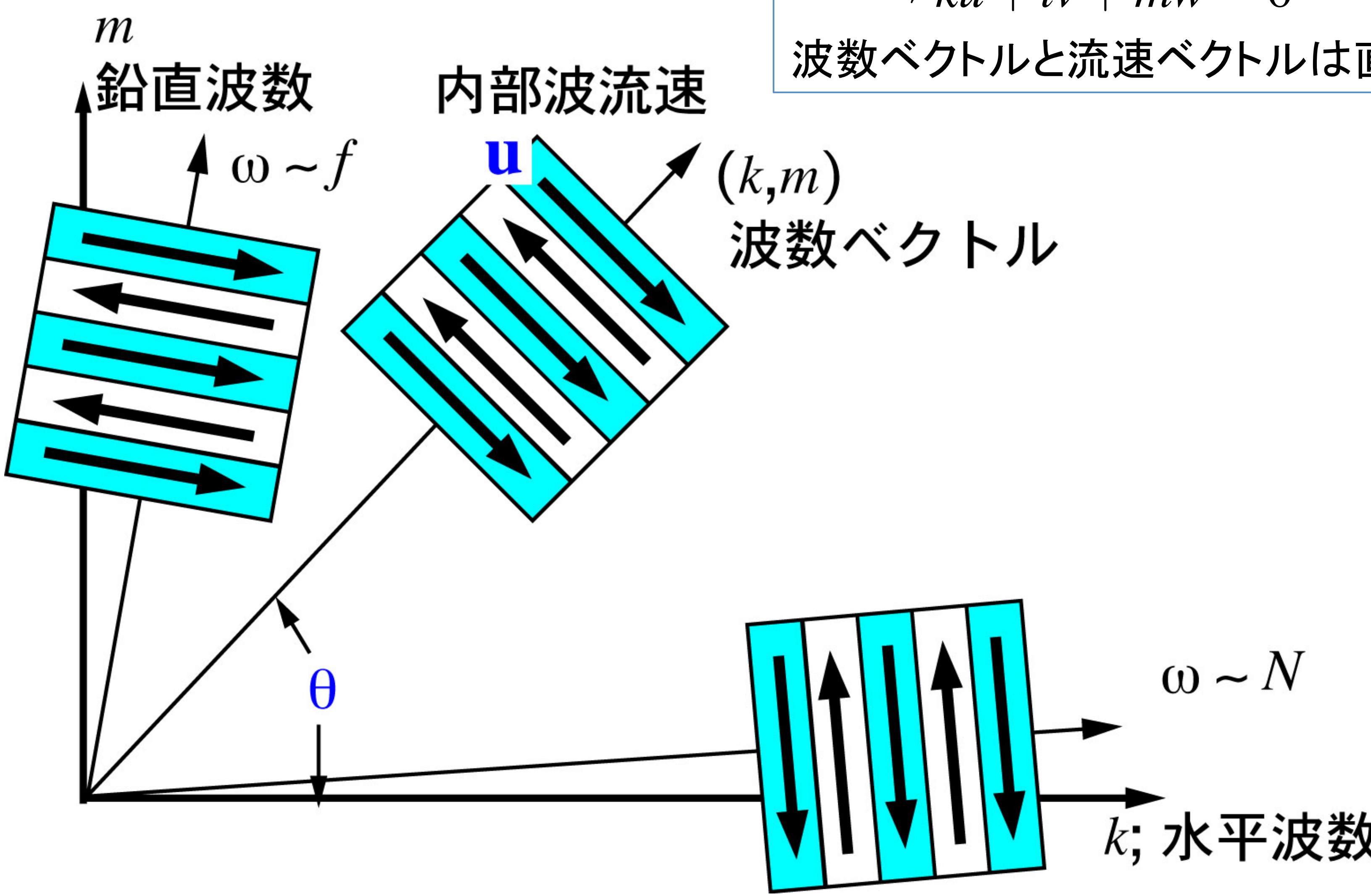
Pedlosky(2003)

$$\boxed{\omega^2 = N^2 \cos^2\theta + f^2 \sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow k\tilde{u} + l\tilde{v} + m\tilde{w} = 0$$

波数ベクトルと流速ベクトルは直交



5.2 内部波の群速度

$$\vec{C}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial l}, \frac{\partial \omega}{\partial m}\right)$$

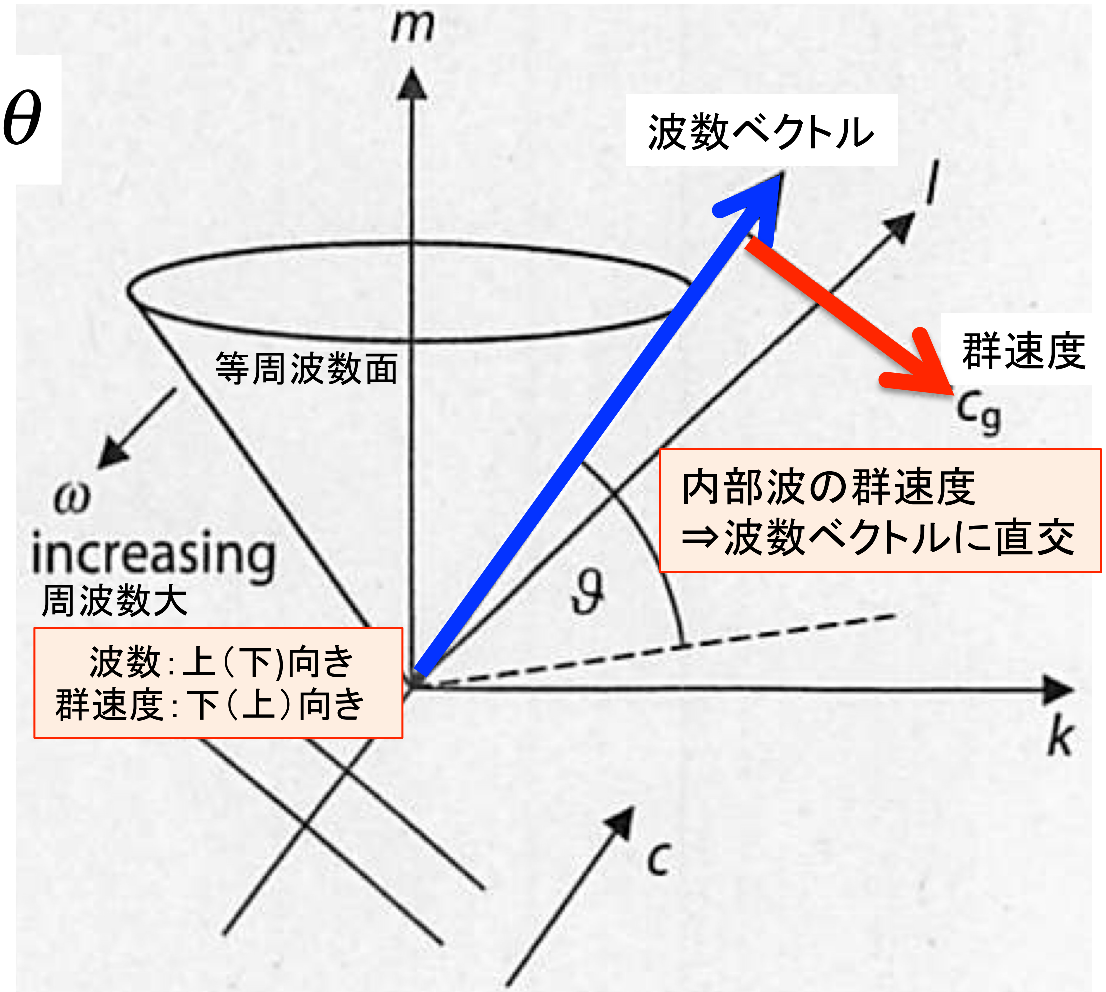
⇒ 群速度Cgは波数空間の等周波数面 $\omega = const.$ に直交する。周波数が大きくなる方向を向く。

$$\omega^2 = N^2 \cos^2\theta + f^2 \sin^2\theta$$

$$C_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{k(N^2 - \omega^2)}{\omega\left(k^2 + l^2 + m^2\right)}$$

$$C_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{l(N^2 - \omega^2)}{\omega\left(k^2 + l^2 + m^2\right)}$$

$$C_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{-m(\omega^2 - f^2)}{\omega\left(k^2 + l^2 + m^2\right)}$$



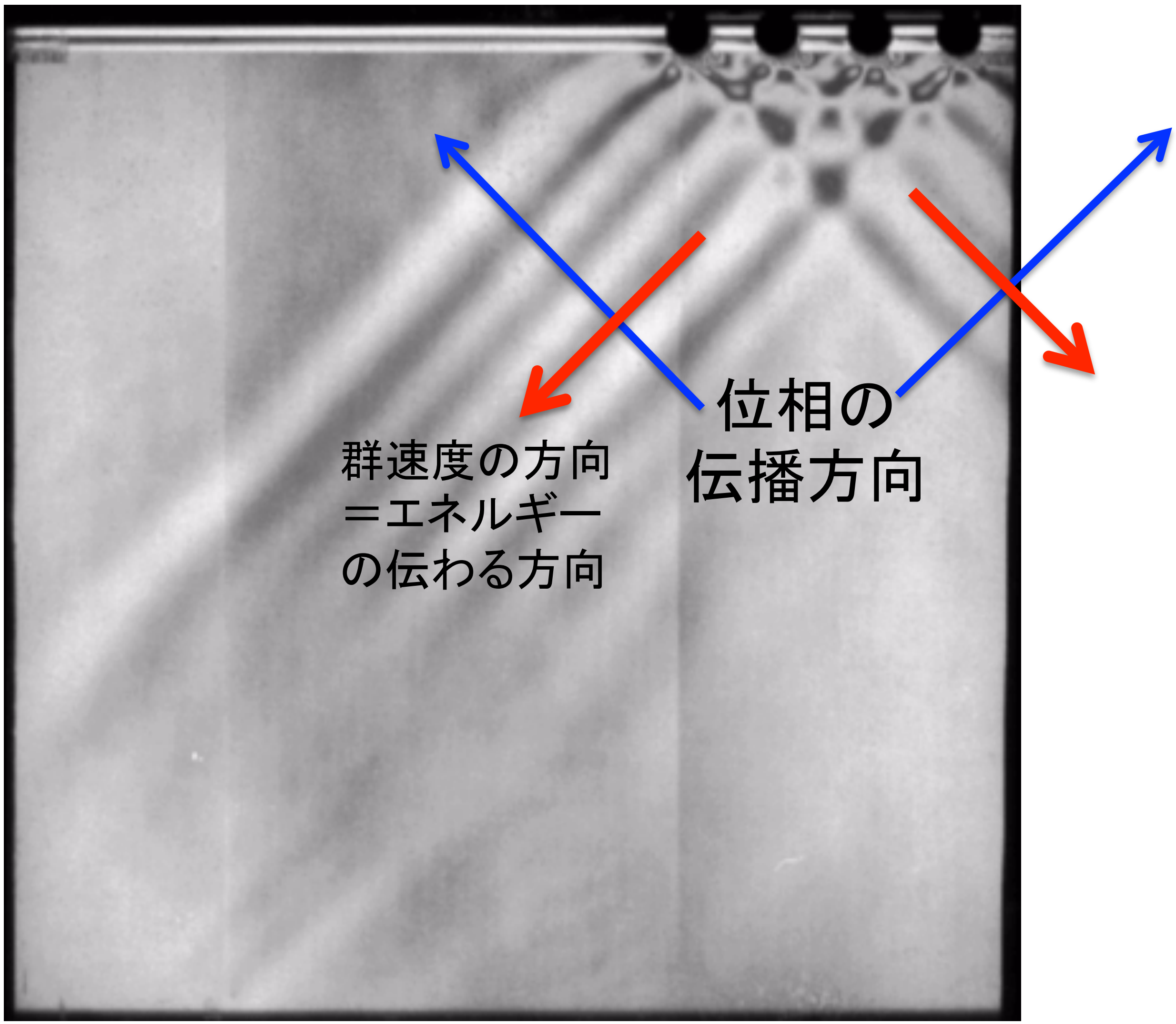
Pedlosky(2003)

群速度と位相速度の直交性（水槽実験）

http://www.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/exp_j/index.htm

群速度と位相速度の直交性（水槽実験）

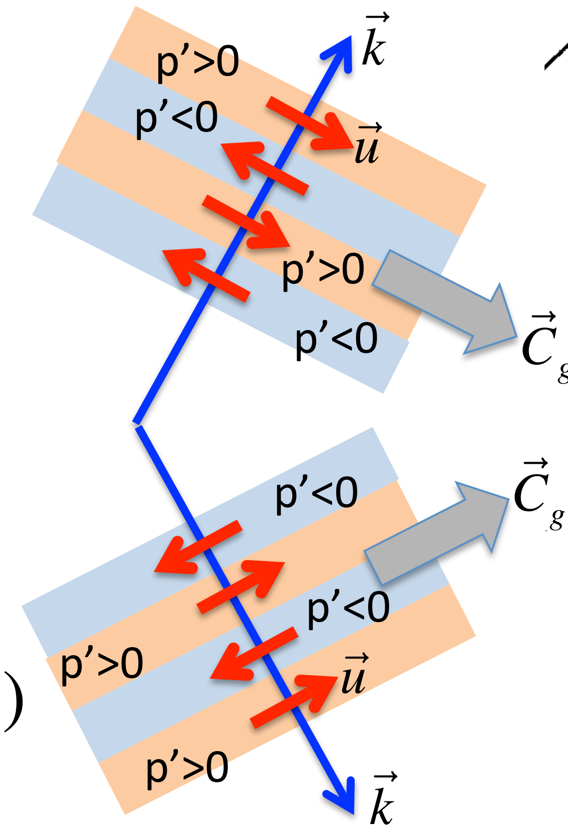
http://www.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/exp_j/index.htm



Polarization relations

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \rho' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{(N^2-\omega^2)}{(\omega^2-f^2)}\dfrac{(k\omega+ilf)}{\omega m} \\ -\dfrac{(N^2-\omega^2)}{(\omega^2-f^2)}\dfrac{(l\omega-ikf)}{\omega m} \\ 1 \\ \dfrac{i\rho^* N^2}{\omega g} \\ -\dfrac{\rho^*(N^2-\omega^2)}{\omega m} \end{pmatrix} \tilde{w}\exp\left(i(kx+ly+mz-\omega t)\right)$$

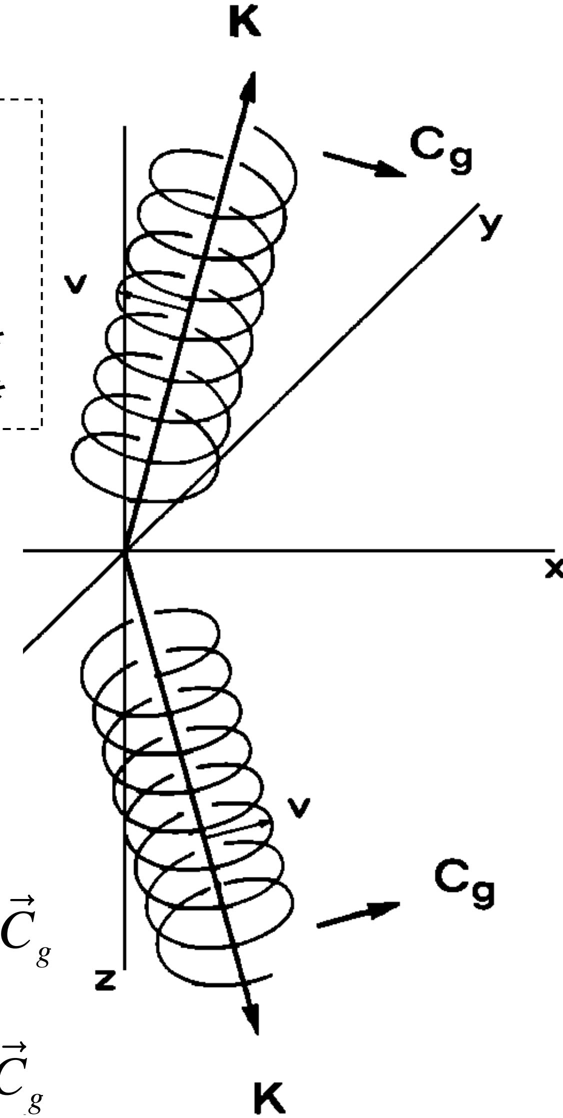
水平流速ベクトル
鉛直上方に向けて
半時計(時計)回り
↓
位相:上(下)向き
群速度:下(上)向き



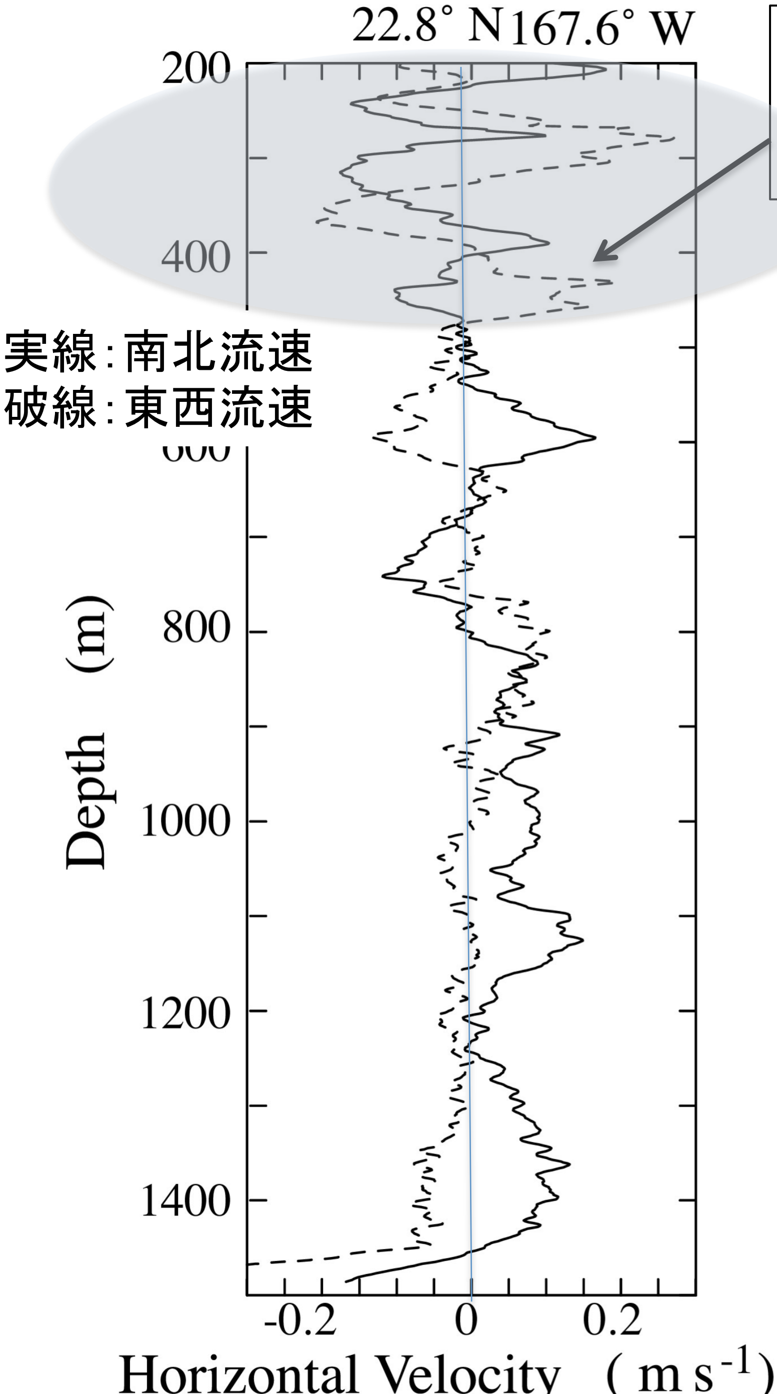
$l=0$ の場合 $v=-i\dfrac{f}{\omega}u$

$$\Rightarrow u = A\cos(kx+mz-\omega t)$$

$$v = A\frac{f}{\omega}\sin(kx+mz-\omega t)$$



Leaman and Sanford(1975)



投棄式流速計XCPを利用して
ハワイ海嶺の近傍で観測された
水平流速の鉛直プロファイル

Nagasawa et al.(2002)

投棄式流速計XCPの投入

5.3 内部波のエネルギー

$$u\times\left(\rho_*\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p'}{\partial x}+fv\right)$$
$$v\times\left(\rho_*\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p'}{\partial y}-fu\right)$$
$$w\times\left(\rho_*\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p'}{\partial z}-g\rho'\right)$$
$$\frac{g^2\rho'}{\rho_*N^2}\times\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}=\frac{\rho_*N^2}{g}w\right)$$

エネルギー方程式(線形近似)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho^*\left(u^2+v^2+w^2\right)+\frac{1}{2}\frac{g^2\rho'^2}{\rho^*N^2}\right)=-\frac{\partial(p'u)}{\partial x}-\frac{\partial(p'v)}{\partial y}-\frac{\partial(p'w)}{\partial z}$$

エネルギー

$$KE=\frac{1}{2}\rho^*\overline{\left(u^2+v^2+w^2\right)}=\frac{\rho^*}{4}\left(\frac{N^2-\omega^2}{\omega^2}\cdot\frac{\omega^2+f^2}{\omega^2-f^2}+1\right)|\tilde{w}|^2$$

$$PE=\frac{1}{2}\frac{g^2}{\rho^*}\frac{\overline{\rho'^2}}{N^2}=\frac{1}{2}\rho^*N^2\overline{\eta^2}=\frac{\rho^*}{4}\frac{N^2}{\omega^2}|\tilde{w}|^2$$

$$E=KE+PE=\frac{\rho^*}{2}\frac{N^2-f^2}{\omega^2-f^2}|\tilde{w}|^2$$

エネルギーフラックス

$$F_x=\overline{p'u}=C_{gx}E=\frac{\left(N^2-\omega^2\right)^2}{\left(\omega^2-f^2\right)}\frac{k}{\omega m^2}\frac{\rho^*|\tilde{w}|^2}{2},\quad F_y=\overline{p'v}=C_{gy}E=\frac{\left(N^2-\omega^2\right)^2}{\left(\omega^2-f^2\right)}\frac{l}{\omega m^2}\frac{\rho^*|\tilde{w}|^2}{2}$$

$$F_z=\overline{p'w}=C_{gz}E=-\frac{(N^2-\omega^2)}{\omega m}\frac{\rho^*|\tilde{w}|^2}{2}$$

5.4 WKBスケーリング

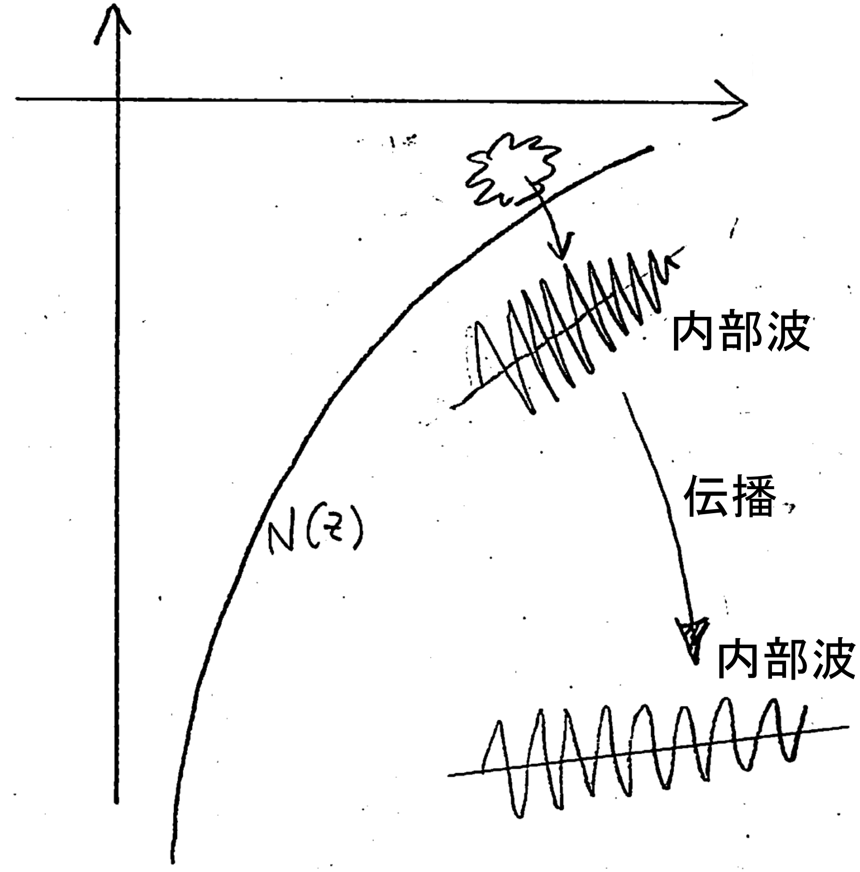
内部波が鉛直方向に伝播

↓

浮力周波数$N(z)$変化

↓

内部波の波長と振幅が変化



仮定

内部波の鉛直波長 << 浮力周波数$N(z)$の鉛直変化スケール O(1000m)

⇒内部波に取って局所的に$N(z)$=一定と見なせる。(WKB近似)

周波数：ω
水平波数：k,l
＝保存量

$$\omega^2 = \frac{N^2(z)(k^2+l^2)+f^2m^2}{k^2+l^2+m^2}$$

$$m(z) = \sqrt{\frac{N^2(z)-\omega^2}{\omega^2-f^2}(k^2+l^2)} \propto \sqrt{N^2(z)-\omega^2}$$

鉛直エネルギーフラックス

$$F_z = C_{gz}E = -\frac{(N^2-\omega^2)}{\omega m}\frac{\rho^*|\tilde{w}|^2}{2}$$

＝保存量（エネルギーが途中で溜まらない）

$$|\tilde{w}(z)| \propto \sqrt{\frac{m(z)}{N^2(z)-\omega^2}} \propto \frac{1}{\sqrt[4]{N^2(z)-\omega^2}}$$

$$E = \frac{\rho^*}{2}\frac{N^2(z)-f^2}{\omega^2-f^2}|\tilde{w}|^2 \propto \frac{N^2(z)-f^2}{\sqrt{N^2(z)-\omega^2}}$$

基礎方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+f^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+N^2(z)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w=0$$

$$w = W(z)e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2}+m^2(z)W(z)=0, \quad m(z)=\sqrt{\frac{N^2(z)-\omega^2}{\omega^2-f^2}(k^2+l^2)}$$

解の形 $\boxed{W(z) = e^{i\phi(z)}}$

基礎方程式 $\boxed{i\underline{\dfrac{d^2\phi}{dz^2}} - \left(\dfrac{d\phi}{dz}\right)^2 + m^2(z) = 0}$

仮定：二階微分を無視

$$\left|\frac{d^2\phi}{dz^2}\right| << |m^2(z)|$$

$$\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 + m^2(z) \approx 0 \quad \rightarrow$$

近似解1

$$\boxed{\phi_\pm(z) \approx \pm \int^z m(s)ds}$$

$$\left|\frac{dm}{dz}\right| << |m|^2 \Rightarrow \left|\frac{dm}{dz}\right|\left|\frac{1}{m}\right| << |m|$$

||

一波長での$m(z)$の変化 << $m(z)$自身 WKB近似

二階微分項を近似解1で置き換える

$$\left(\frac{d\phi_\pm}{dz}\right)^2 \approx m^2(z) \pm i\frac{dm(z)}{dz} \rightarrow \frac{d\phi_\pm}{dz} \approx \pm m(z) + \frac{i}{2m}\frac{dm(z)}{dz}$$

近似解2

$$\boxed{\phi_\pm(z) = \pm \int^z m(s)ds + i\ln\sqrt{m}}$$

$$\boxed{W(z) = \frac{C_1}{\sqrt{m(z)}}\exp(i\int^z m(s)ds) + \frac{C_2}{\sqrt{m(z)}}\exp(-i\int^z m(s)ds)}$$

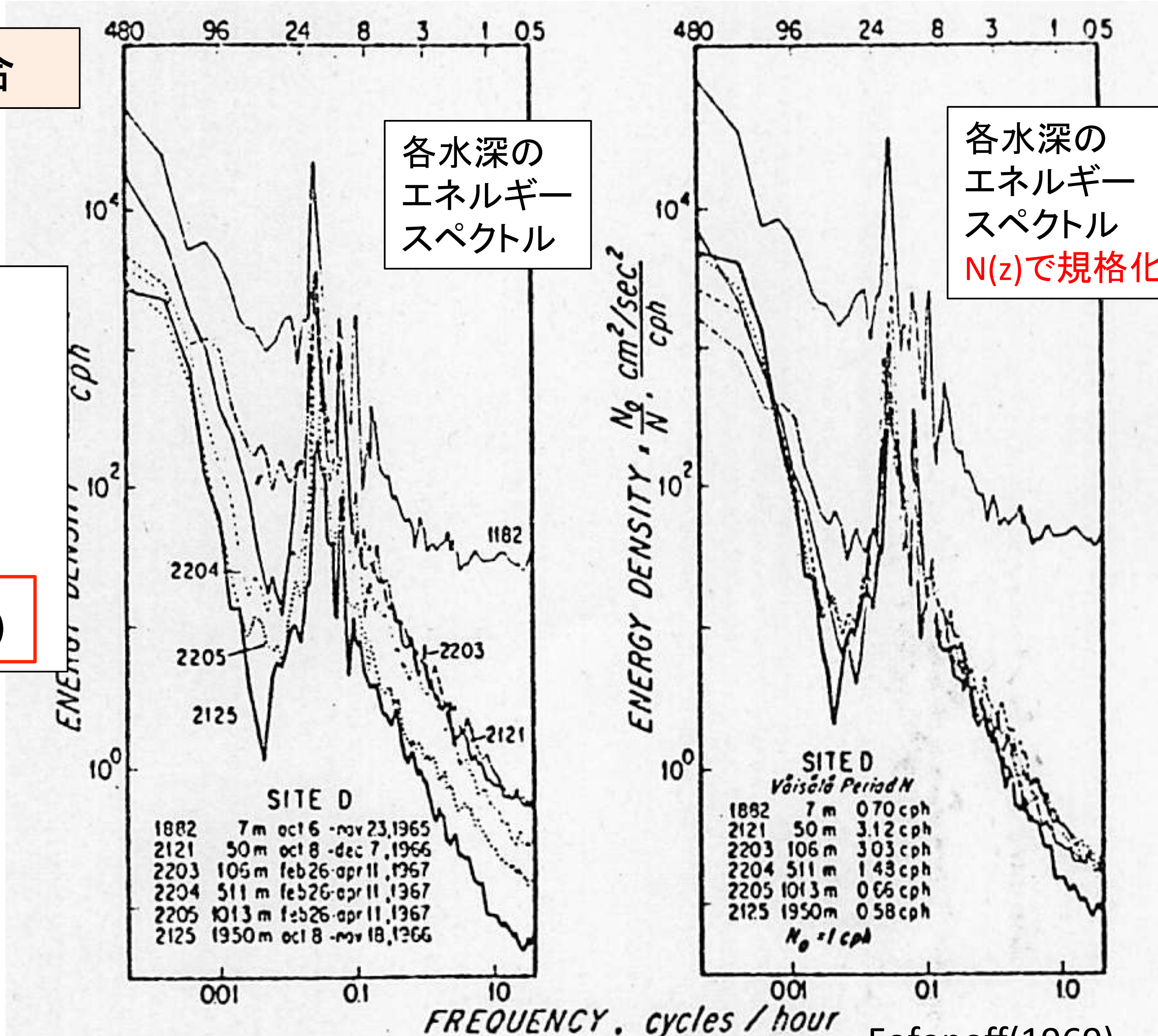
静水圧近似の場合

WKBスケーリング

$$m(z) \propto N(z)$$

$$|\tilde{w}(z)| \propto \frac{1}{\sqrt{N\ (z)}}$$

$$\boxed{E, KE, PE \propto N(z)}$$



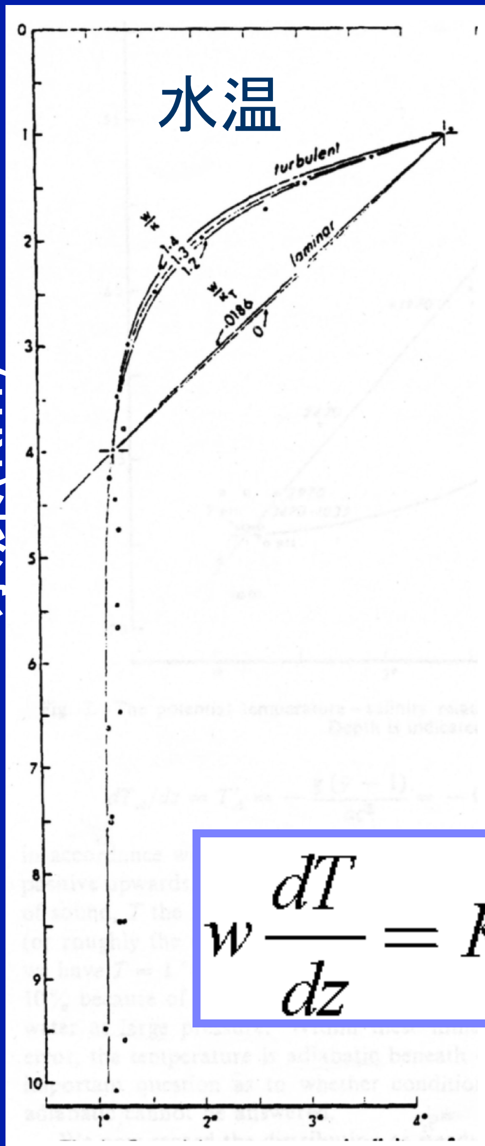
Fofonoff(1969)

·4　D点における観測から得られた，水平流速による運動エネルギーのスペクト
ル（表層と 50 m以深のスペクトルのレベルの違いが明瞭である）。(Fofonoff, 19

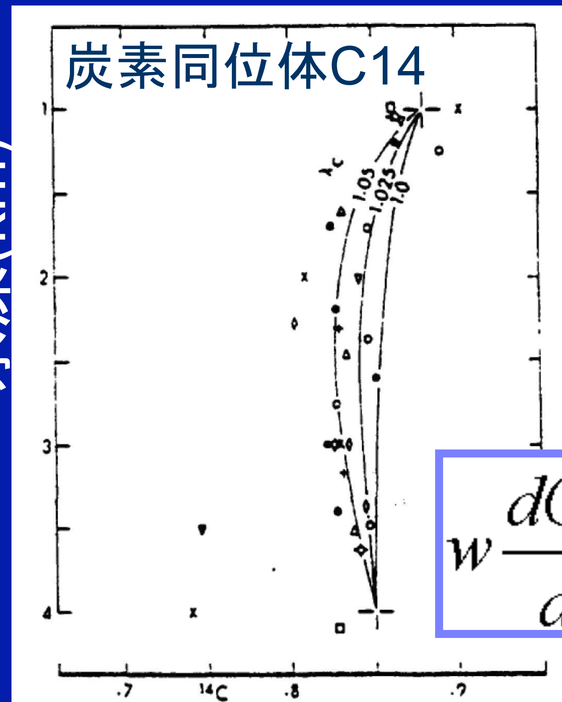
4.内部波の励起　Munk(1966): Abyssal Recipes

水温と炭素同位体の鉛直分布から鉛直乱流混合係数を推定

水深(km)



水深(km)



Kv,w=一定と仮定

$$w\frac{dC^{14}}{dz} = Kv\frac{d^2C^{14}}{dz^2} - \mu C^{14}$$

$$w\frac{dT}{dz} = Kv\frac{d^2T}{dz^2}$$

$$Kv \approx 1\times 10^{-4}\, m^2/s$$

$$w = 1.2cm/day \Rightarrow 20SV$$

全湧昇量

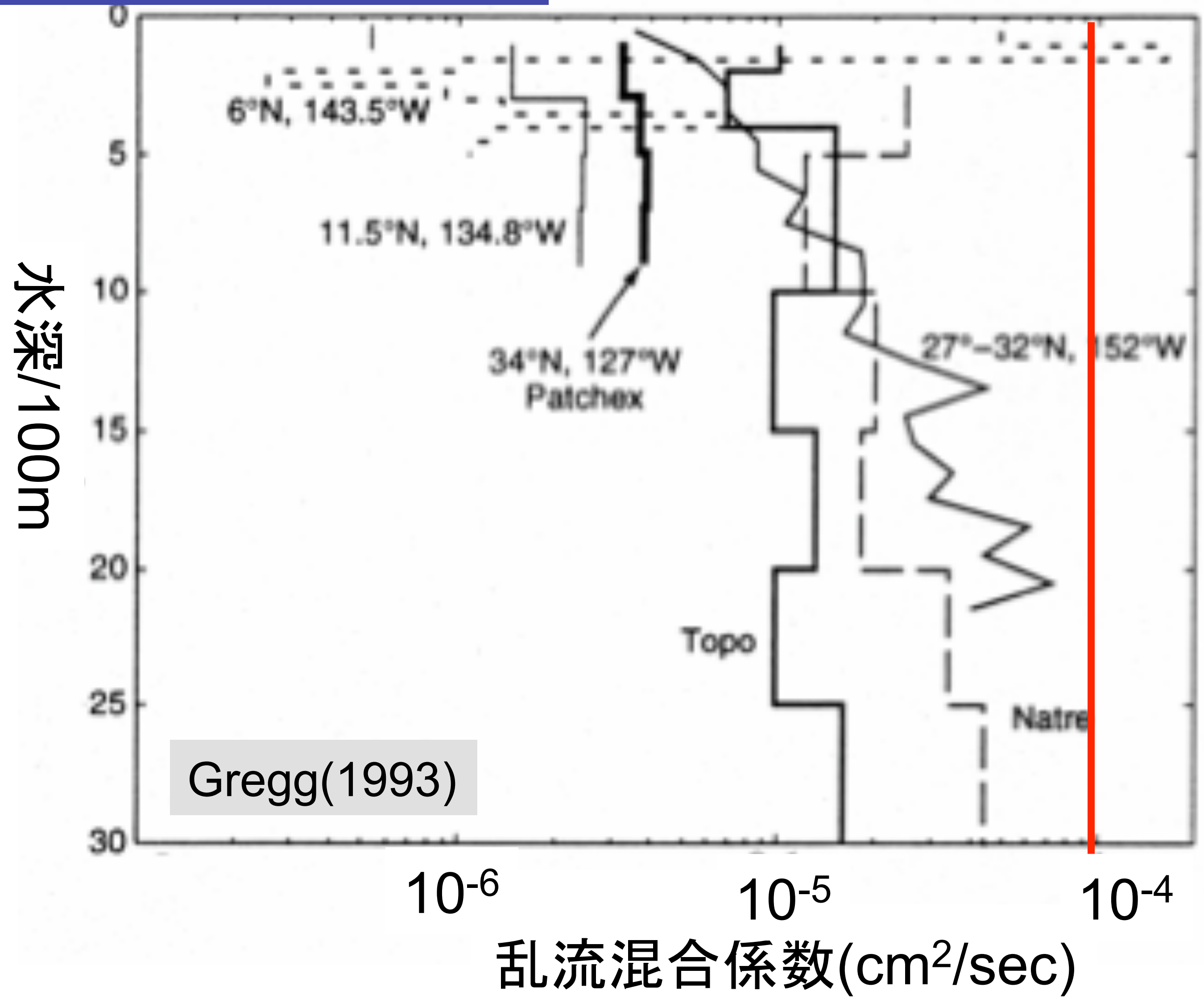
Munk(1966)

1980年代～1990年代前半

深層水を汲み上げるのに必要な
乱流混合係数＝$10^{-4} m^2/s$

Missing Mixing

乱流観測で測定される
乱流混合係数$O(10^{-5}) m^2/s$



1990年代後半～

乱流混合ホットスポットの発見

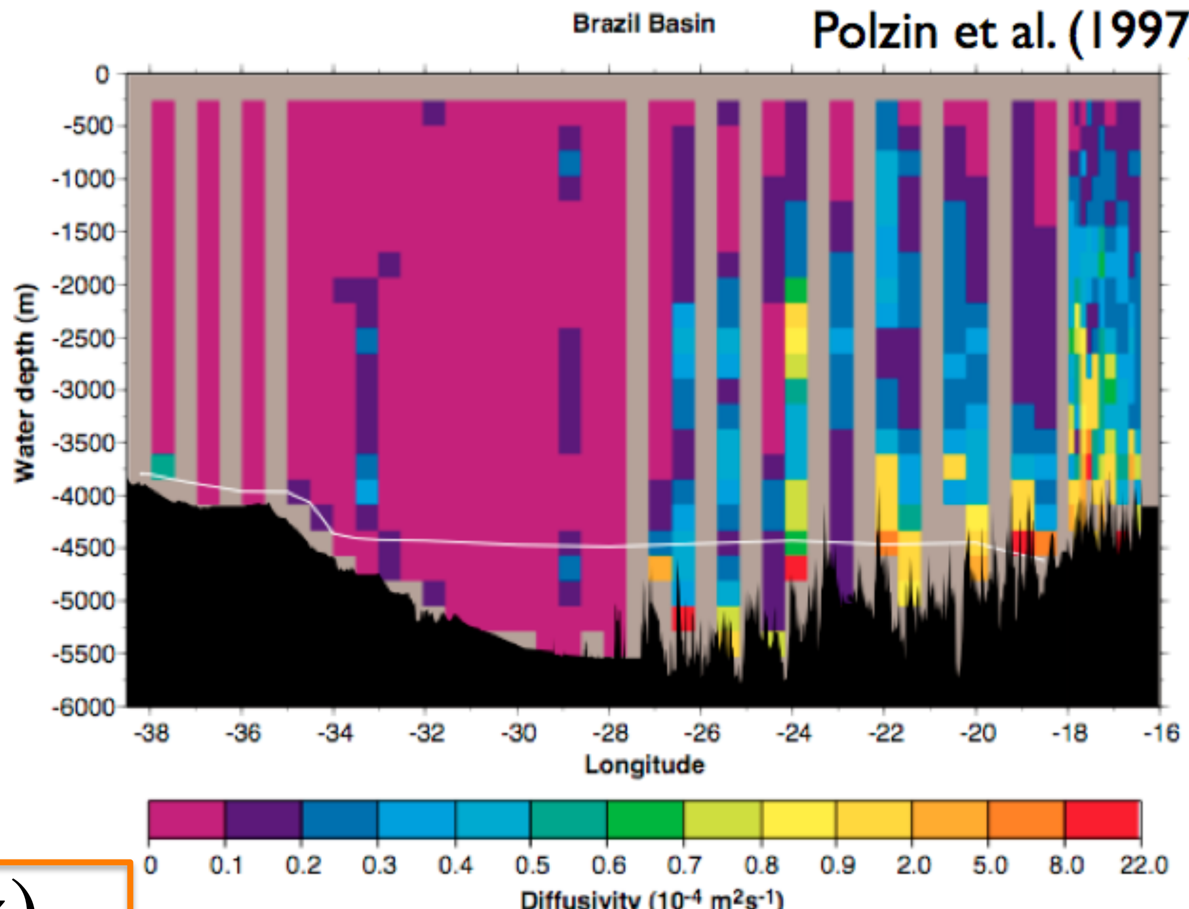
深海乱流観測が可能に

・平坦な海底地形上では

$$K_V = O(10^{-5})m^2s^{-1}$$

・凸凹の海底地形上では

$$K_V = O(10^{-4}) \sim O(10^{-1})m^2s^{-1}$$



Polzin et al.(1997)

乱流拡散係数 $K_V(x,y,z)$

水平的には間欠的に分布、
鉛直的には海底地形からの高さの関数

1990年代後半

Munk &Wunsch (1998) Abyssal Recipes II

空間平均した乱流混合係数 $\overline{K_V(x,y,z)} = O(10^{-4})m^2s^{-1}$

・内部潮汐～0.9TW
・風起源内部波～1.2TW
(大気擾乱、地衡流)

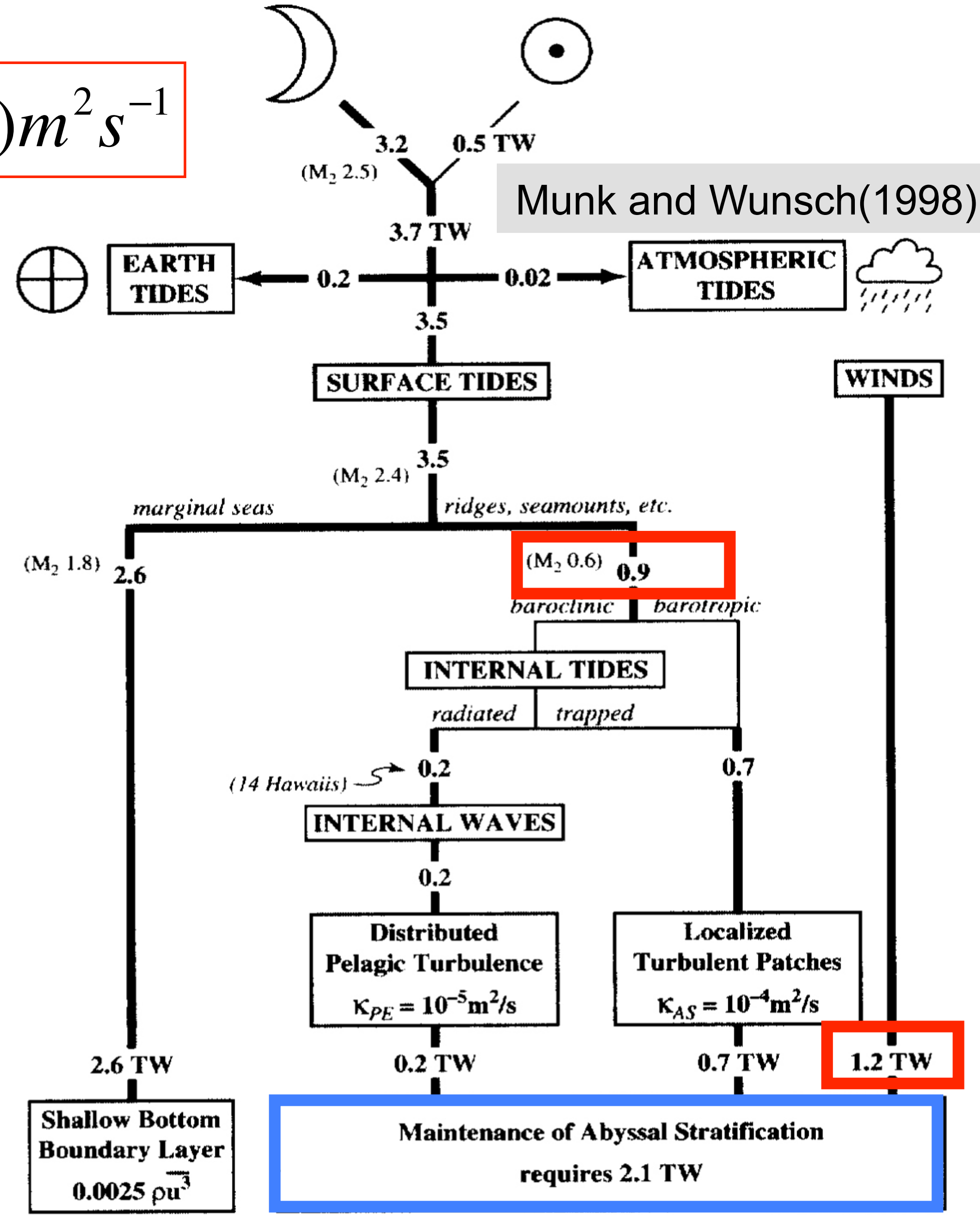
全球平均Kv=$10^{-4}m^2s^{-1}$の乱流混合の維持～2.1TW

90% 1.9TW

0.2TW 10%

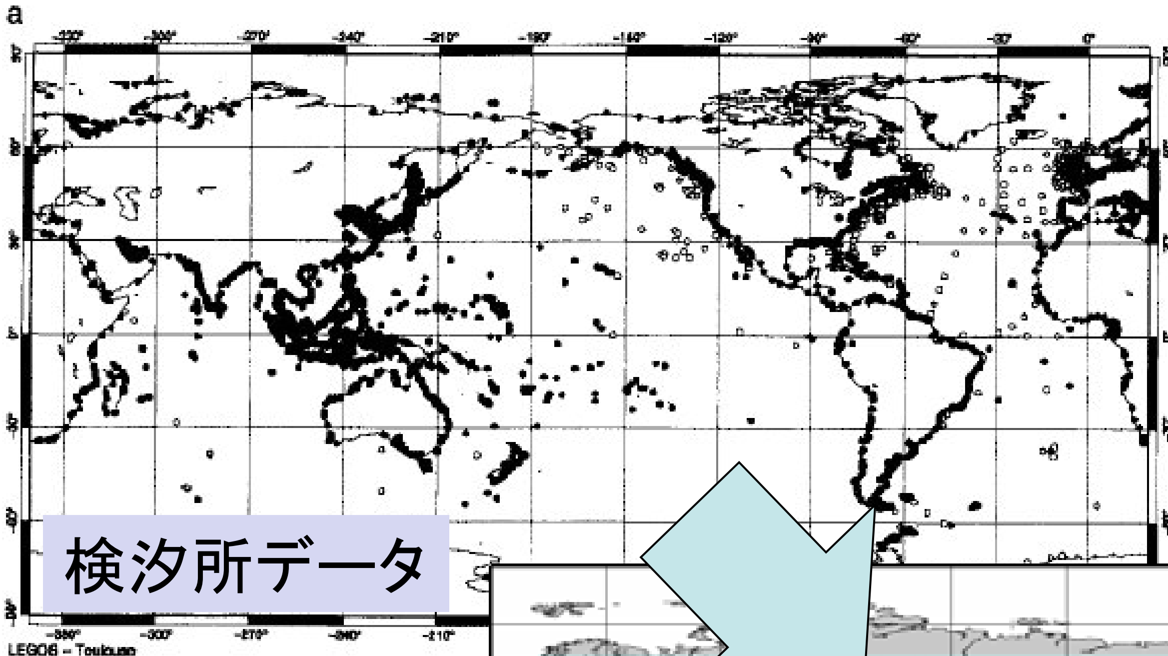
内部波の励起源近傍での乱流混合
Kv=10^{-4} ～ $10^{-1}m^2s^{-1}$

内部波の伝播→励起源から離れた海域での乱流混合
Kv=$10^{-5}m^2s^{-1}$



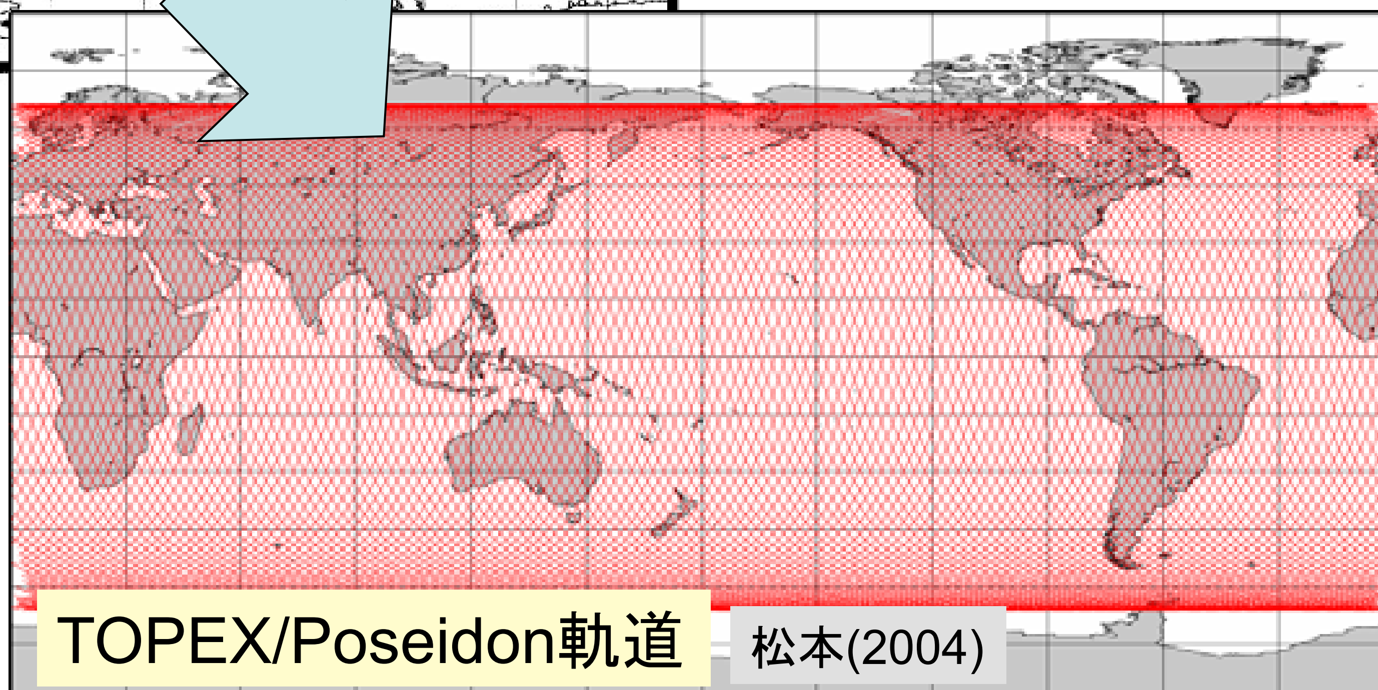
1990年代～

海洋潮汐データの高精度化



Schwiderski(1980)

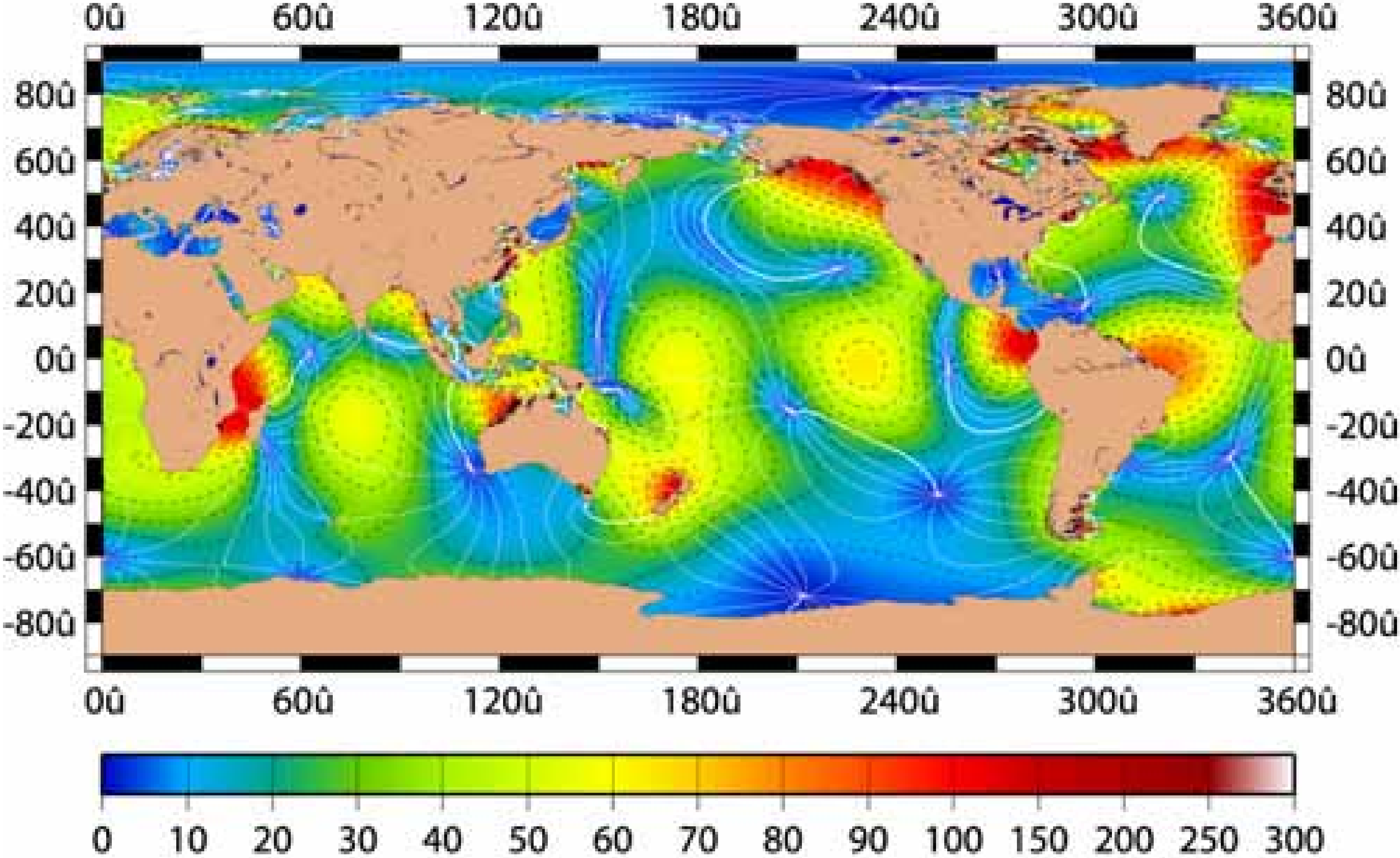
1992年
海面高度計衛星
TOPEX/Poseidon
の打ち上げ



松本(2004)

TOPEX/Poseidon海面高度データの同化により求められた M_2半日分潮の海面変位

Matsumoto et al.(2000)



・バロトロピック潮汐方程式

起潮力ポテンシャル

$$\frac{\partial U}{\partial t} = +fV - g\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + D_x$$

消散項

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -fU - g\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + D_y$$

消散項

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -(\frac{\partial UH}{\partial y} + \frac{\partial VH}{\partial y})$$

・エネルギー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(U^2+V^2\right)H + \frac{1}{2}g\eta^2\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(g\eta UH) - \frac{\partial}{\partial y}(g\eta VH) - \frac{\partial}{\partial x}(\Phi UH) - \frac{\partial}{\partial y}(\Phi VH) - \Phi\frac{\partial \eta}{\partial t} + UHD_x + VHD_y$$

全海洋で積分＋時間平均

$$-\iint_{global} \overline{\Phi\frac{\partial \eta}{\partial t}}dxdy \quad \text{全潮汐エネルギー生成}$$

$$= -\iint_{global} \left(\overline{UHD_x + VHD_y}\right)dx\,dy$$

全潮汐エネルギー消散

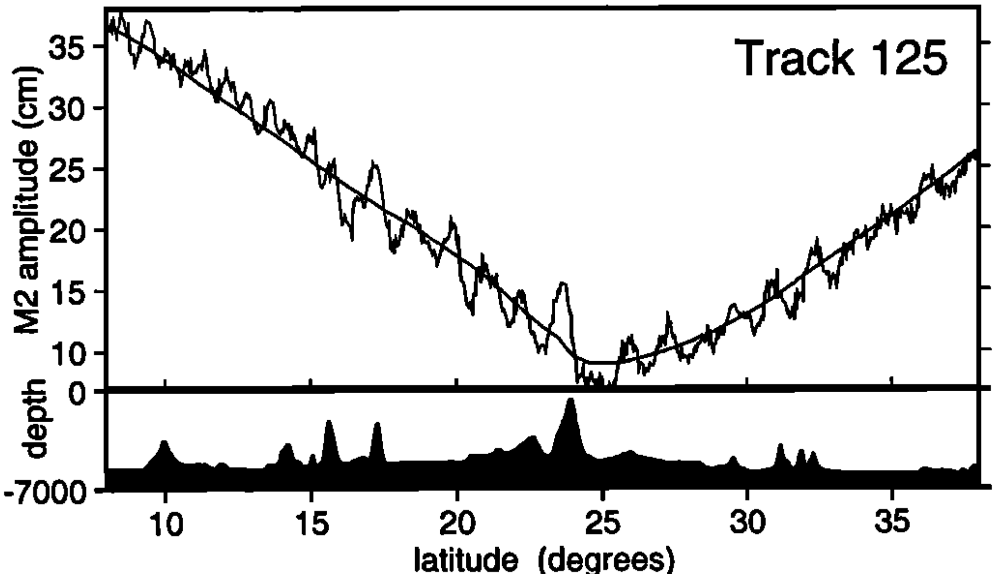
バロトロピック潮汐海面変位η
と起潮力ポテンシャルΦの情報

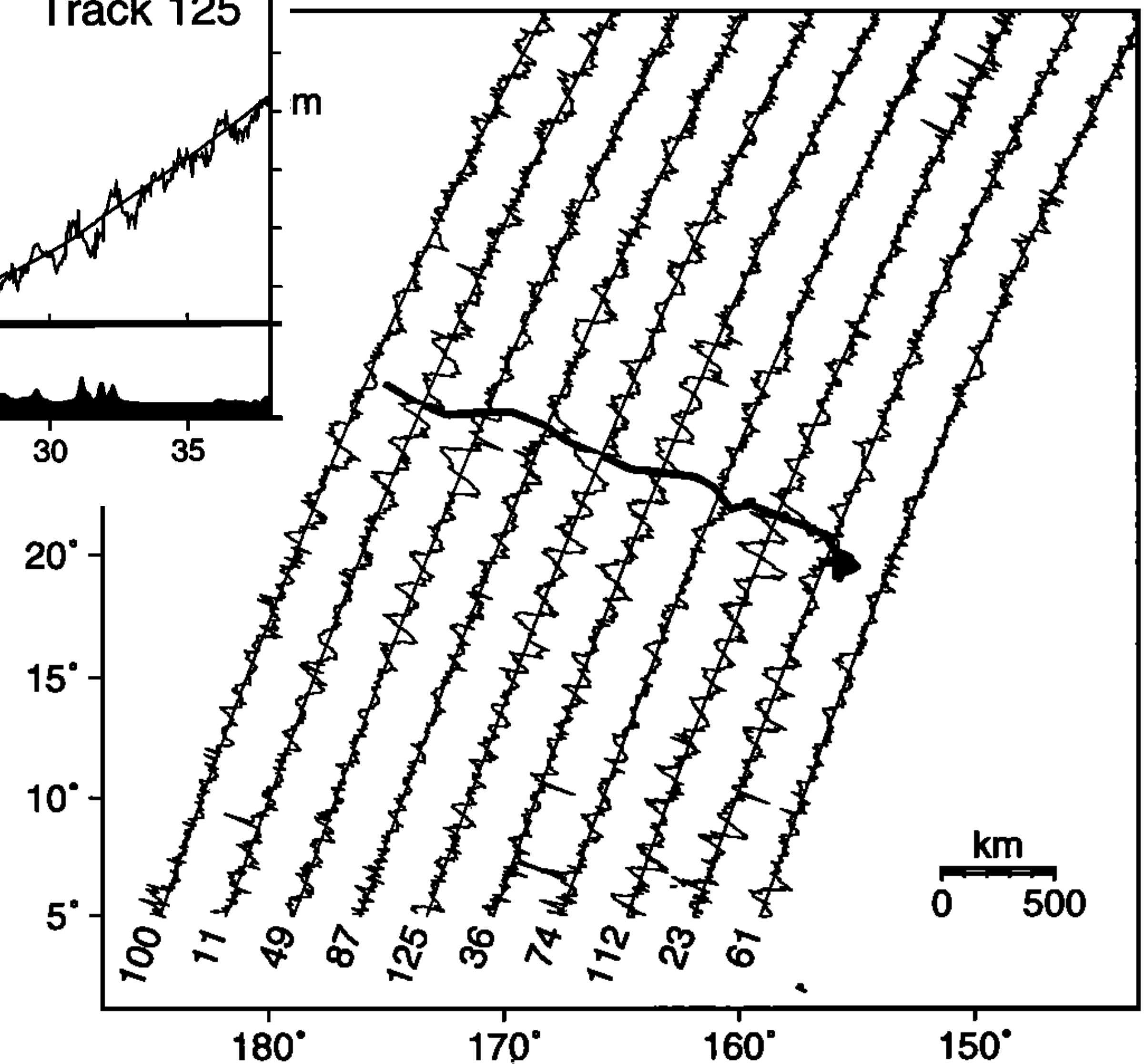
全潮汐エネルギーの生成率

の見積もり＝3.5TW

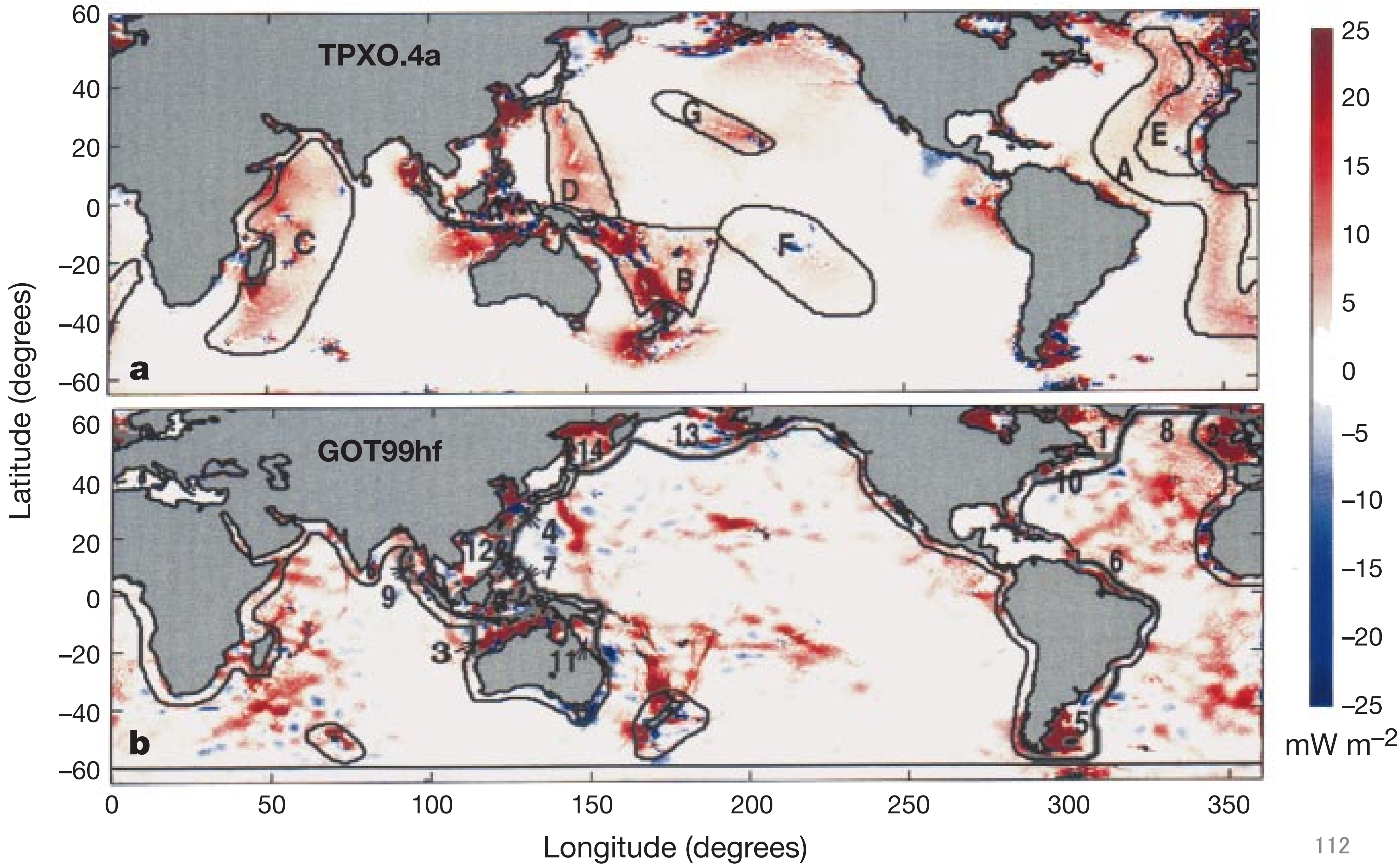
TOPEX/Poseidon海面高度計により観測されたハワイ海嶺起源のM_2 内部潮汐波

Ray and Mitchum(1996)





TOPEX/Poseidonデータの同化シミュレーションの結果から推定したバロトロピック潮汐エネルギー消散率 Egbert and Ray(2001)



太平洋の内部潮汐波の数値シミュレーション

Niwa and Hibiya(2001)

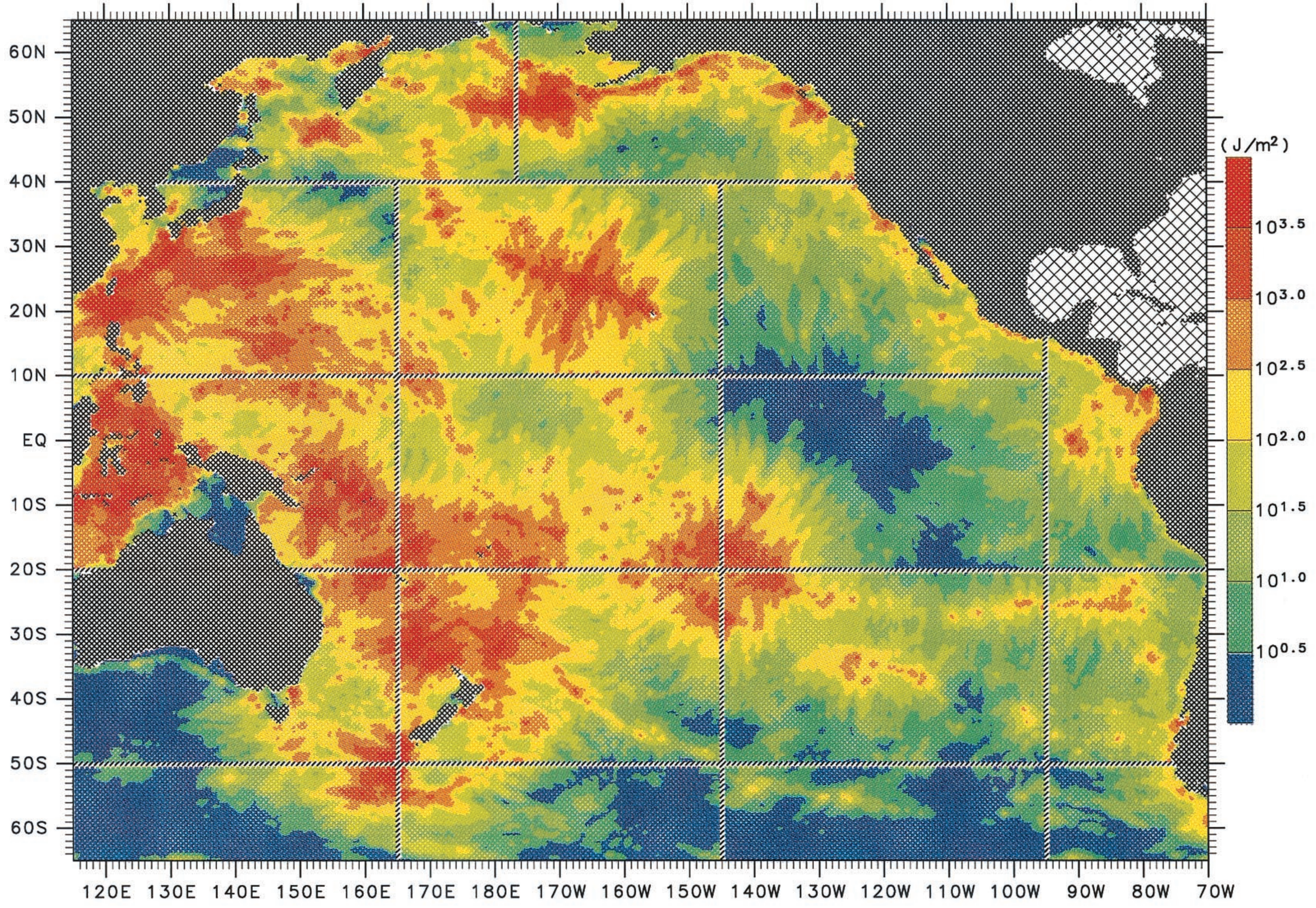
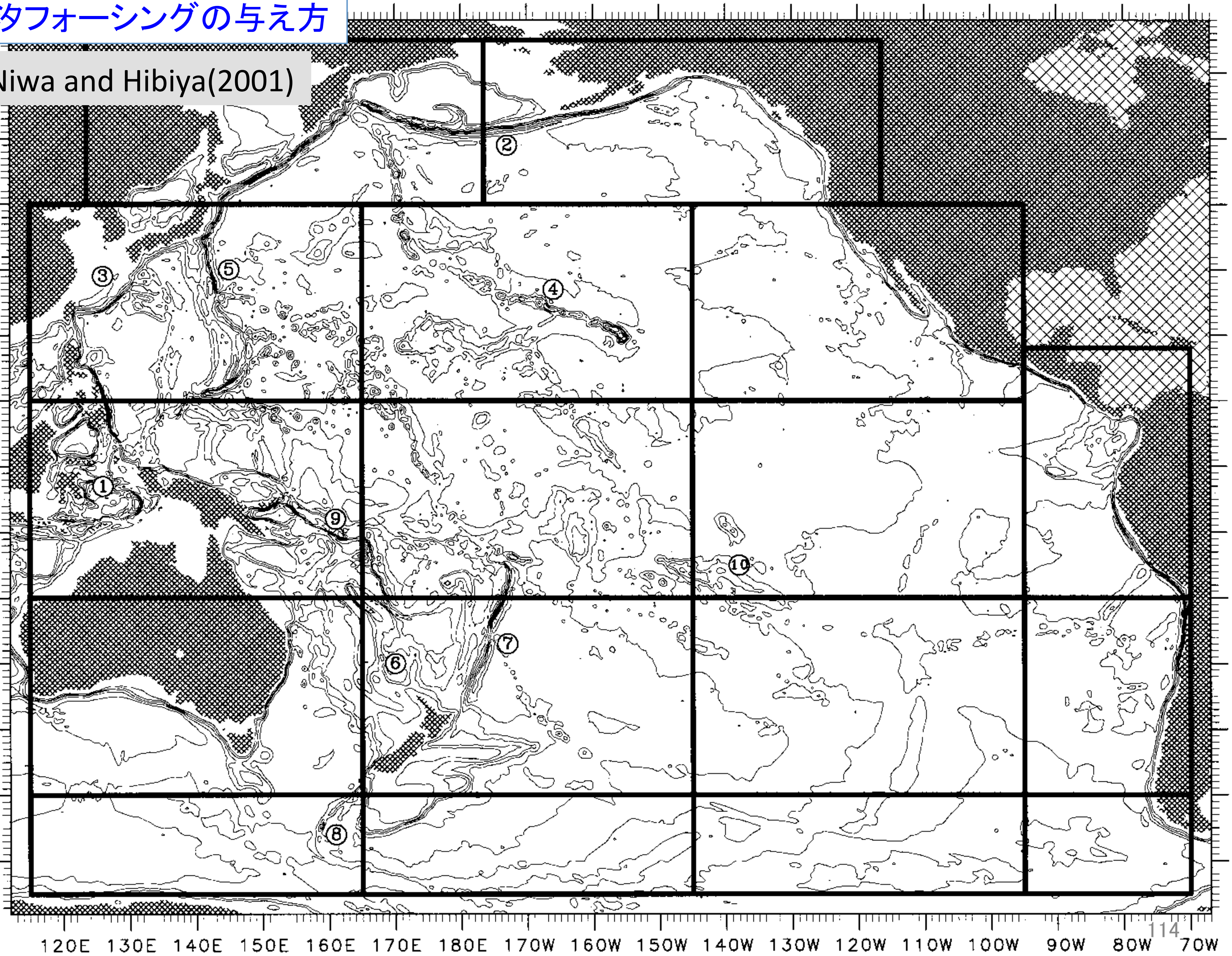


Plate 2. Model-predicted distribution of the depth-integrated kinetic energy of the M_2 internal tide.

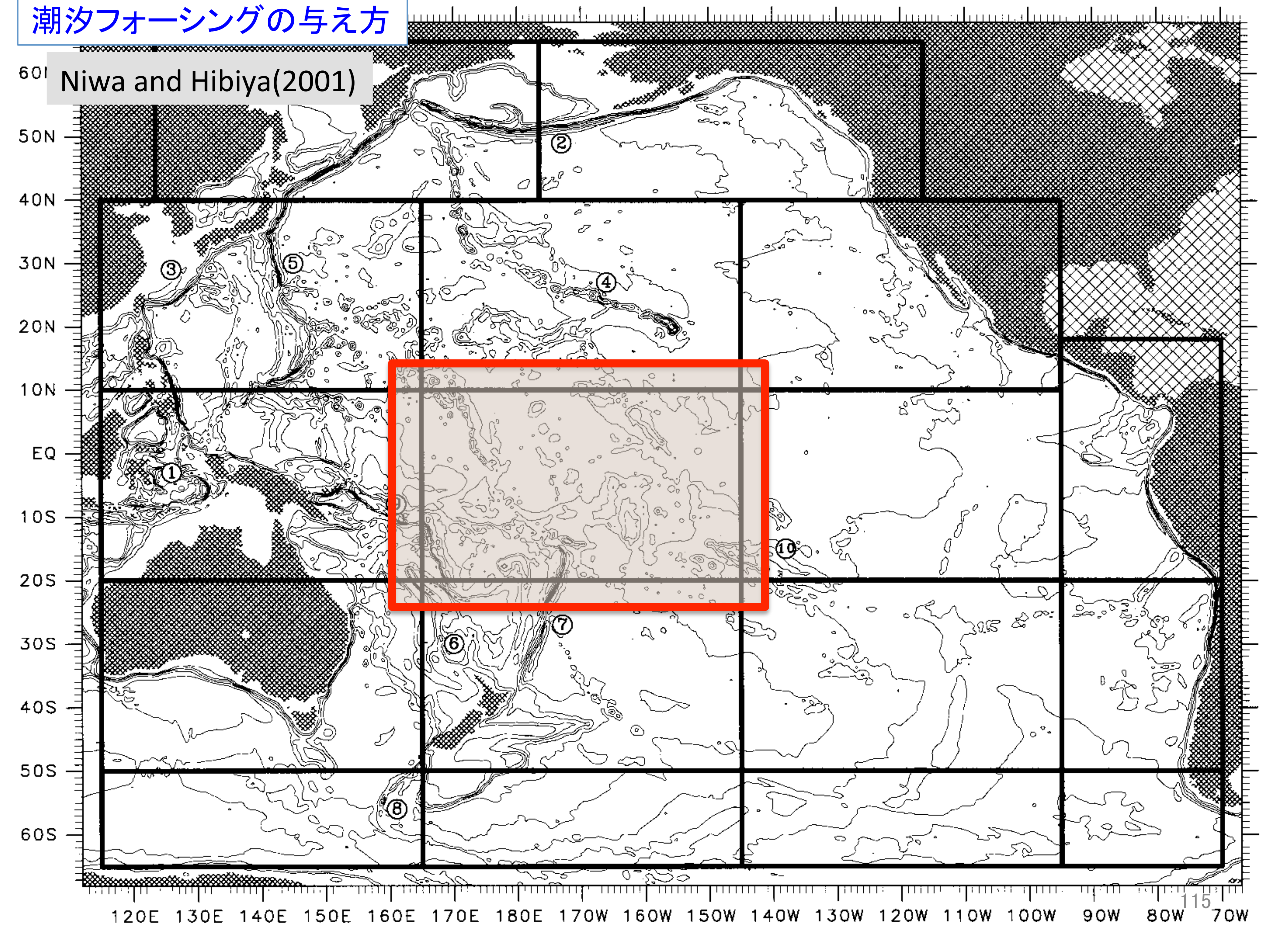
潮汐フォーシングの与え方

Niwa and Hibiya(2001)



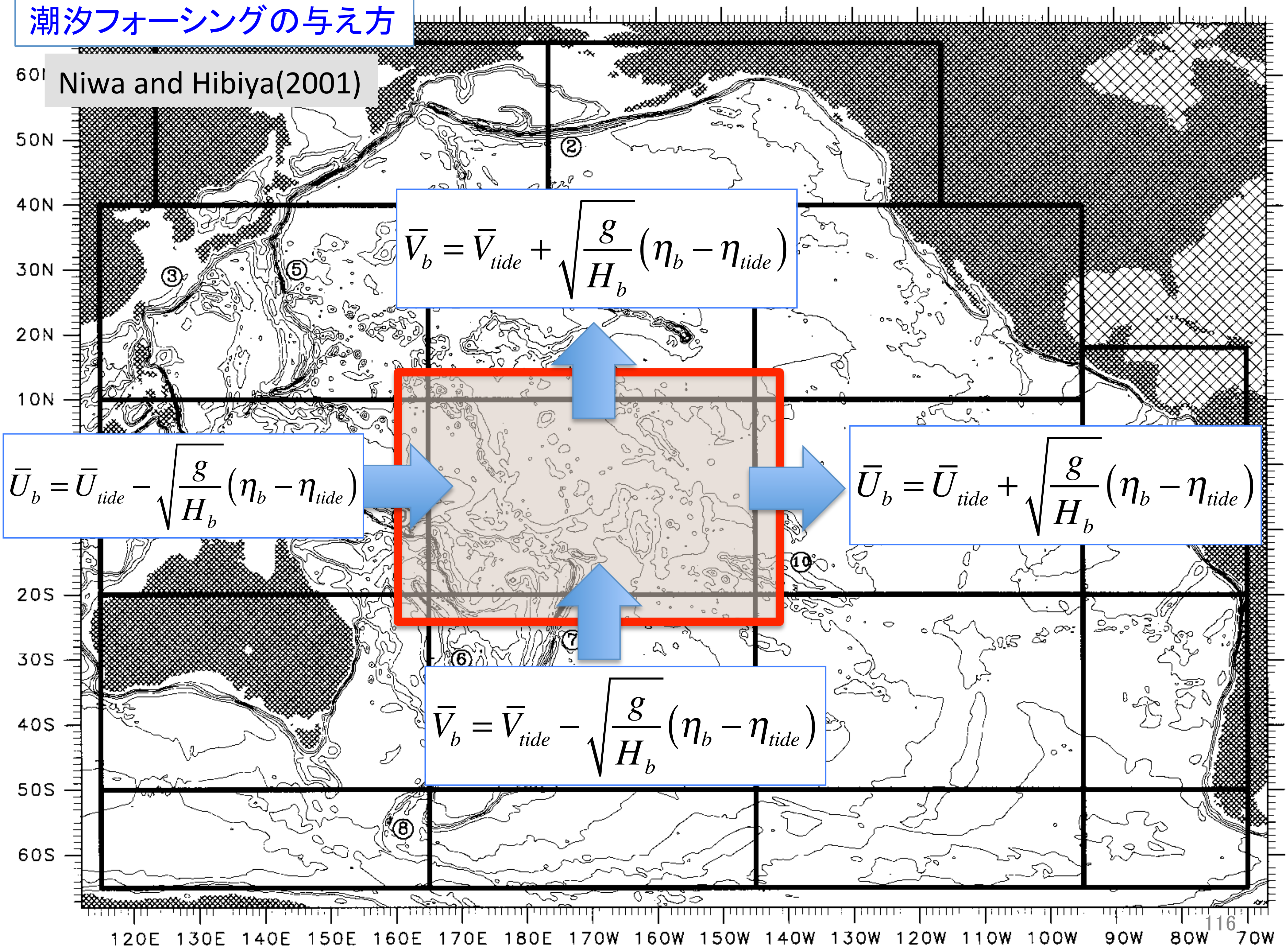
潮汐フォーシングの与え方

Niwa and Hibiya(2001)



潮汐フォーシングの与え方

Niwa and Hibiya(2001)



$$\bar{V}_b = \bar{V}_{tide} + \sqrt{\frac{g}{H_b}}(\eta_b - \eta_{tide})$$

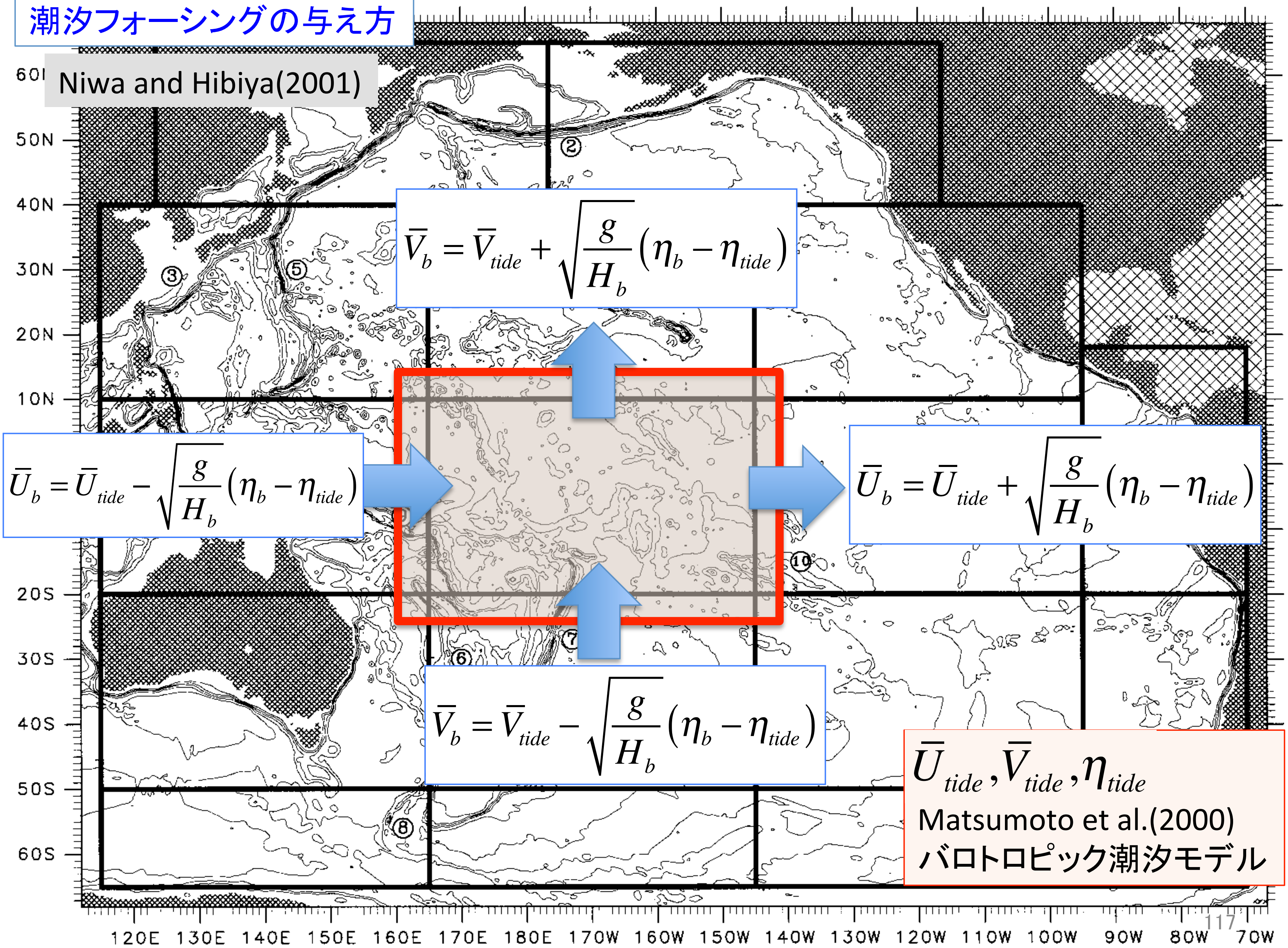
$$\bar{U}_b = \bar{U}_{tide} - \sqrt{\frac{g}{H_b}}(\eta_b - \eta_{tide})$$

$$\bar{U}_b = \bar{U}_{tide} + \sqrt{\frac{g}{H_b}}(\eta_b - \eta_{tide})$$

$$\bar{V}_b = \bar{V}_{tide} - \sqrt{\frac{g}{H_b}}(\eta_b - \eta_{tide})$$

潮汐フォーシングの与え方

Niwa and Hibiya(2001)



$$\bar{V}_b = \bar{V}_{tide} + \sqrt{\frac{g}{H_b}}(\eta_b - \eta_{tide})$$

$$\bar{U}_b = \bar{U}_{tide} - \sqrt{\frac{g}{H_b}}(\eta_b - \eta_{tide})$$

$$\bar{U}_b = \bar{U}_{tide} + \sqrt{\frac{g}{H_b}}(\eta_b - \eta_{tide})$$

$$\bar{V}_b = \bar{V}_{tide} - \sqrt{\frac{g}{H_b}}(\eta_b - \eta_{tide})$$

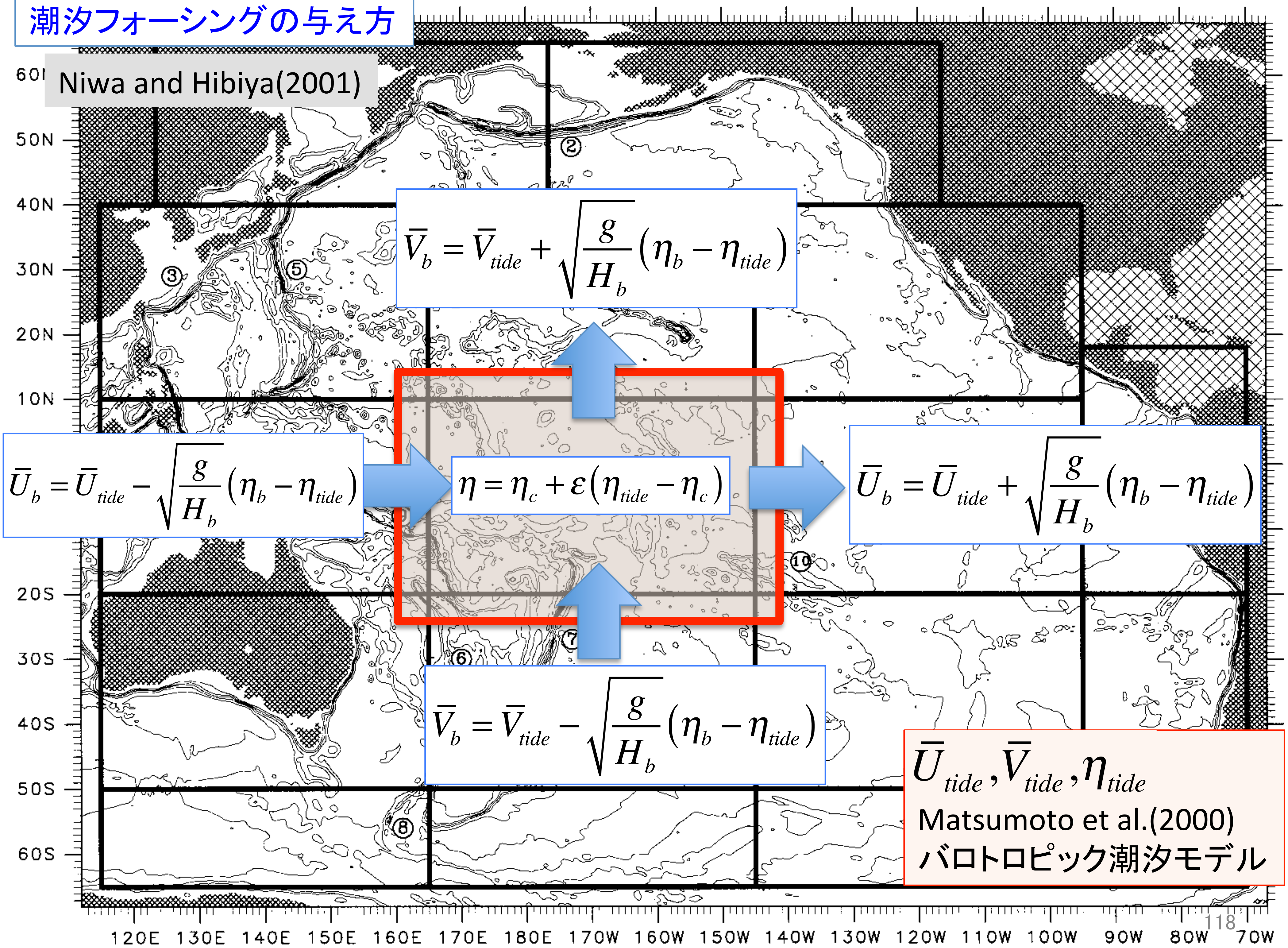
$\bar{U}_{tide}, \bar{V}_{tide}, \eta_{tide}$

Matsumoto et al.(2000)

バロトロピック潮汐モデル

潮汐フォーシングの与え方

Niwa and Hibiya(2001)



$$\bar{V}_b = \bar{V}_{tide} + \sqrt{\frac{g}{H_b}}\left(\eta_b - \eta_{tide}\right)$$

$$\bar{U}_b = \bar{U}_{tide} - \sqrt{\frac{g}{H_b}}\left(\eta_b - \eta_{tide}\right)$$

$$\eta = \eta_c + \varepsilon\left(\eta_{tide} - \eta_c\right)$$

$$\bar{U}_b = \bar{U}_{tide} + \sqrt{\frac{g}{H_b}}\left(\eta_b - \eta_{tide}\right)$$

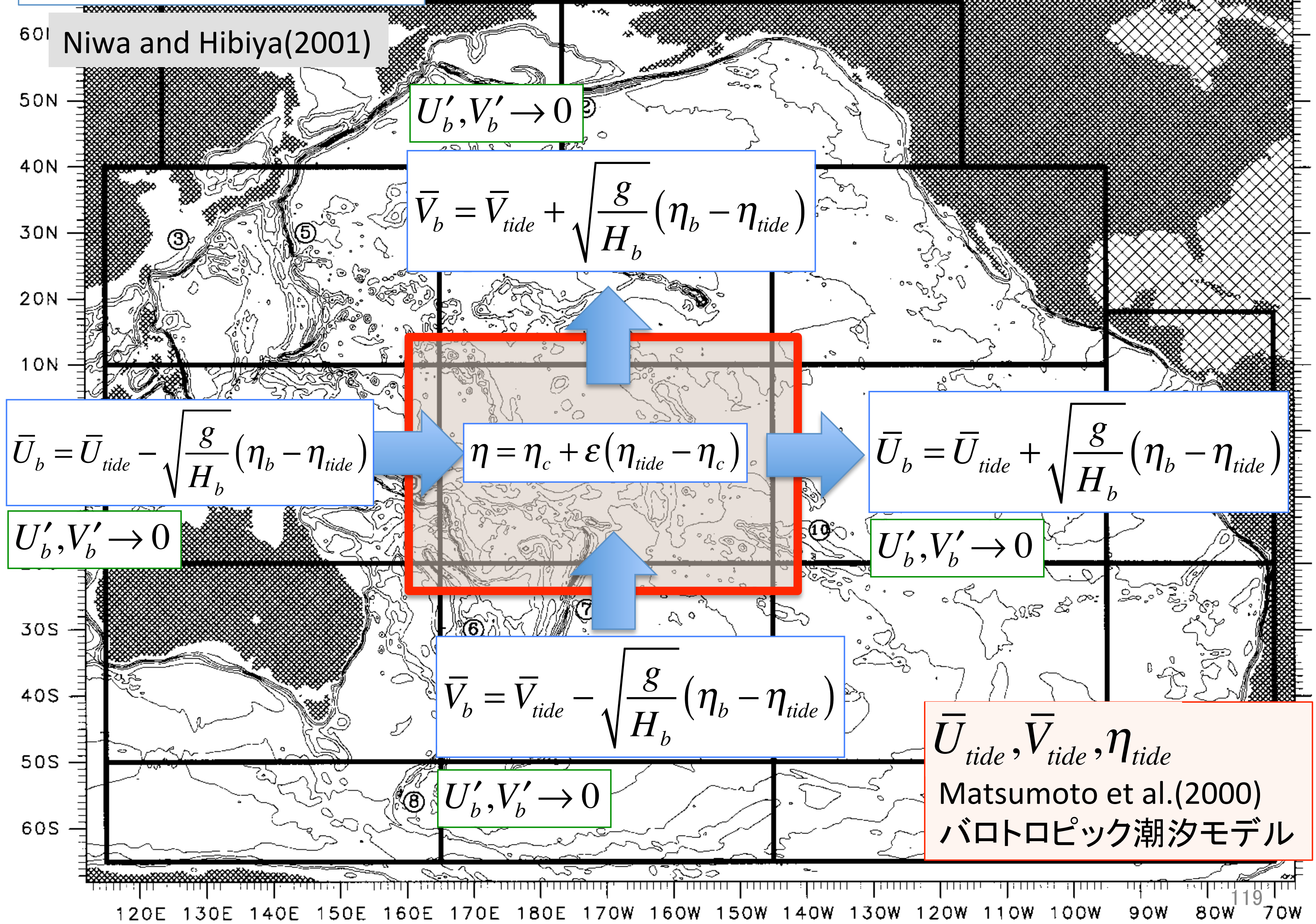
$$\bar{V}_b = \bar{V}_{tide} - \sqrt{\frac{g}{H_b}}\left(\eta_b - \eta_{tide}\right)$$

$\bar{U}_{tide}, \bar{V}_{tide}, \eta_{tide}$

Matsumoto et al.(2000)

バロトロピック潮汐モデル

潮汐フォーシングの与え方



数値シミュレーションで再現された内部潮汐波と海面高度計観測との比較

細線：TOPEX/Poseidon海面高度計衛星による観測　　太線：数値シミュレーション

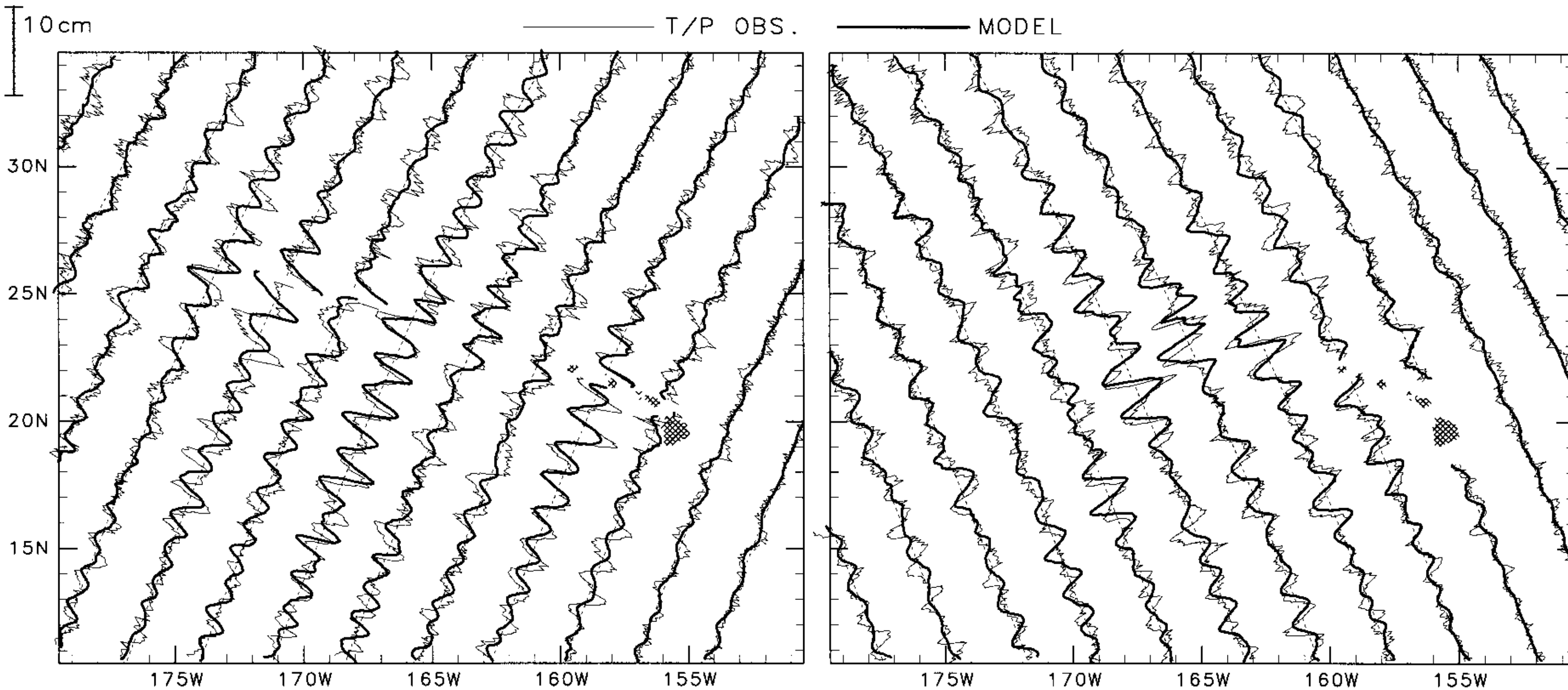


Figure 3. High-pass–filtered amplitudes of the M_2 tidal surface elevation along the TOPEX/Poseidon (left) ascending and (right) descending ground tracks over the Hawaiian Ridge obtained from the baroclinic simulation (thick solid lines) and from the TOPEX/Poseidon altimetric observation (thin solid lines).

Niwa and Hibiya(2001)

エネルギー方程式

☆内部潮汐エネルギー

$$\frac{\partial \bar{E}_{bc} D}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\overline{P'U'}D\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\overline{P'V'}D\right\} + g\underline{\overline{\rho' W_{bt}}D} + Advect_{bc} + Dissip_{bc}$$

☆バロトロピック潮汐エネルギー

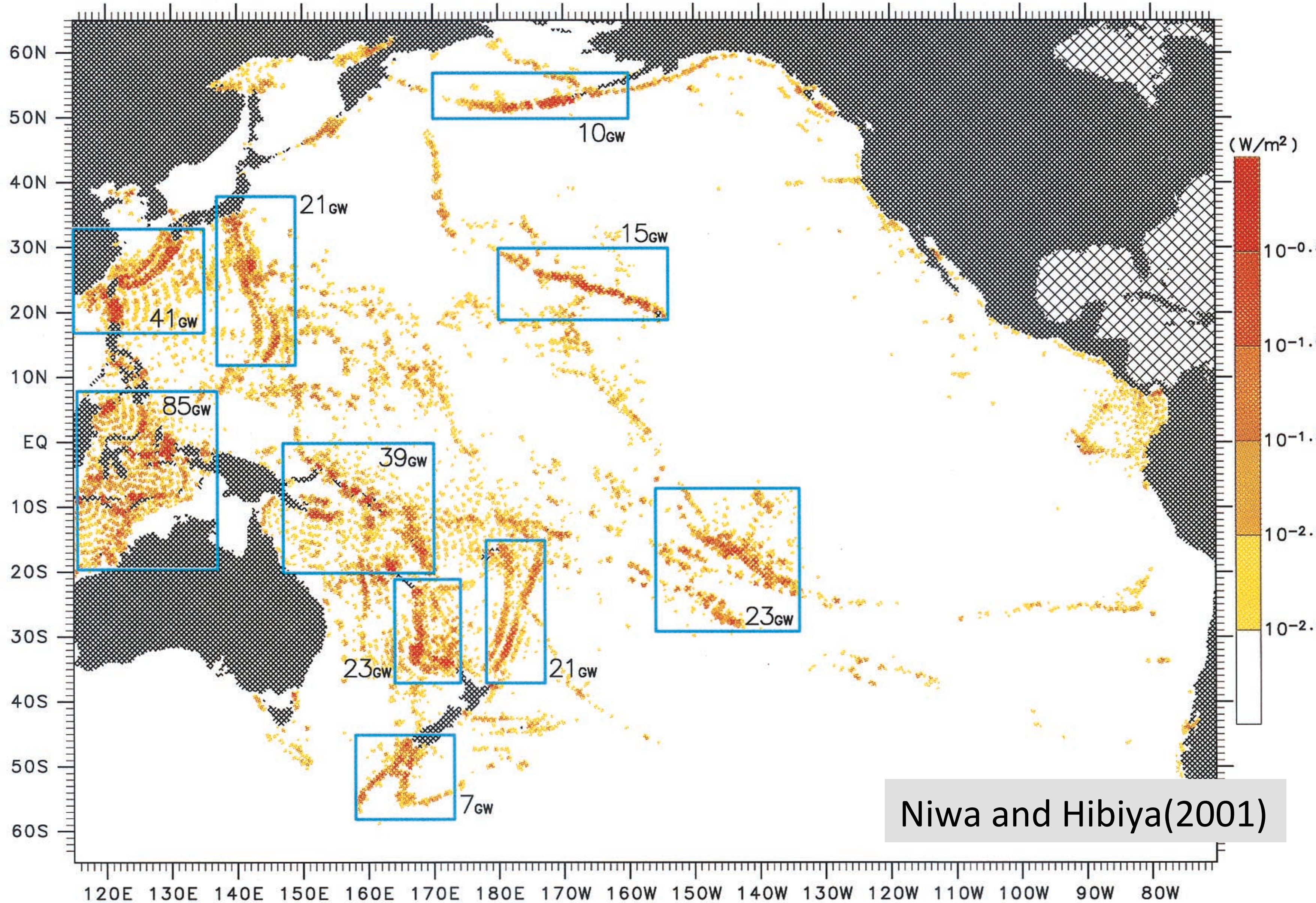
$$\frac{\partial \bar{E}_{bt} D}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\bar{\rho}_0 g(\eta - \xi) + \bar{P}')\bar{U}D\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{(\rho_0 g(\eta - \xi) + \bar{P}')\bar{V}D\right\} - \underline{g\overline{\rho' W_{bt}}D}$$
$$+\bar{\rho}_0 g \xi \frac{\partial \eta}{\partial t} + Advect_{bt} + Dissip_{bt}$$

☆バロトロピック潮汐から内部潮汐へのエネルギー転嫁率

$$\boldsymbol{Conv} = \underline{g\overline{\rho' W_{bt}}D}$$ (W_{bt} ：バロトロピック潮汐鉛直流)

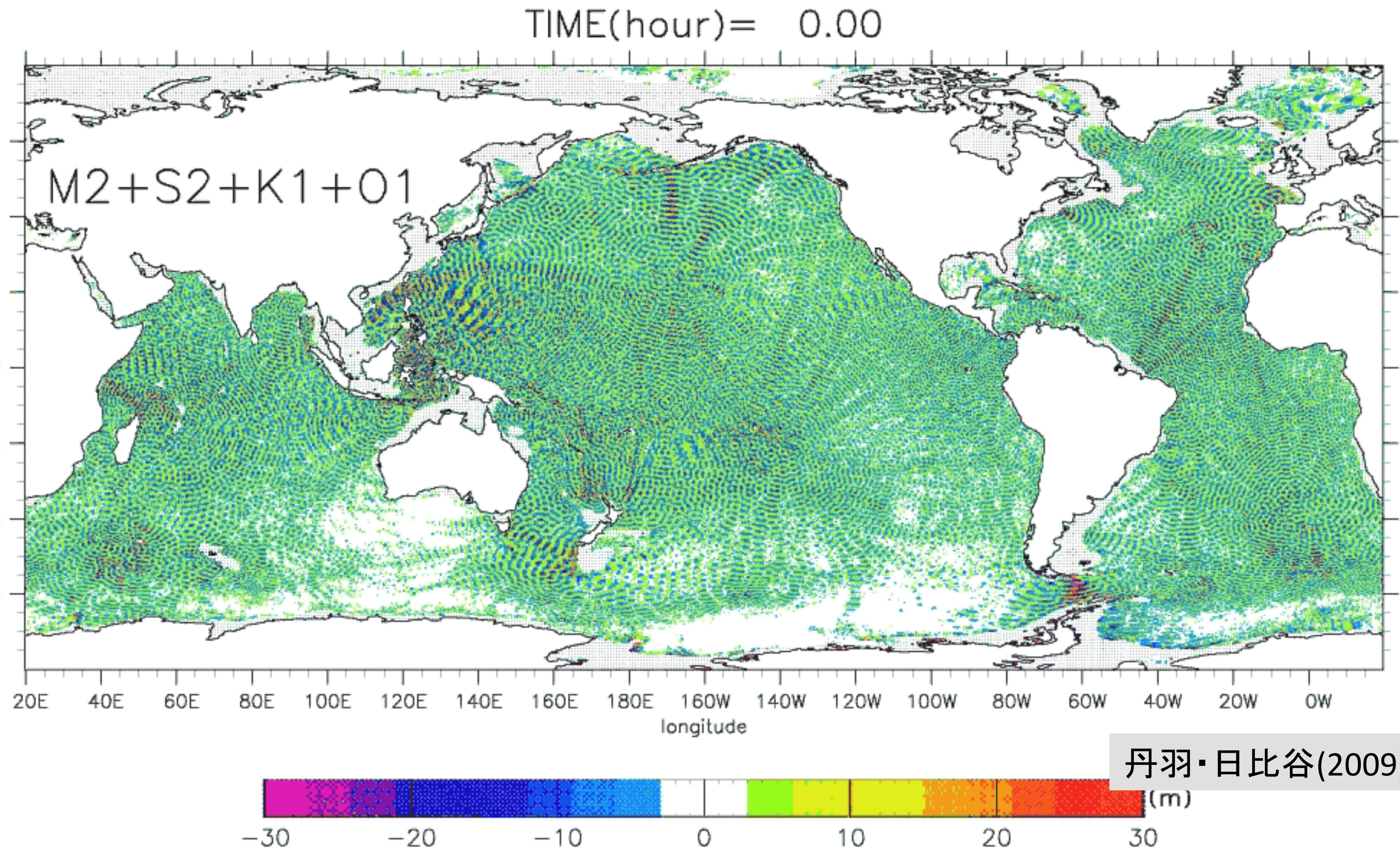
$$= g\rho' \overline{\left\{\bar{U}\left(\frac{z-\eta}{\eta+H}\right)\frac{\partial H}{\partial x} + \bar{V}\left(\frac{z-\eta}{\eta+H}\right)\frac{\partial H}{\partial y} + \left(\frac{z+H}{\eta+H}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\}}$$

バロトロピック潮汐から内部潮汐波へのエネルギー転嫁率



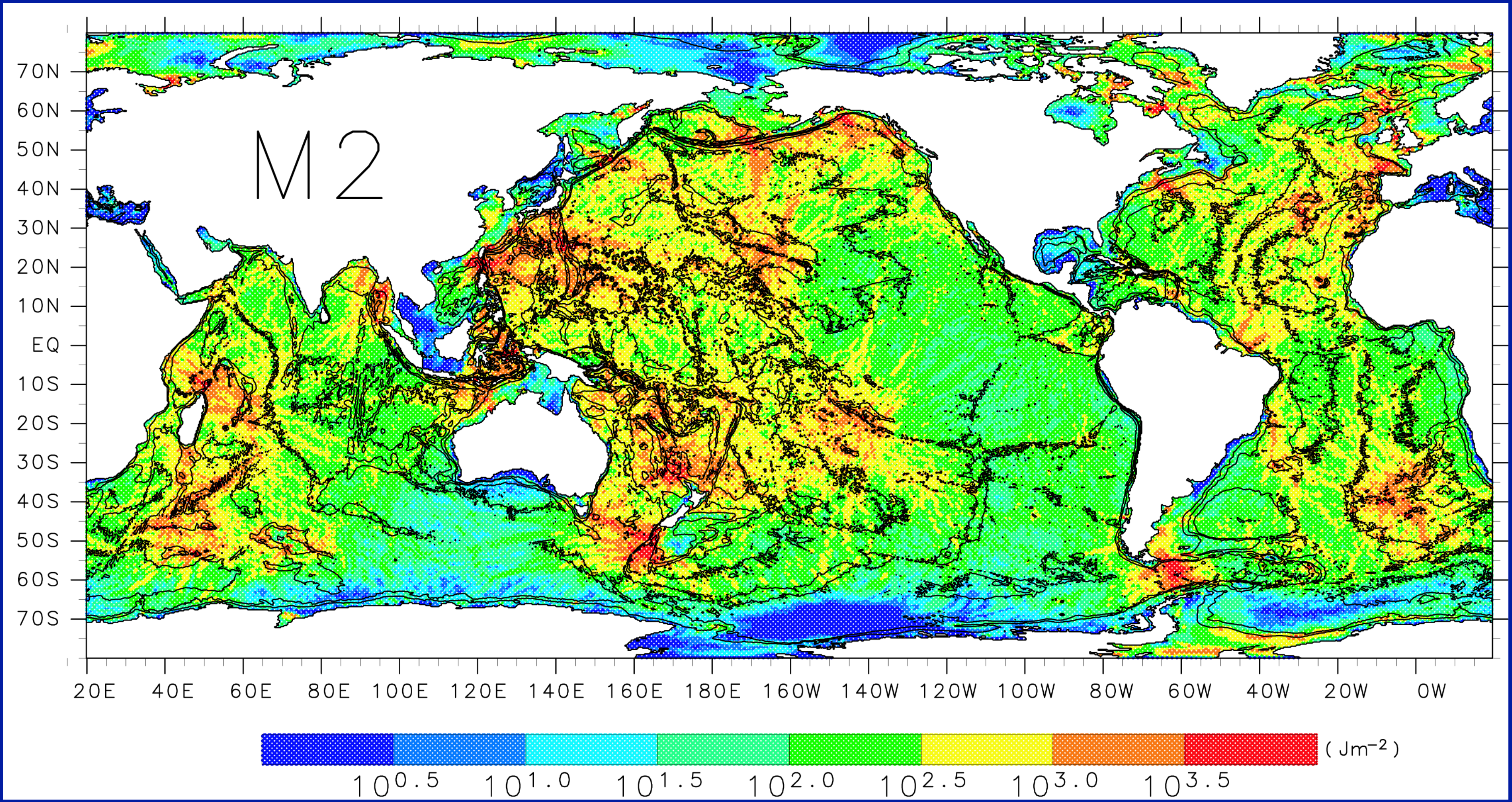
Niwa and Hibiya(2001)

数値シミュレーションにより再現された内部潮汐波
～水深1000mにおける鉛直変位～



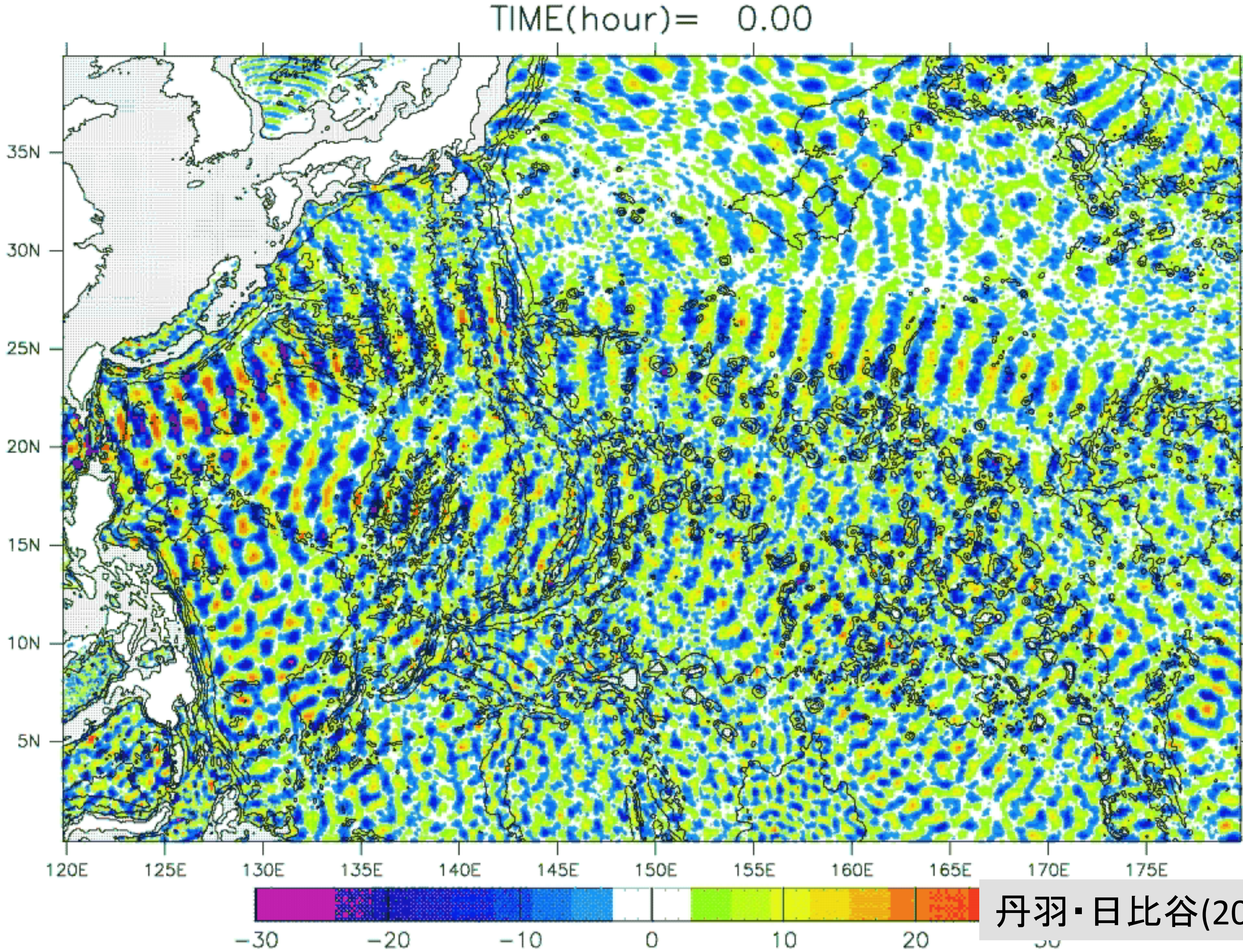
丹羽・日比谷(2009)

３次元数値シミュレーション（水平グリッド1/15°）で得られた半日周期M_2内部潮汐波の運動エネルギー分布（鉛直積分）



Niwa and Hibiya(2011))

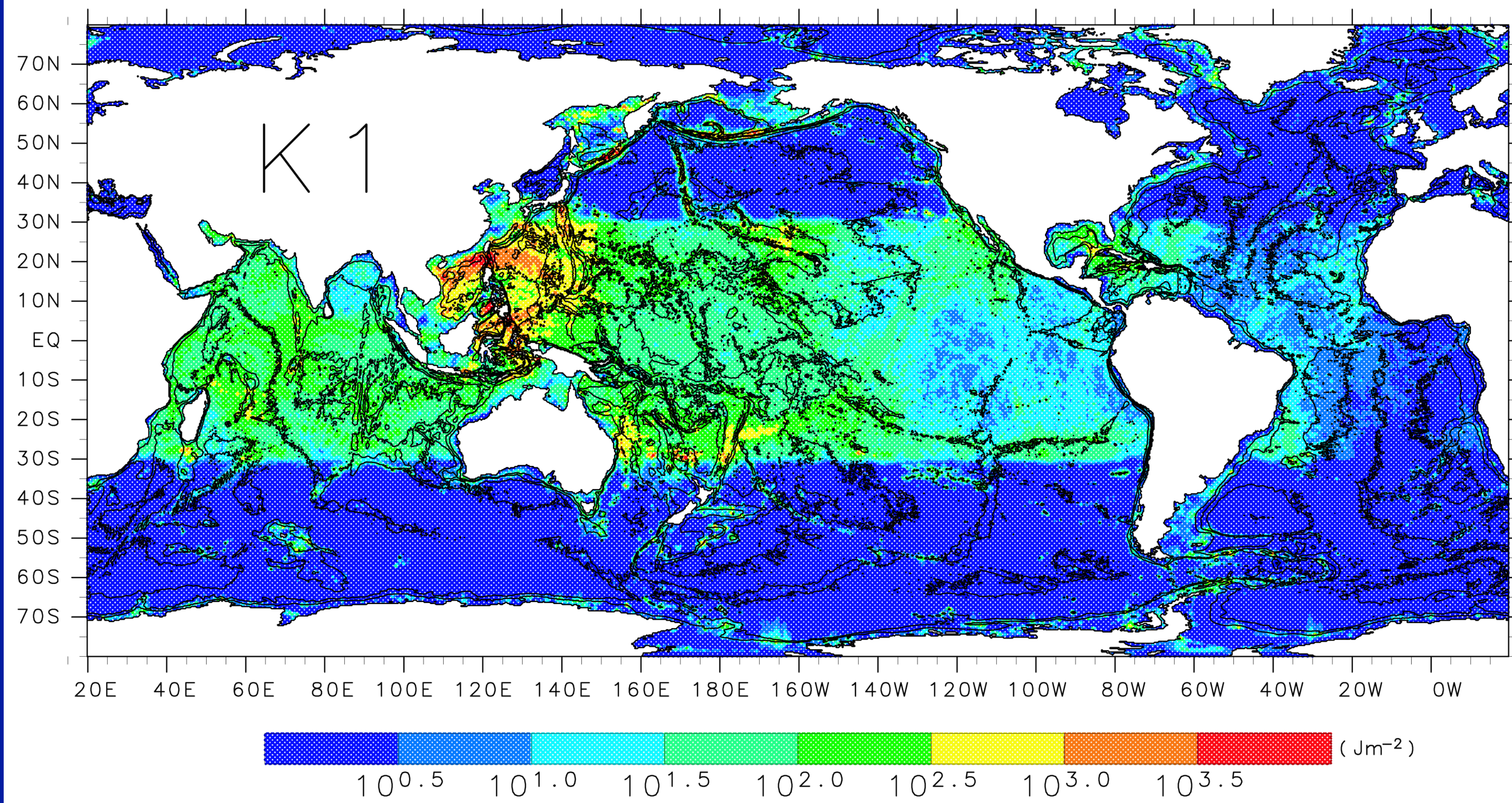
半日周期M_2+S_2内部潮汐波(水深1000mの鉛直変位）



丹羽･日比谷(2009)

３次元数値シミュレーション（水平グリッド1/15°）で得られた日周期K_1内部潮汐波の運動エネルギー分布

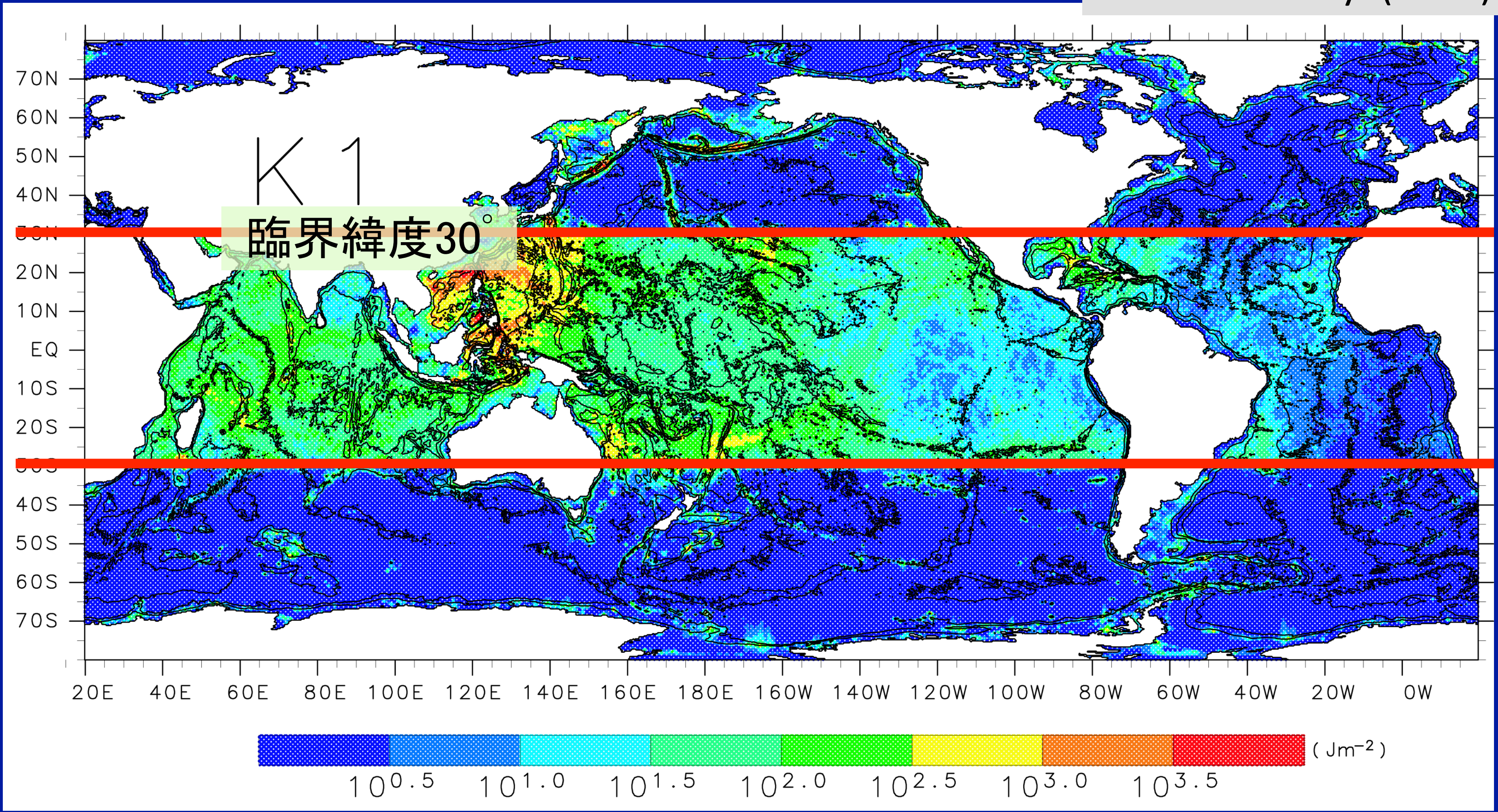
Niwa and Hibiya(2011)



- 日周潮汐周期(約24時間)の臨界緯度30° [ω_{K1}=f(30°)]
- 臨界緯度より低緯度(ω_{tide}<f) ⇒自由伝播できる内部潮汐波が存在
- 臨界緯度より高緯度(ω_{tide}<f) ⇒自由伝播不可。地形捕捉波として存在（Kelvin波）

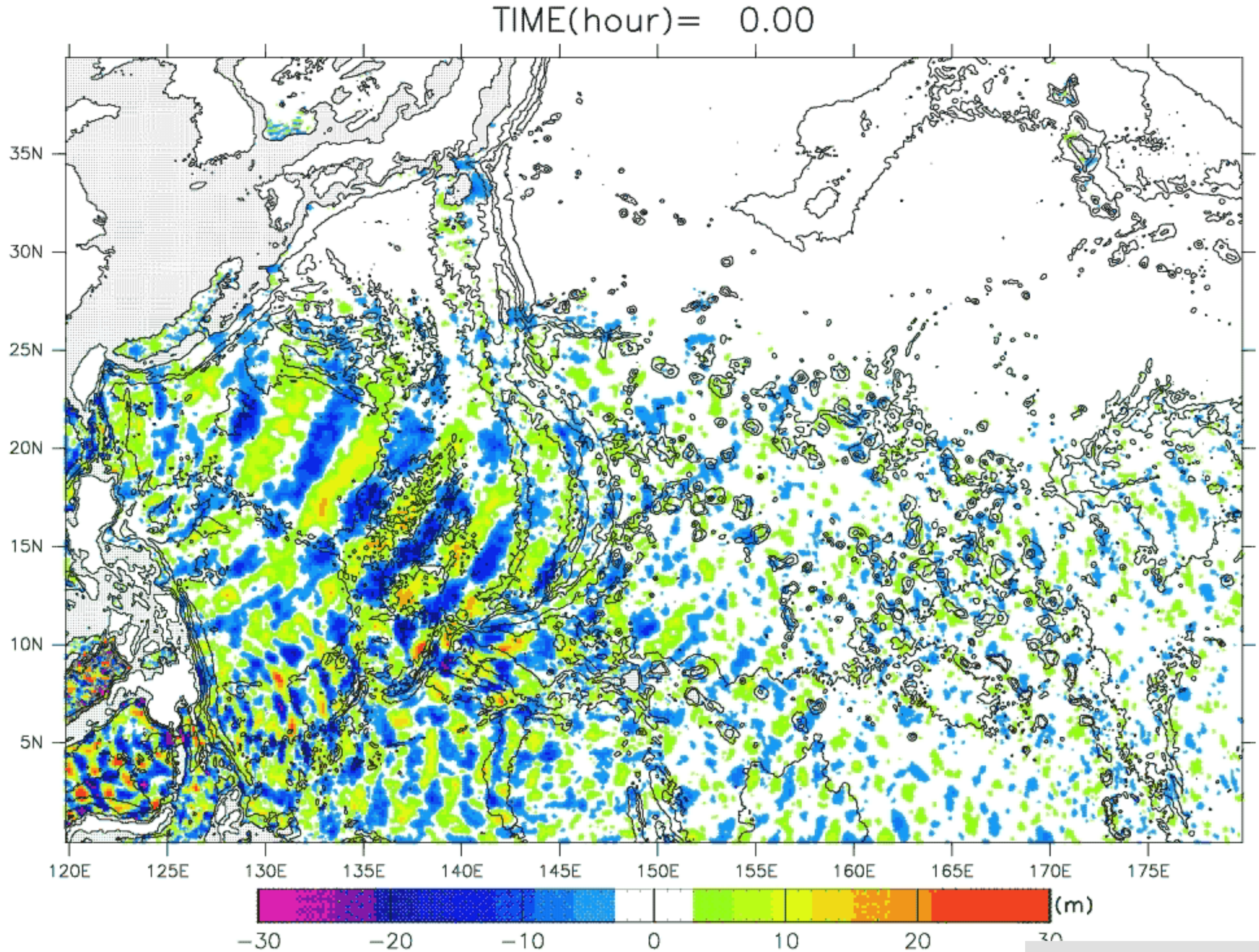
３次元数値シミュレーション（水平グリッド1/15°）で得られた日周期K_1内部潮汐波の運動エネルギー分布

Niwa and Hibiya(2011)



- 日周潮汐周期(約24時間)の臨界緯度**30°** **[ω_{K1}=f(30°)]**
- 臨界緯度より低緯度(ω_{tide}<f) ⇒自由伝播できる内部潮汐波が存在
- 臨界緯度より高緯度(ω_{tide}<f) ⇒自由伝播不可。地形捕捉波として存在（Kelvin波）

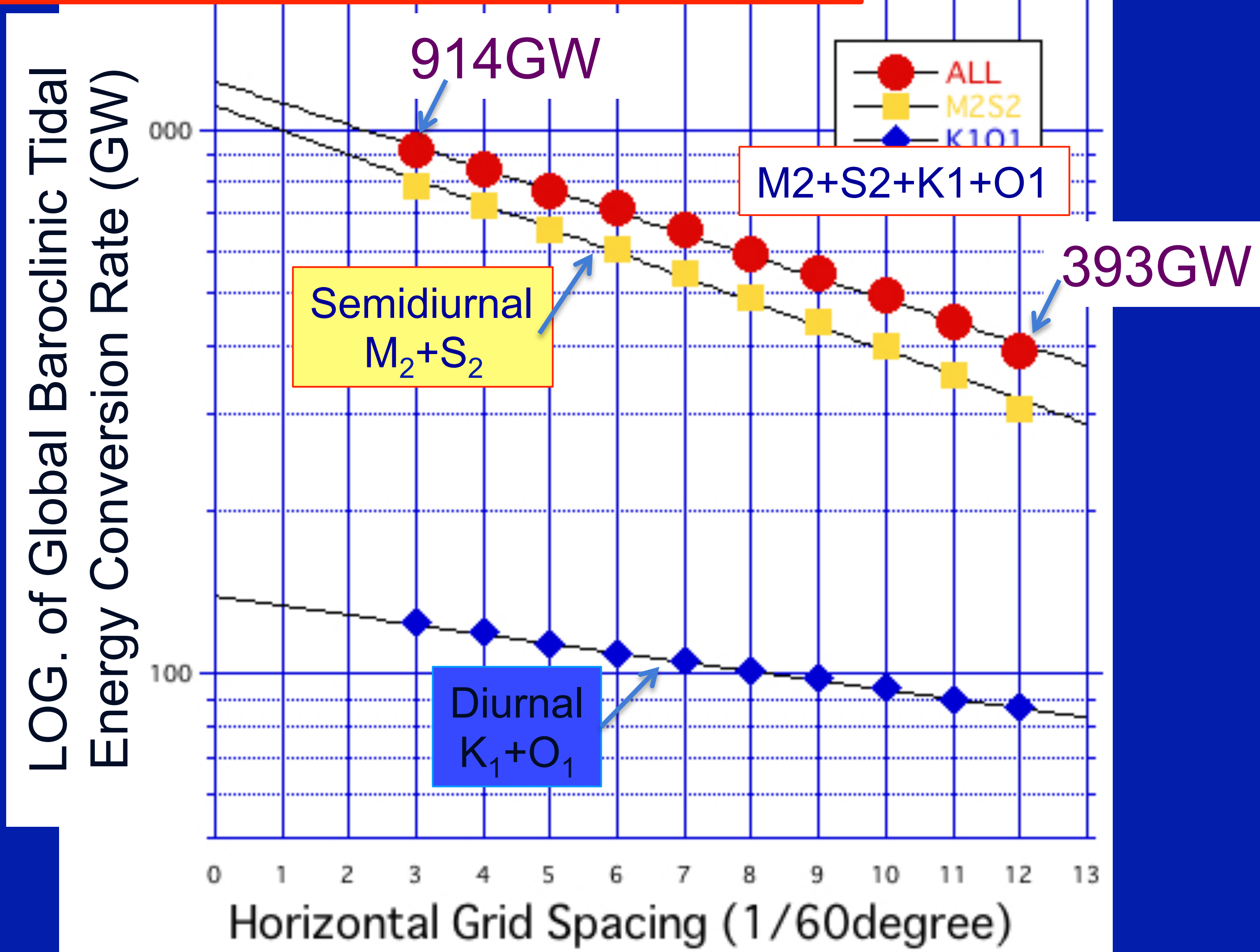
日周期K_1+O_1内部潮汐波(水深1000mの鉛直変位）



丹羽・日比谷(2009)

内部潮汐波へのエネルギー転嫁率のグリッド依存性

Niwa and Hibiya(2014)



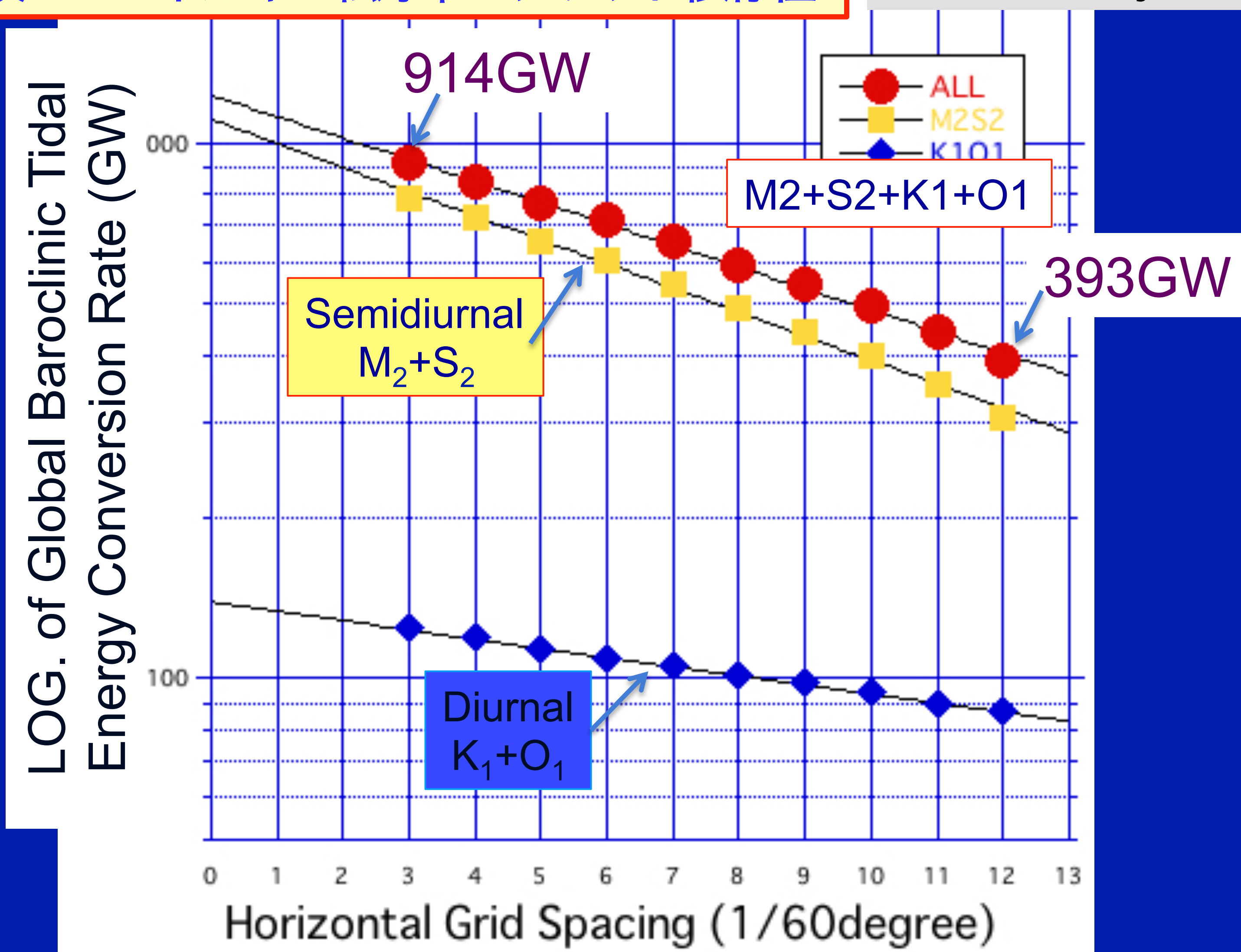
The globally integrated Baroclinic Conv. Rate ($M_2+S_2+K_1+O_1$)

393GW(dx=1/5)

914GW(dx=1/20, Topo. Res. Increased)
(+521GW)

内部潮汐波へのエネルギー転嫁率のグリッド依存性

Niwa and Hibiya(2014)



The globally integrated Baroclinic Conv. Rate ($M_2+S_2+K_1+O_1$)

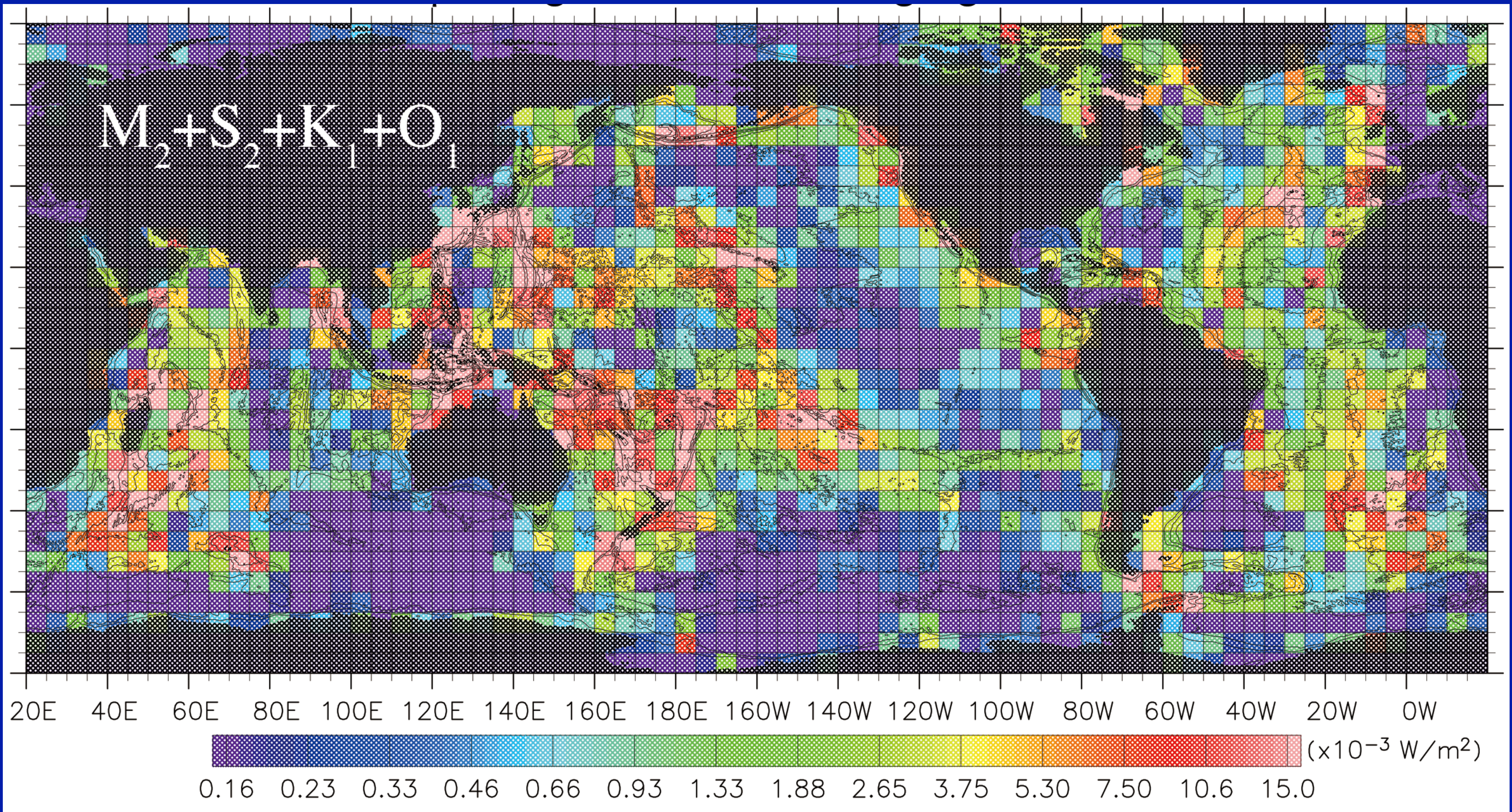
393GW(dx=1/5)

914GW(dx=1/20, Topo. Res. Increased)
(+521GW)

562GW(dx=1/20, Topo. Res. Fixed)
(+169GW)

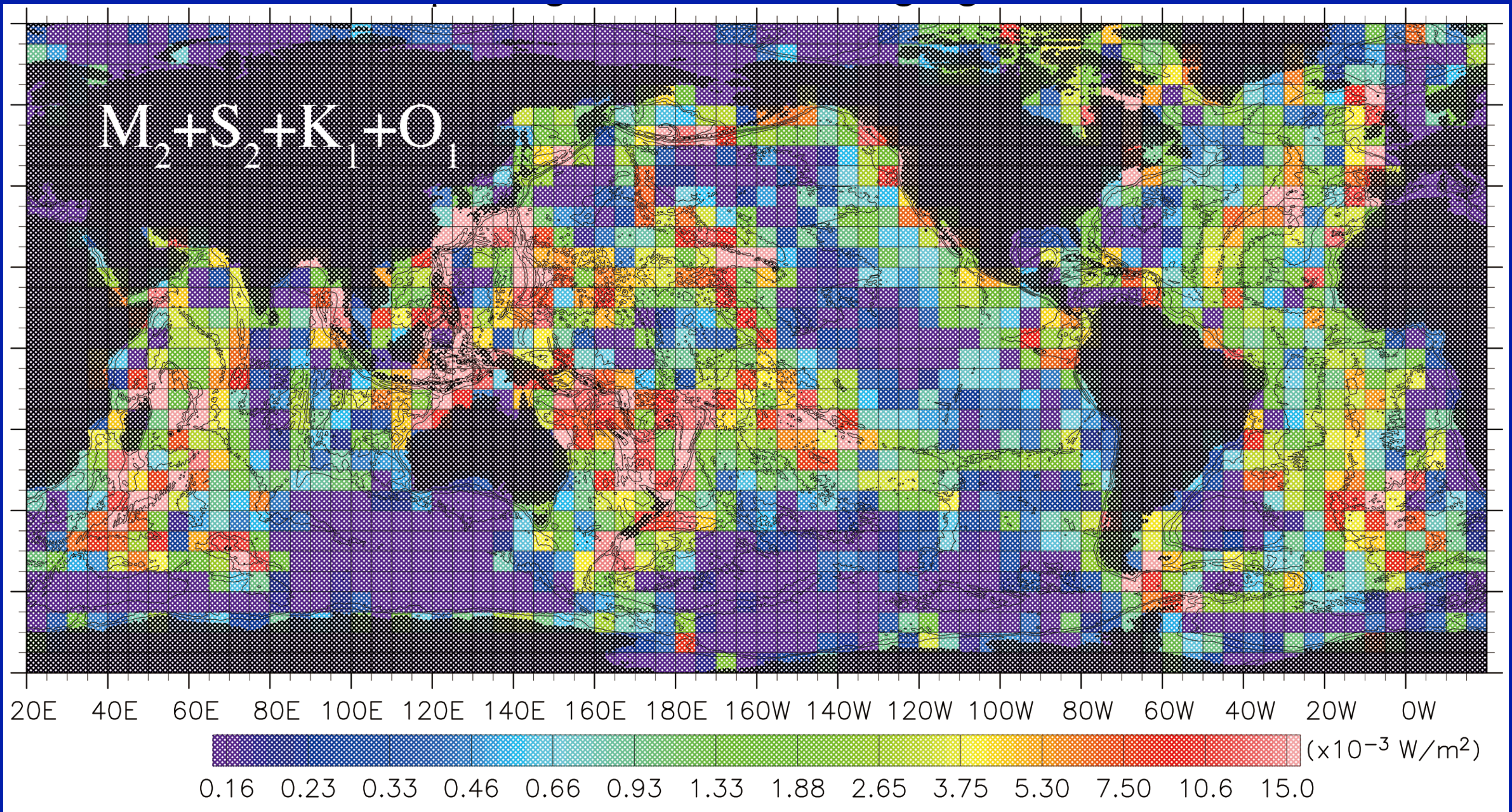
バロトロピック潮汐から内部潮汐へのエネルギー転嫁率

全海洋のエネルギー転嫁率：**1238±35GW**



Niwa and Hibiya (2014)

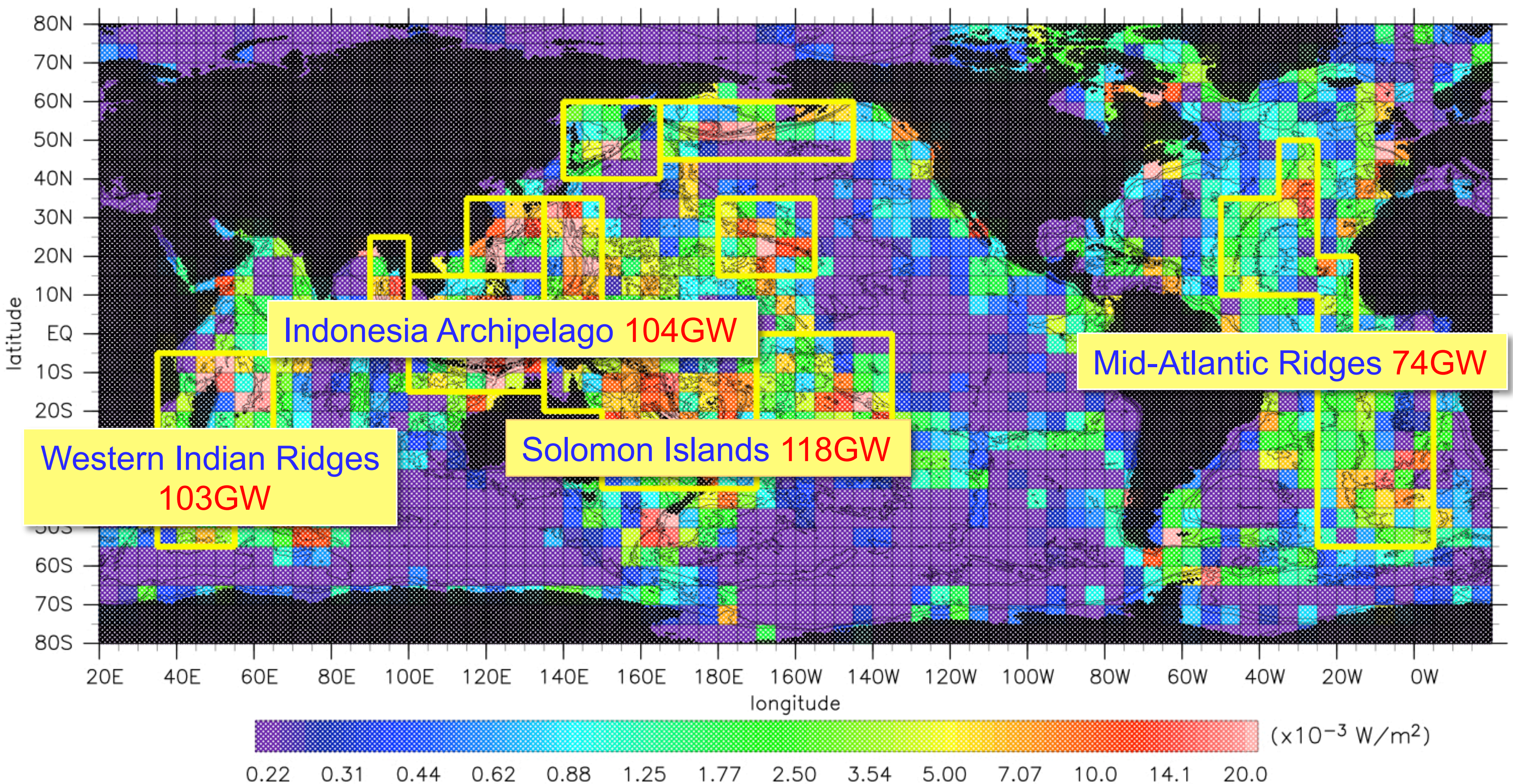
全海洋のエネルギー転嫁率：**1238±35GW**



Niwa and Hibiya (2014)

内部潮汐の主要励起源（Δx=1/20°）

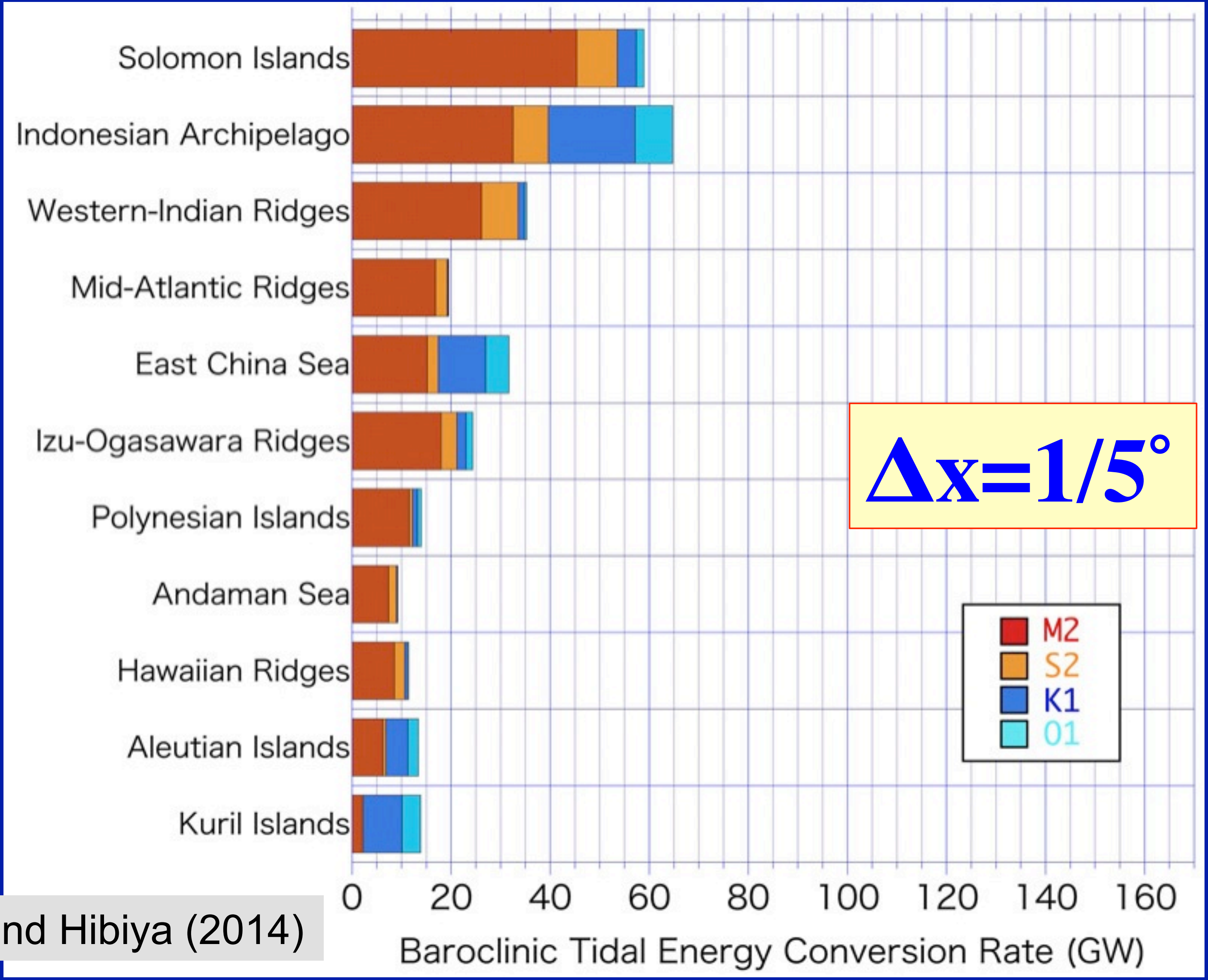
Niwa and Hibiya (2014)



・ソロモン諸島
・インドネシア多島海
・西インド洋海嶺
・大西洋中央海嶺

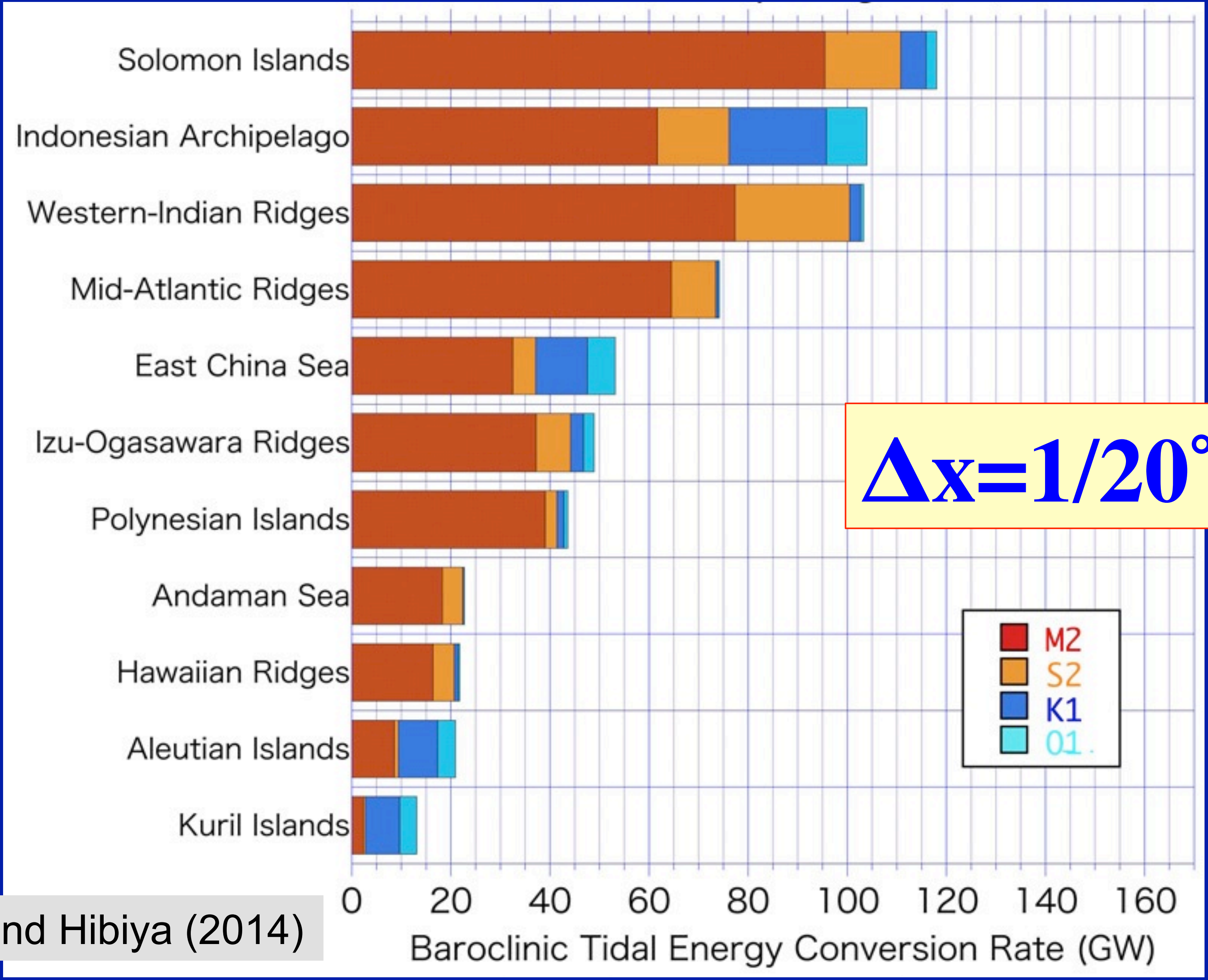
全海洋の内部潮汐エネルギー
転嫁率の40パーセント

内部潮汐の主要励起源におけるエネルギー転嫁率



Niwa and Hibiya (2014)

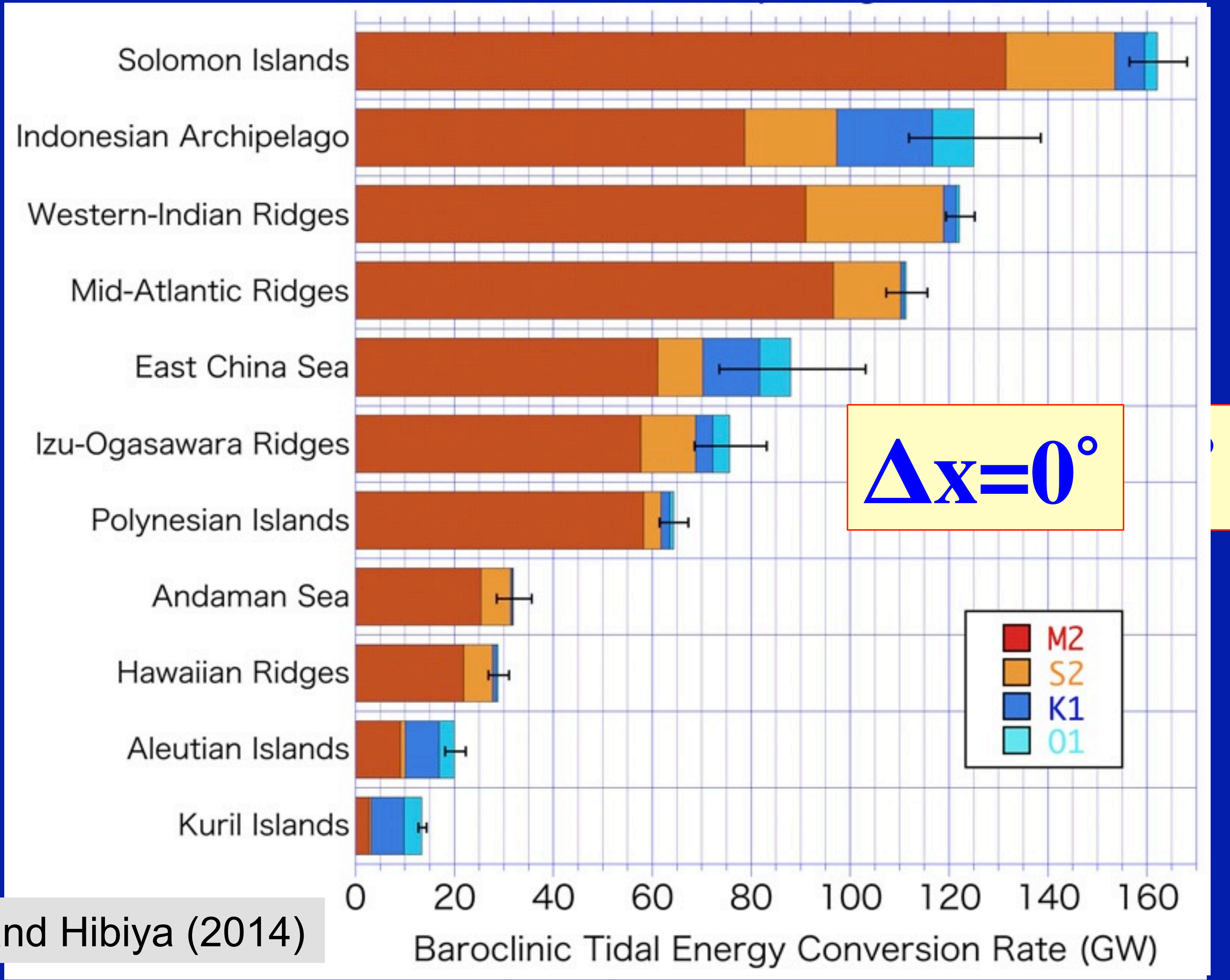
内部潮汐の主要励起源におけるエネルギー転嫁率



$\Delta x = 1/20^\circ$

Niwa and Hibiya (2014)

内部潮汐の主要励起源におけるエネルギー転嫁率



Niwa and Hibiya (2014)

内部潮汐波エネルギー転嫁率の全球積分値の見積もりの推移

	Method	M_2(GW)	All(GW)
Sjöberg and Stigebrandt [1992]	Simple I.W. parameterization	1300	
Morozov[1995]	Analytical Solution (Ridge)	1100	
Kantha and Tierney [1997]	Topex/Poseidon	360	520
Egbert and Ray [2000]	Topex/Poseidon + Assimilation	550-850	
Jayne and Laurent [2001]	Topex/Poseidon+I.W. parameterization	720	1070
Niwa and Hibiya [2001]	3D-simulation in the Pacific Ocean	740-940	
Simmons et al.[2004]	Global 3D-simulatioin	670-890	
Nycander [2005]	Analytical Method (linear theory)	800	1200
Niwa and Hibiya [2011,2014]	Global 3D-simulatioin	937±35	1238±35

内部潮汐波エネルギー転嫁率の全球積分値の見積もりの推移

	Method	M_2(GW)	All(GW)
Sjöberg and Stigebrandt [1992]	Simple I.W. parameterization	1300	
Morozov[1995]	Analytical Solution (Ridge)	1100	
Kantha and Tierney [1997]	Topex/Poseidon	360	520
Egbert and Ray [2000]	Topex/Poseidon + Assimilation	550-850	
Jayne			1070
Niwa [2001]	Pacific Ocean		
Simmons et al.[2004]	Global 3D-simulatioin	670-890	
Nycander [2005]	Analytical Method (linear theory)	800	1200
Niwa and Hibiya [2011,2014]	Global 3D-simulatioin	937±35	1238±35

全球内部潮汐波エネルギー

≈ 1200GW (>900GW;Munk and Wunsch(1998))

内部潮汐波エネルギー転嫁率の全球積分値の見積もりの推移

	Method	M_2(GW)	All(GW)
Sjöberg and Stigebrandt [1992]	Simple I.W. parameterization	1300	
Morozov[1995]	Analytical Solution (Ridge)	1100	
Kantha and Tierney [1997]	Topex/Poseidon	360	520
Egbert and Ray [2000]	Topex/Poseidon + Assimilation	550-850	
Jayne [illegible]	[illegible]	[illegible]	1070
Niwa [illegible] [2001]	[illegible] Pacific Ocean	[illegible]	
Simmons et al.[2004]	Global 3D-simulatioin	670-890	
Nycander [2005]	Analytical Method (linear theory)	800	1200
Niwa and H[illegible] [2011,201[illegible]	[illegible]	[illegible]5	1238±35

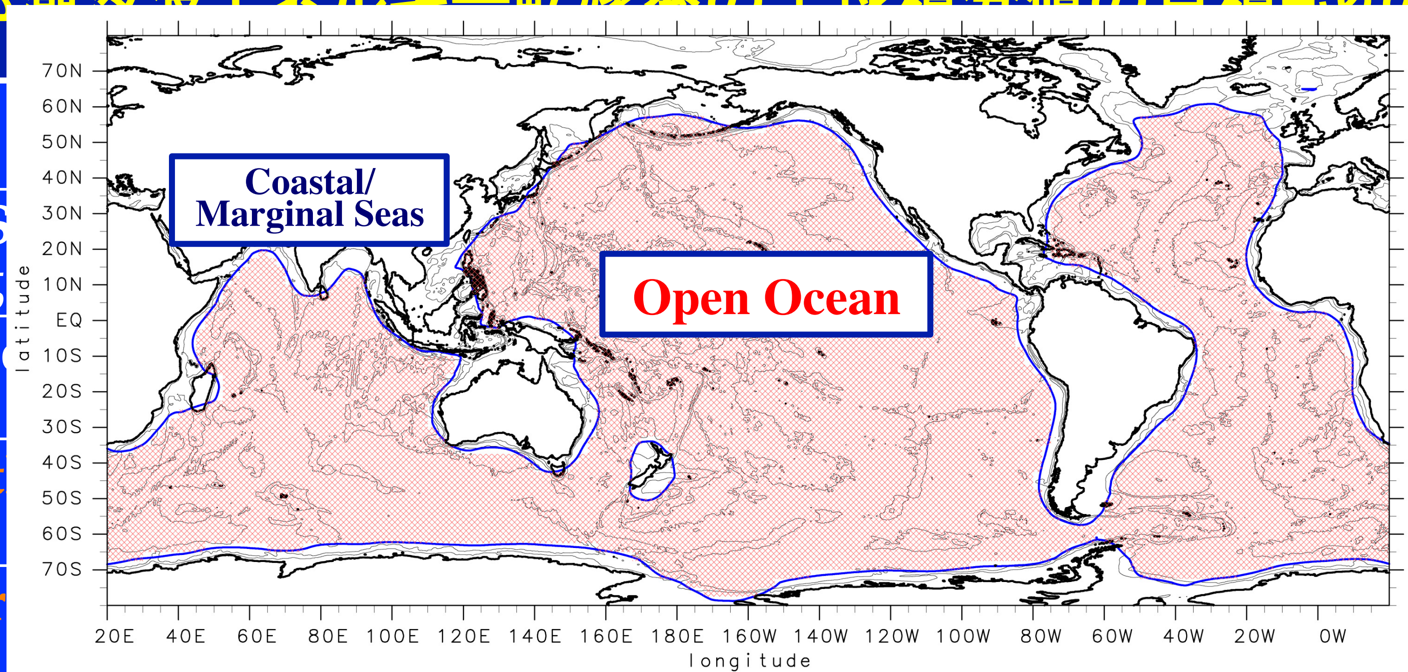
全球内部潮汐波エネルギー

≈ **1200GW**(>900GW;Munk and Wunsch(1998))

深層の乱流混合

→深層水の湧昇、深層循環の維持

内部潮汐波エネルギー転嫁率の全球積分値の見積もりの推移



			l(GW)
S Stig			
M			
Kant			520
Egber			
Jayne			1070
Niwa [2001]	Pacific Ocean		
Nycander [2005]	Analytical Method (linear theory)	800	1200
Niwa and H [2011,201		5	1238±35

全球内部潮汐波エネルギー

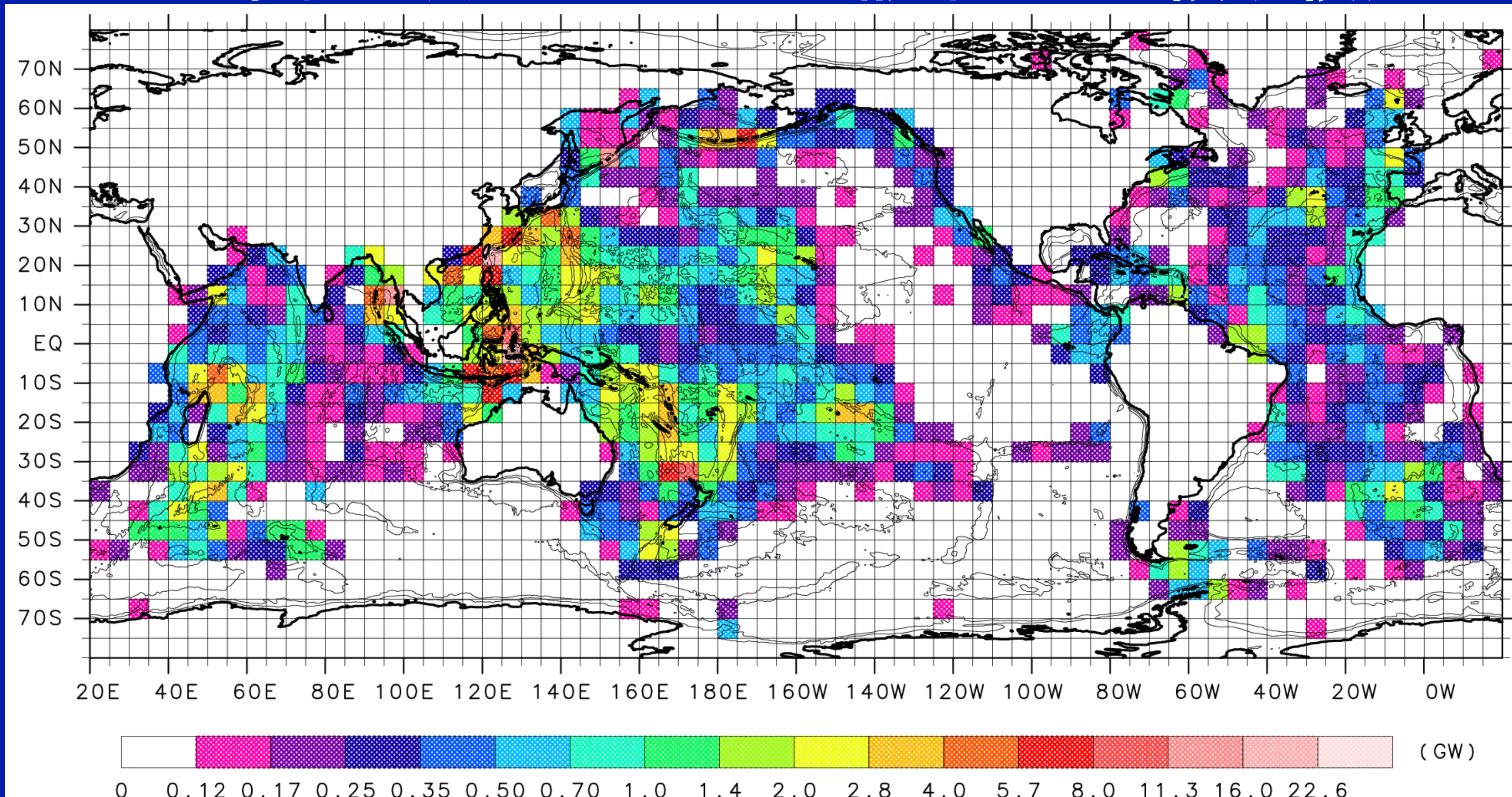
≈ 1200GW (>900GW;Munk and Wunsch(1998))

外洋域の主密度躍層以深(z=1000m)での内部潮汐エネルギー散逸

深層の乱流混合

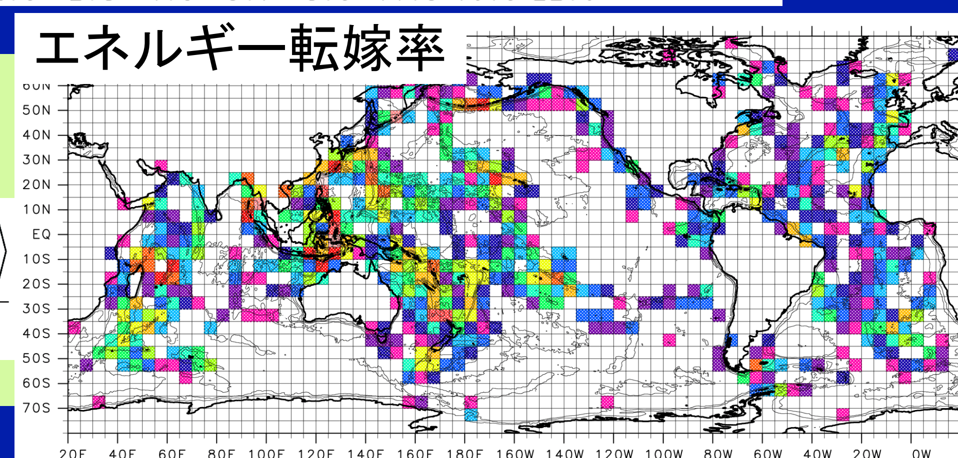
→深層水の湧昇、深層循環の維持

内部潮汐波エネルギー消散率(5°×5°領域積分)



内部潮汐エネルギー消散率＝
ｴﾈﾙｷﾞｰ転嫁率＋ｴﾈﾙｷﾞｰﾌﾗｯｸｽ発散

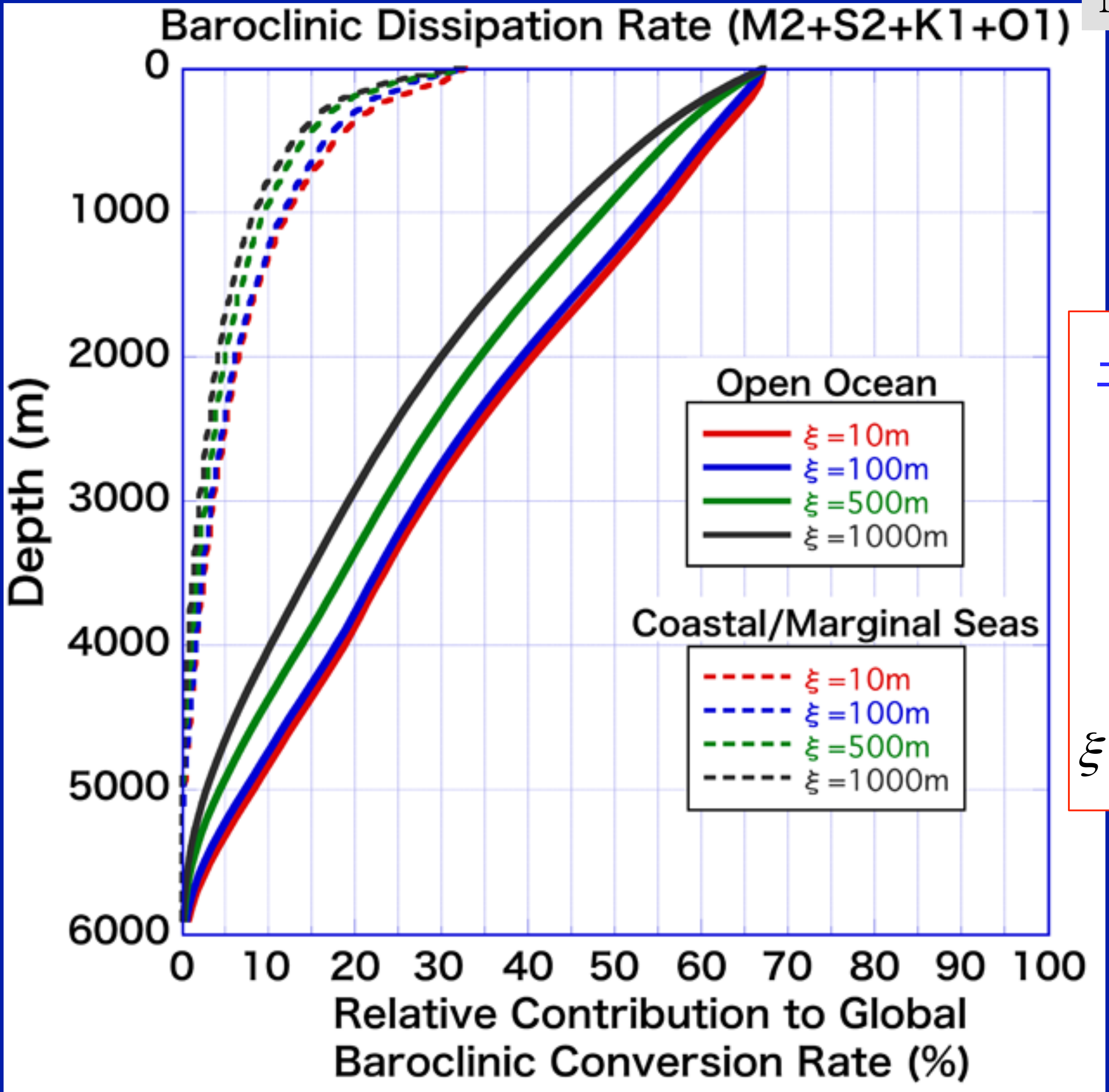
$$\left\langle \overline{DIS_{bc}} \right\rangle \approx -\left\langle g\overline{\rho' w_{bt}}D \right\rangle + \frac{\partial \left\langle \overline{P'U'}D \right\rangle}{\partial x} + \frac{\partial \left\langle \overline{P'V'}D \right\rangle}{\partial y}$$



Niwa and Hibiya (2011)

外洋域の内部潮汐エネルギー消散率の鉛直積算分布

Niwa and Hibiya(2011)



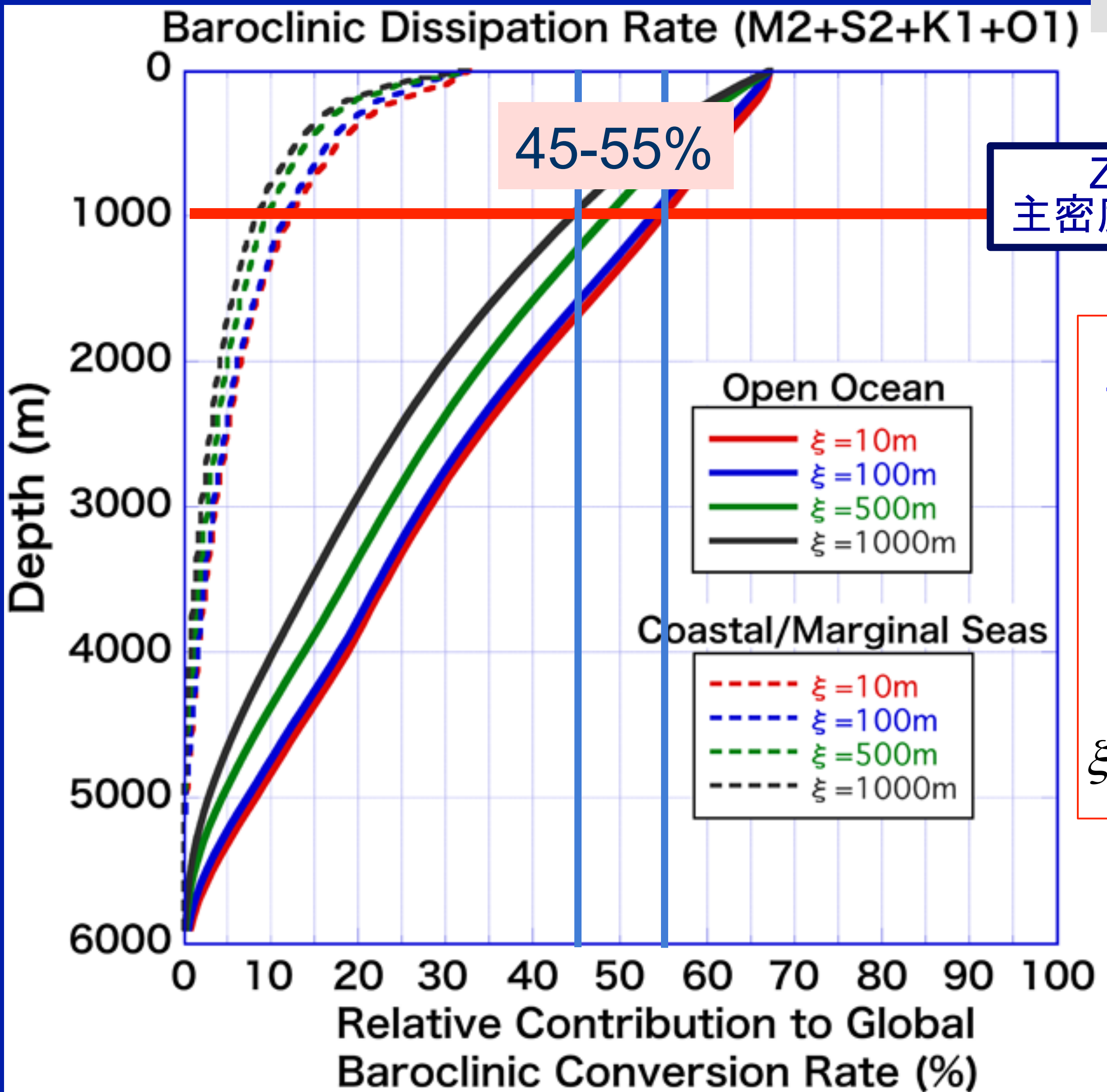
エネルギー消散鉛直構造関数
St. Laurent et al.(2002)

$$\boxed{F(z) = \frac{\xi e^{\xi(z+H)}}{e^{\xi H} - 1}}$$

ξ = Scale Height Parameter

外洋域の内部潮汐エネルギー消散率の鉛直積算分布

Niwa and Hibiya(2011)



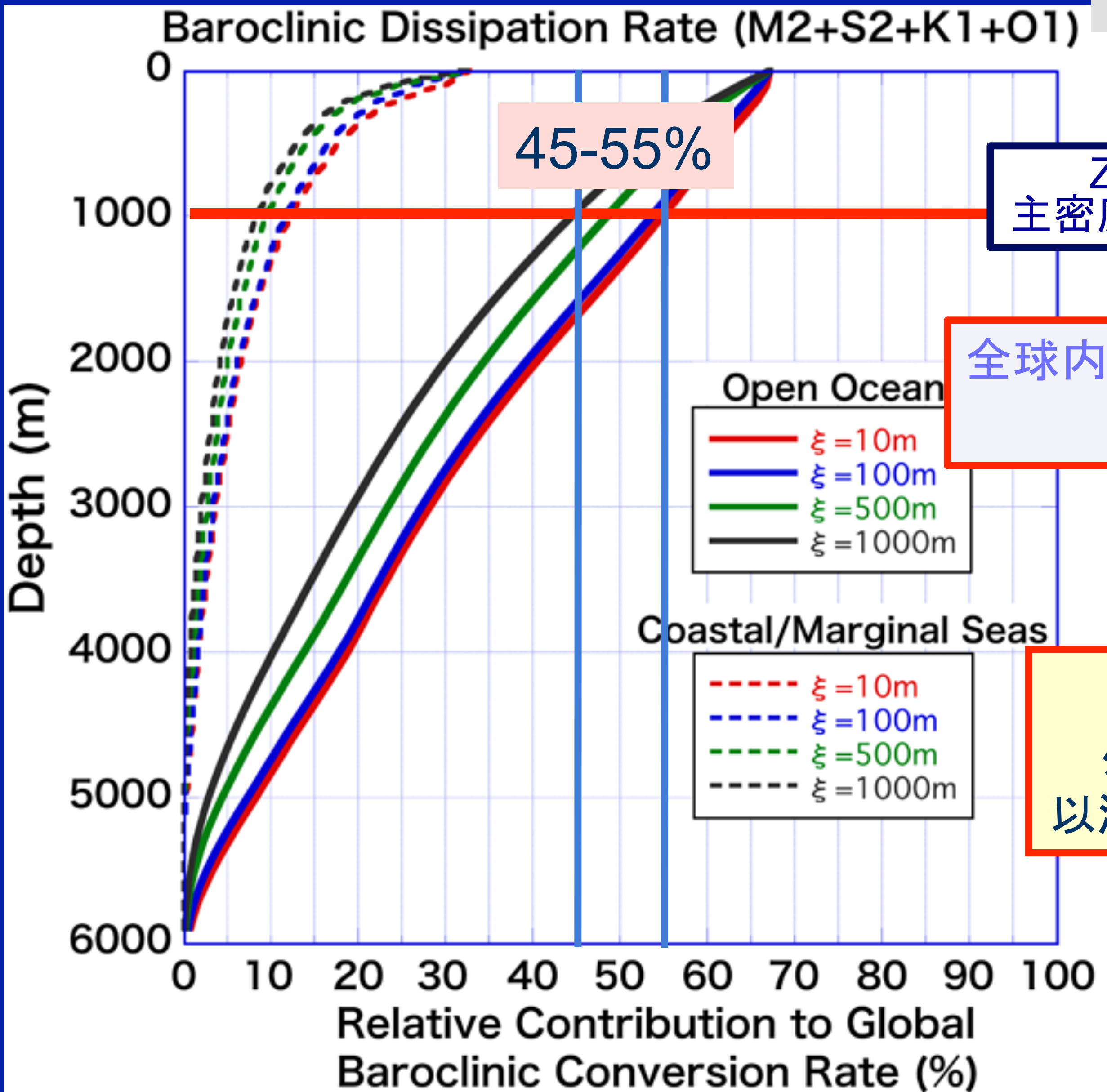
エネルギー消散鉛直構造関数
St. Laurent et al.(2002)

$$F(z) = \frac{\xi e^{\xi(z+H)}}{e^{\xi H} - 1}$$

ξ = Scale Height Parameter

外洋域の内部潮汐エネルギー消散率の鉛直積算分布

Niwa and Hibiya(2011)



Z=1000m
主密度躍層の水深

全球内部潮汐エネルギー (dx=0)
1200GW

45-55%

550-650GW
外洋域の主密度躍層
以深での内部潮汐の消散

深層の乱流混合
→深層循環の維持

3.6 スラブモデル

大気擾乱起源の内部波⇒混合層内の慣性振動が卓越

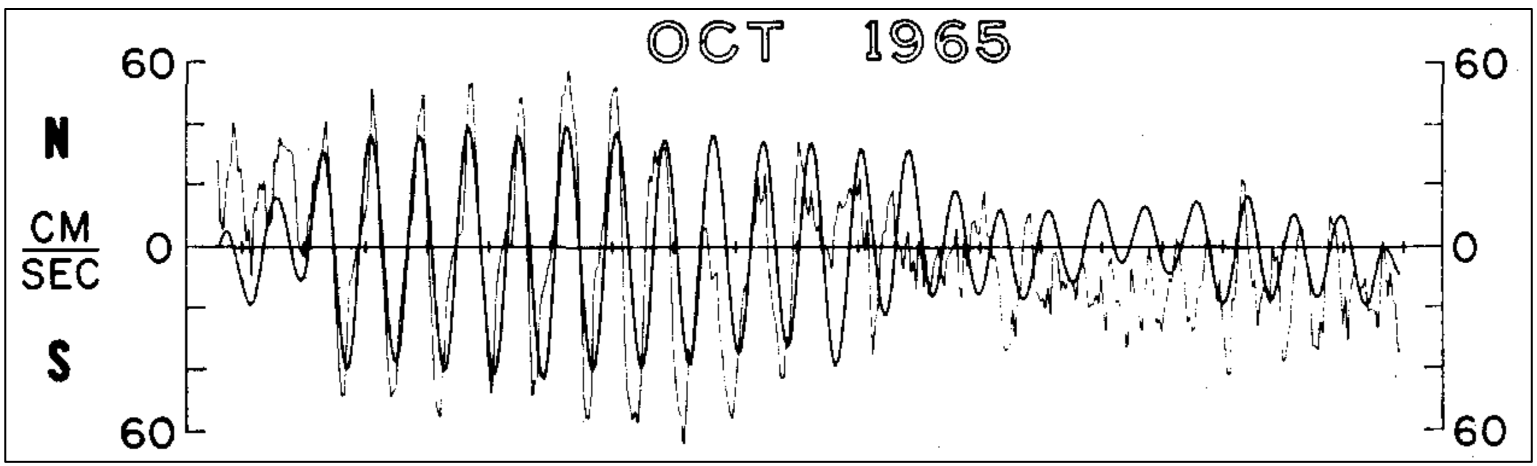
水平圧力勾配を無視←慣性振動の波長大
内部波下方伝播の影響→線形減衰項で表現、減衰時間＝数日。

スラブモデル

$$\frac{\partial u_{mix}}{\partial t} = +fv_{mix} + \frac{\tau_x}{H_{mix}} - ru_{mix}$$

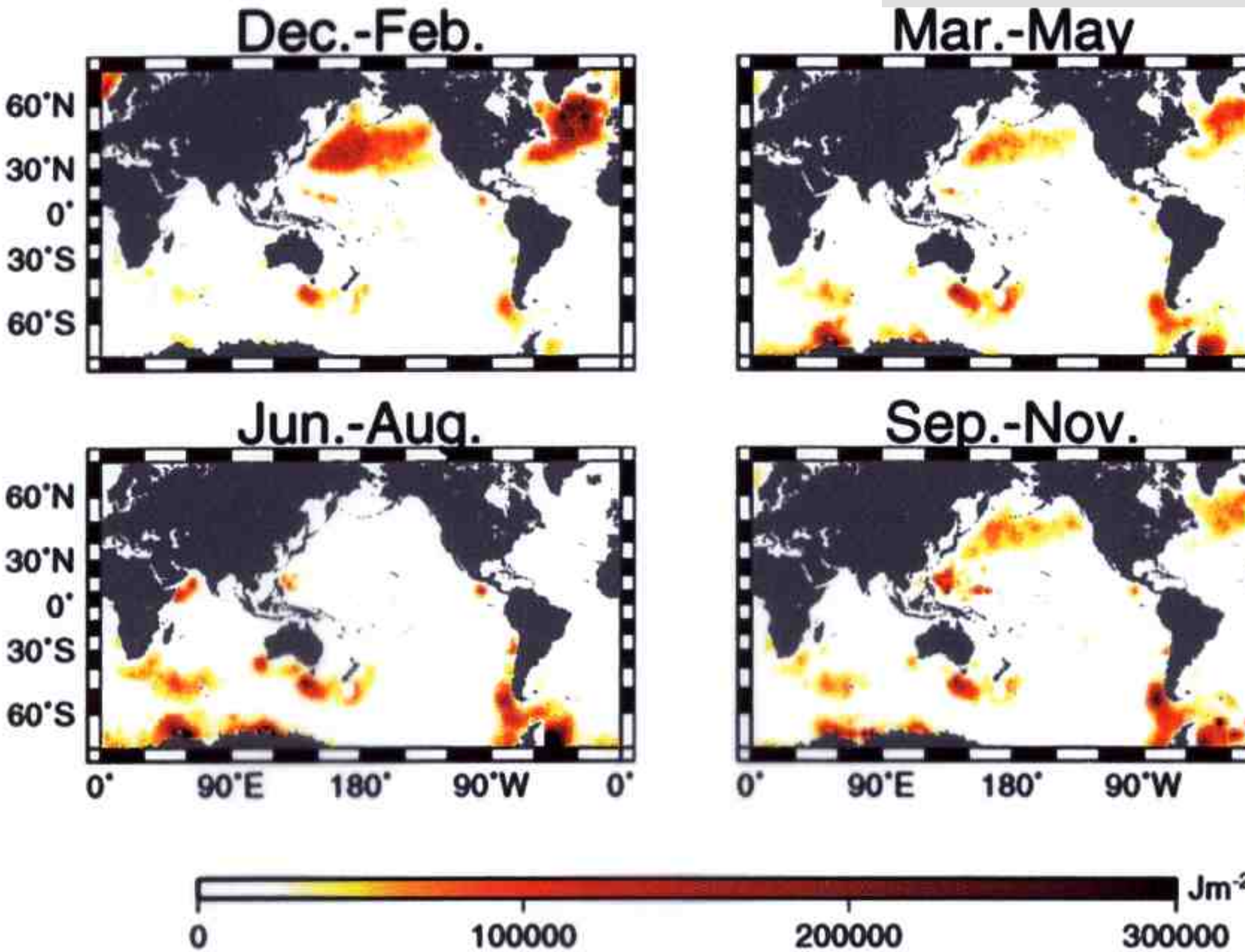
$$\frac{\partial v_{mix}}{\partial t} = -fu_{mix} + \frac{\tau_y}{H_{mix}} - rv_{mix}$$

混合層内の近慣性振動：観測（細線）とスラブモデル（太線）の比較 Pollard & Millard(1970)

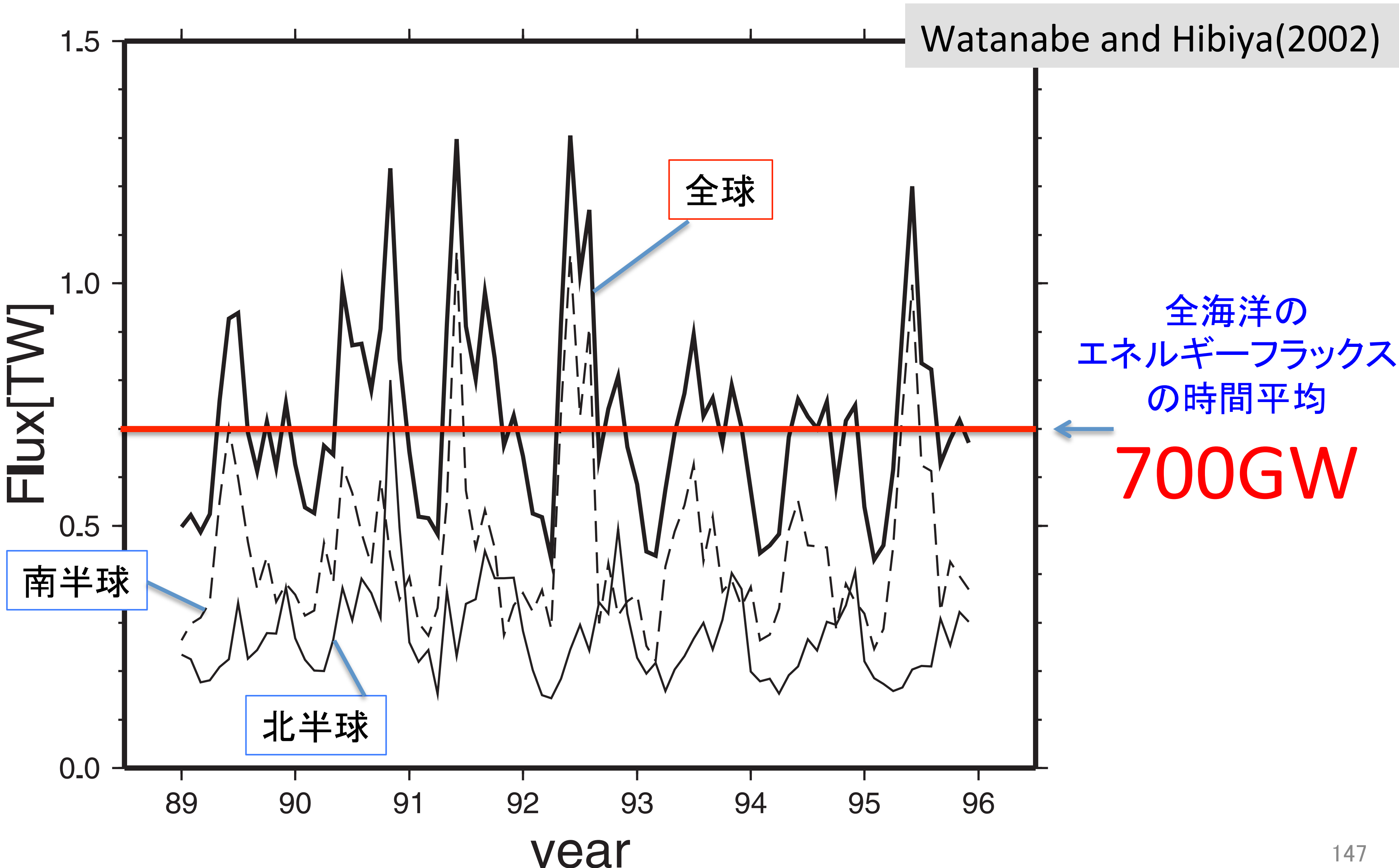


スラブモデルを用いて計算した近慣性振動の全球分布の季節変動

Watanabe and Hibiya(2002)

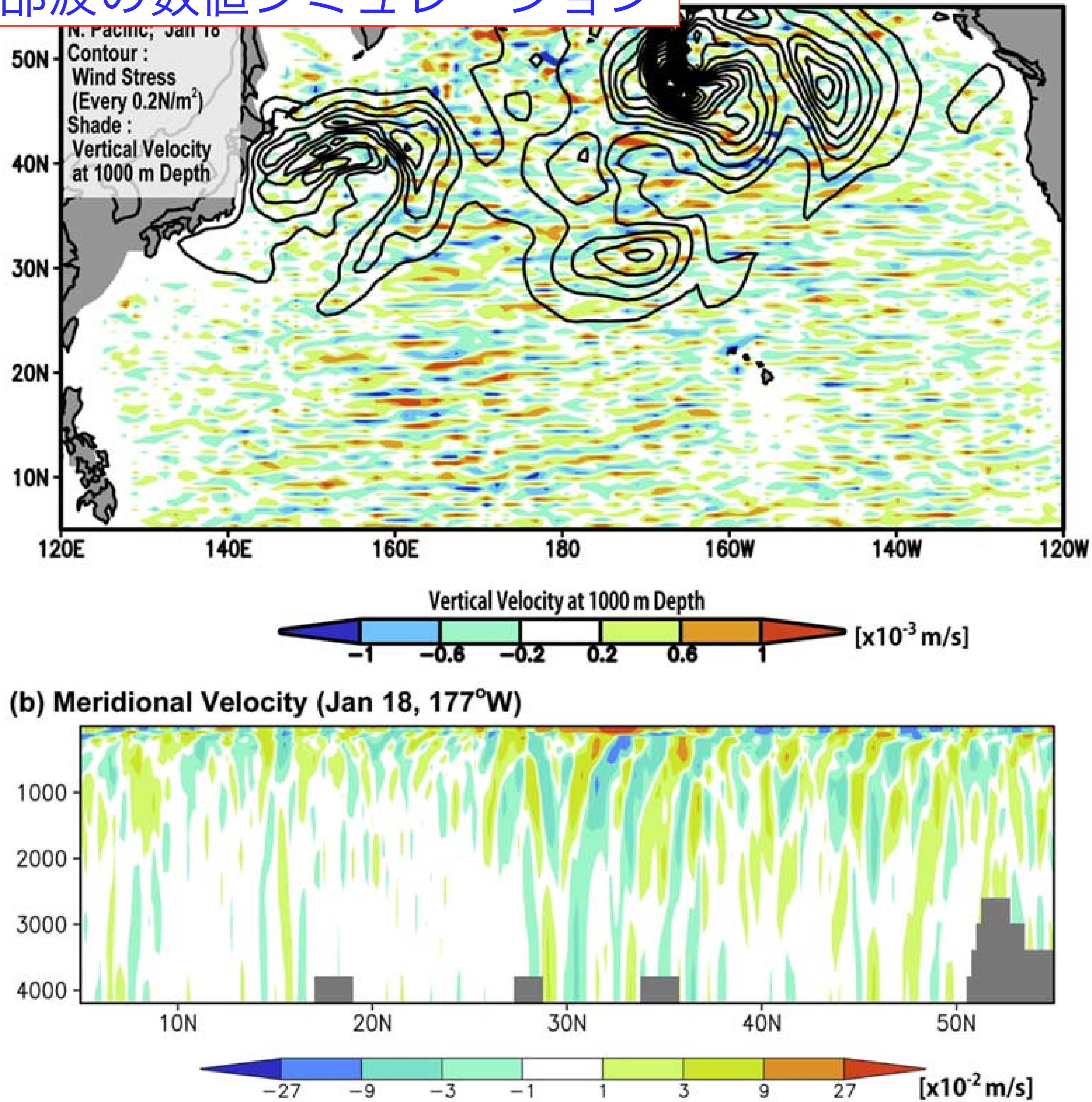


大気擾乱から近慣性内部波へのエネルギーフラックス



大気擾乱起源の内部波の数値シミュレーション

Furuichi et al.(2008)



数値シミュレーションの結果得られた、大気擾乱起源の内部波のエネルギー収支

Furuichi et al.(2008)

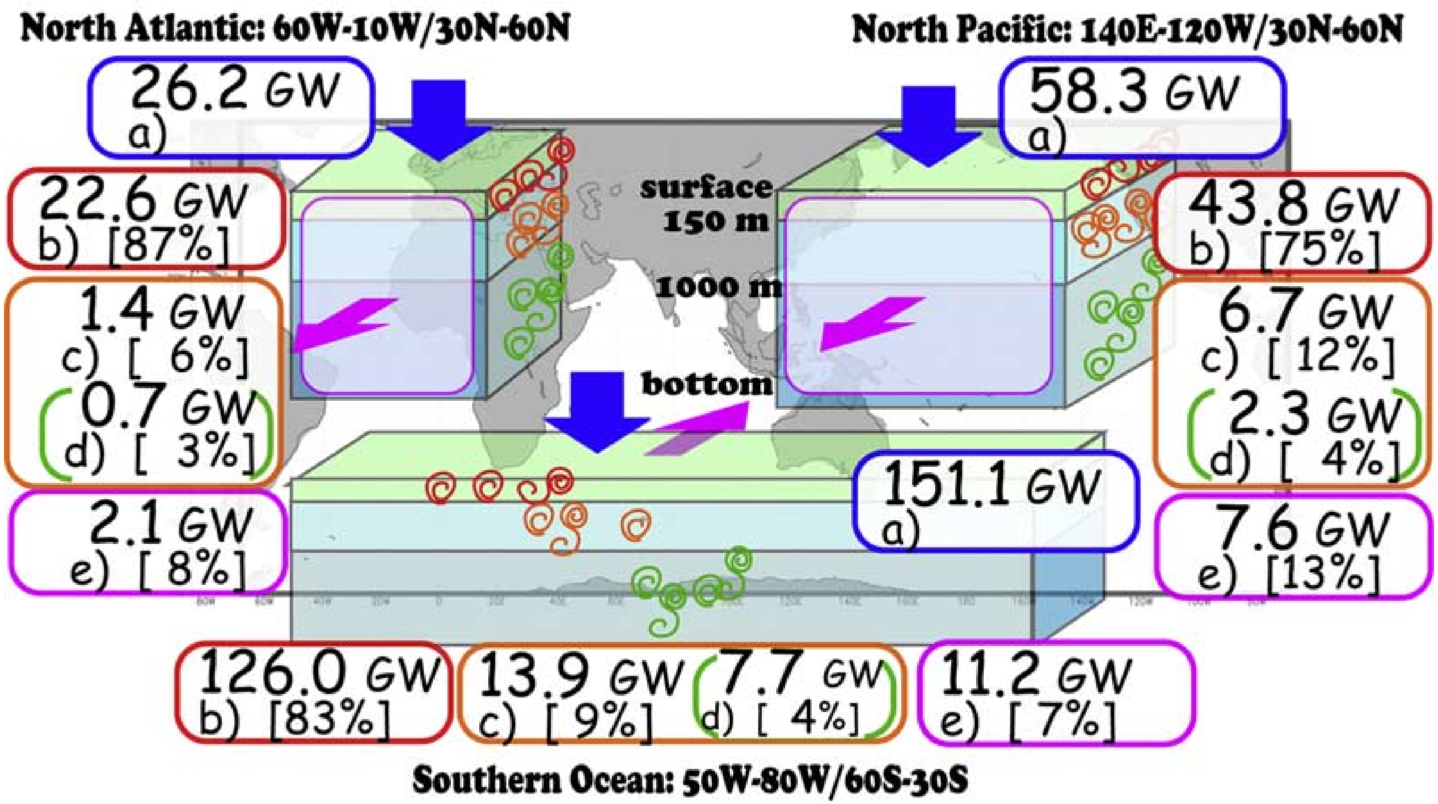
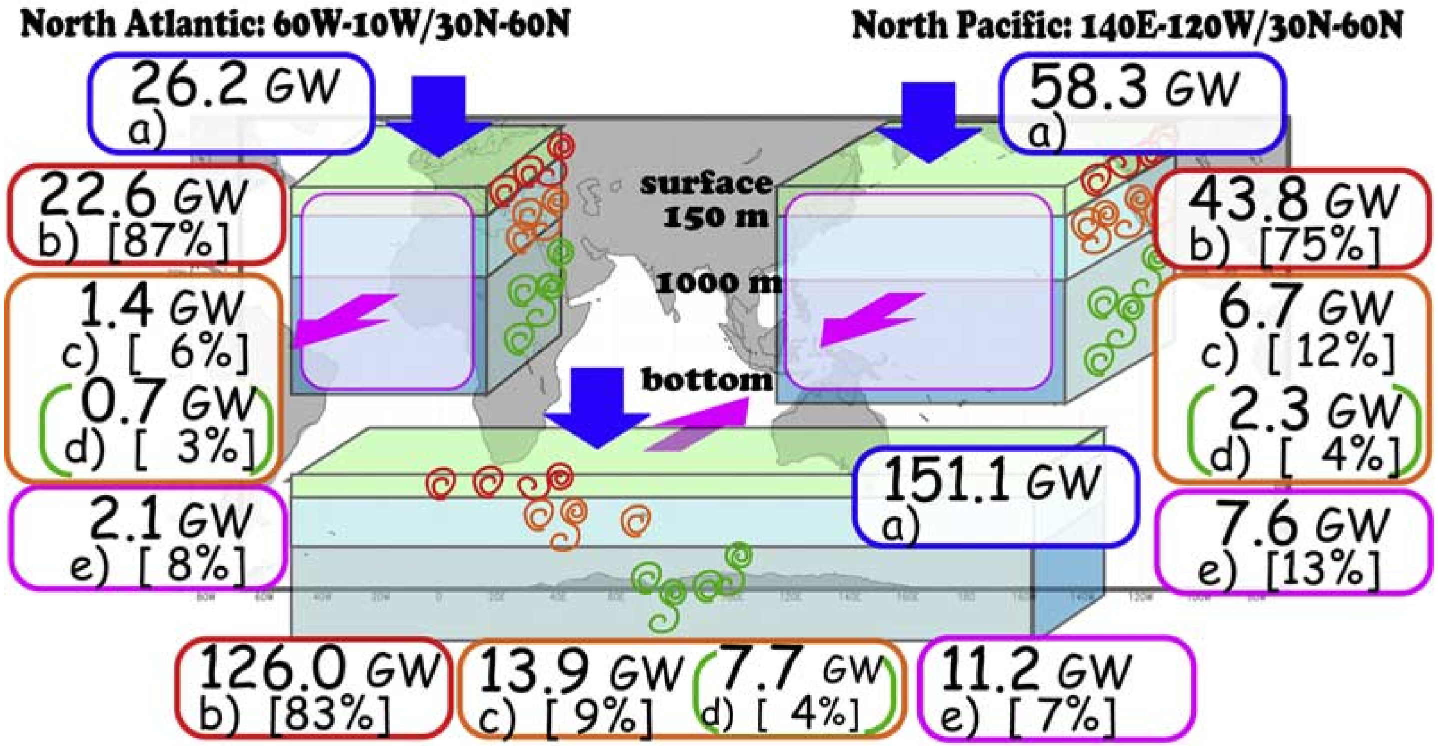


Figure 11. Schematic diagram showing the annual mean energy balance for each of the three areas outlined by the red boxes in Figure 1. Labels are as follows: a, annual mean wind energy input to each area; b, annual mean energy dissipation rate within the surface 150 m in each area together with its ratio to the local wind energy input; c, annual mean energy dissipation rate from 150 m depth to the bottom in each area together with its ratio to the local wind energy input; d, annual mean energy dissipation rate from 1000 m depth to the bottom in each area together with its ratio to the local wind energy input; e, annual mean equatorward energy flux integrated over the equatorward cross section of each area together with its ratio to the local wind energy input.

数値シミュレーションの結果得られた、
大気擾乱起源の内部波のエネルギー収支

Furuichi et al.(2008)



大気擾乱起源の内部波エネルギー
の8割強が表層混合層(<水深150m)で消散

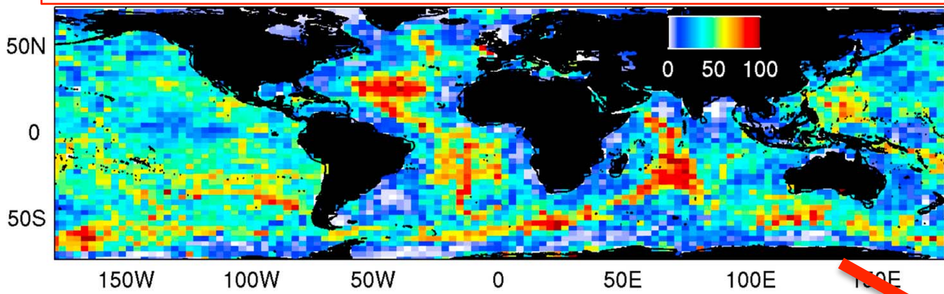
Figure 11 ... three areas outlined b... nput to each area; b, annual mean energy dissipation rate w... the surface 150 m in each area together with its ratio to the local wind energy input; c, annual mea... dissipation rate from 150 m depth to the bottom in each a... rate from 1... t; e, annual ... ether with it...

深層(＞水深1000m)で消散する大気擾乱起源
の内部波エネルギーは全体の1割程度＜100GW

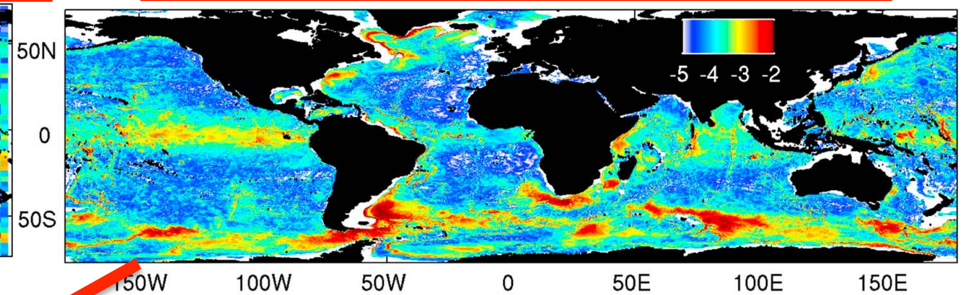
地衡流と海底地形の相互作用によって励起される風下波のエネルギーフラックスのグローバル分布

Nikurashin and Ferrari (2011)

海底地形：波長=O(100m)-O(10km)←船舶測深データ

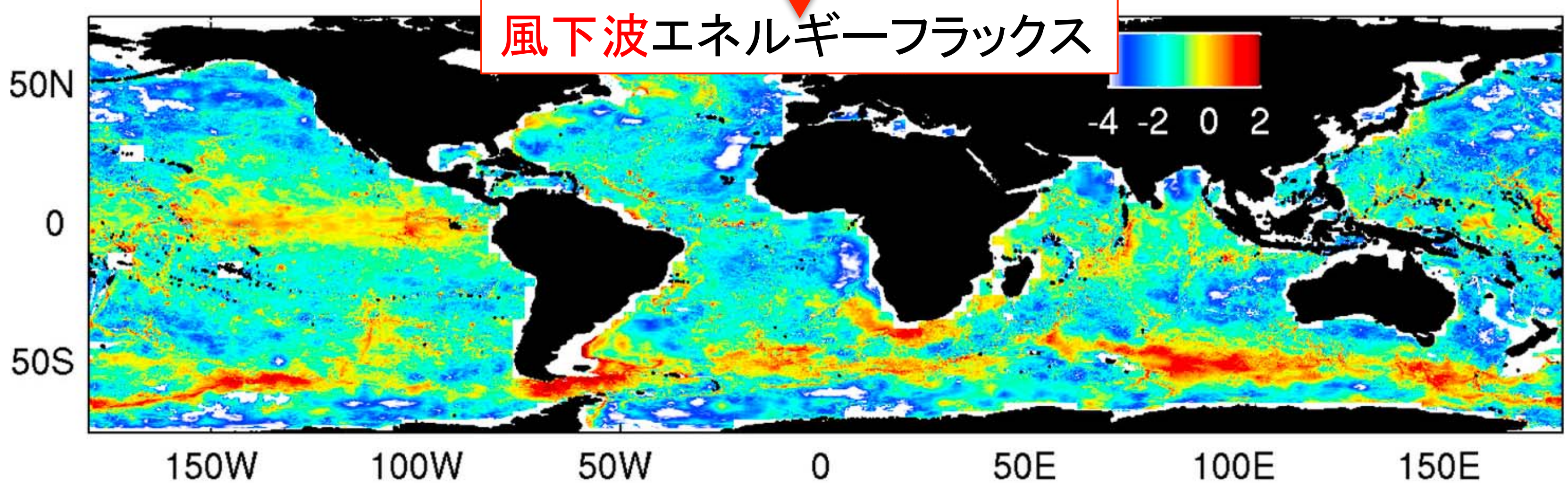


底層地衡流エネルギー←大循環モデル



線形理論

風下波エネルギーフラックス



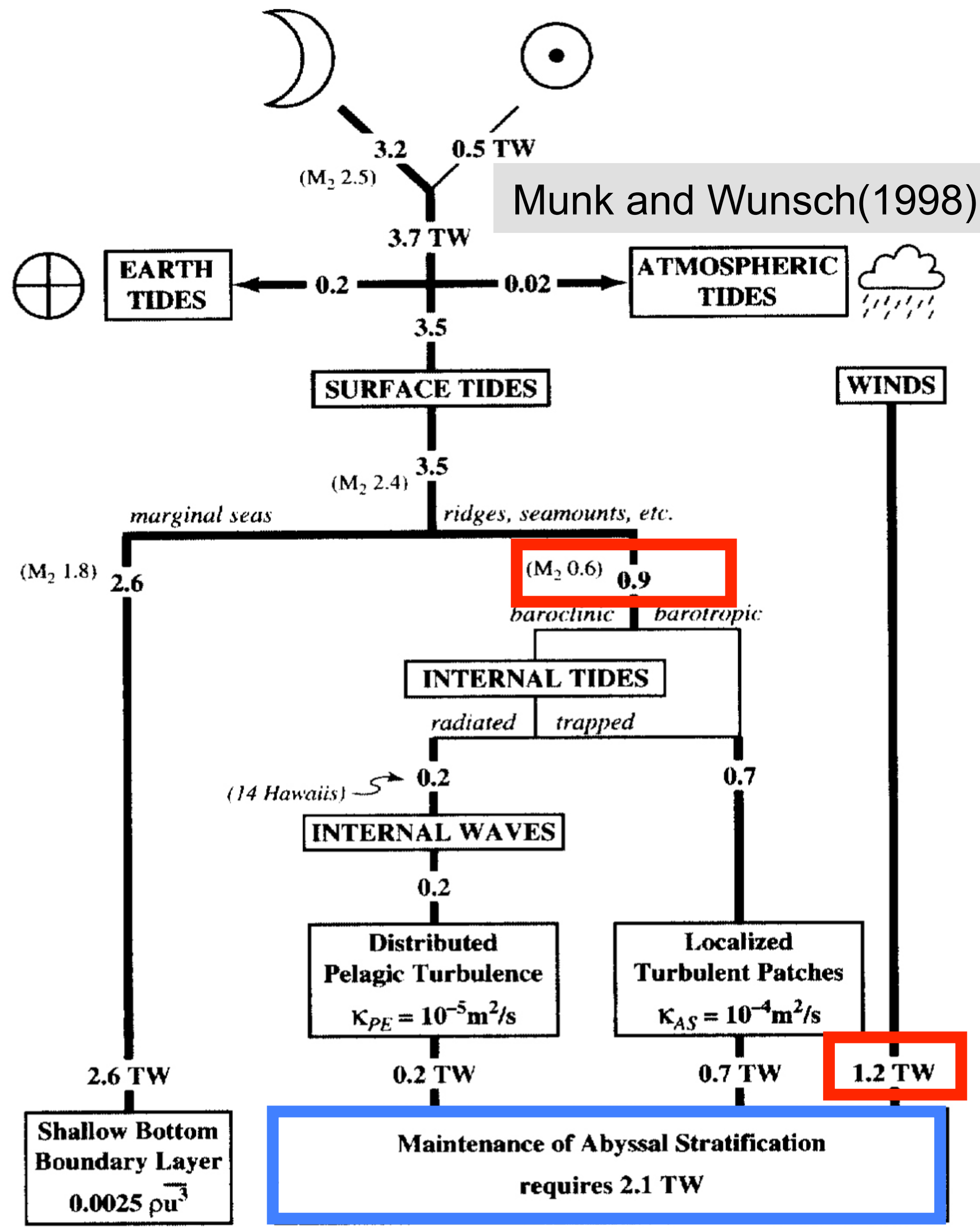
南極海で卓越

全海洋積分値 200GW

Munk &Wunsch (1998) Abyssal Recipes II

励起エネルギー~2.1TW
- 内部潮汐~1.2TW
- 風起源内部波~0.9TW
  (大気擾乱~0.7TW)
  (地衡流~0.2TW)

全球平均Kv=$10^{-4}m^2s^{-1}$の
乱流混合の維持~2.1TW

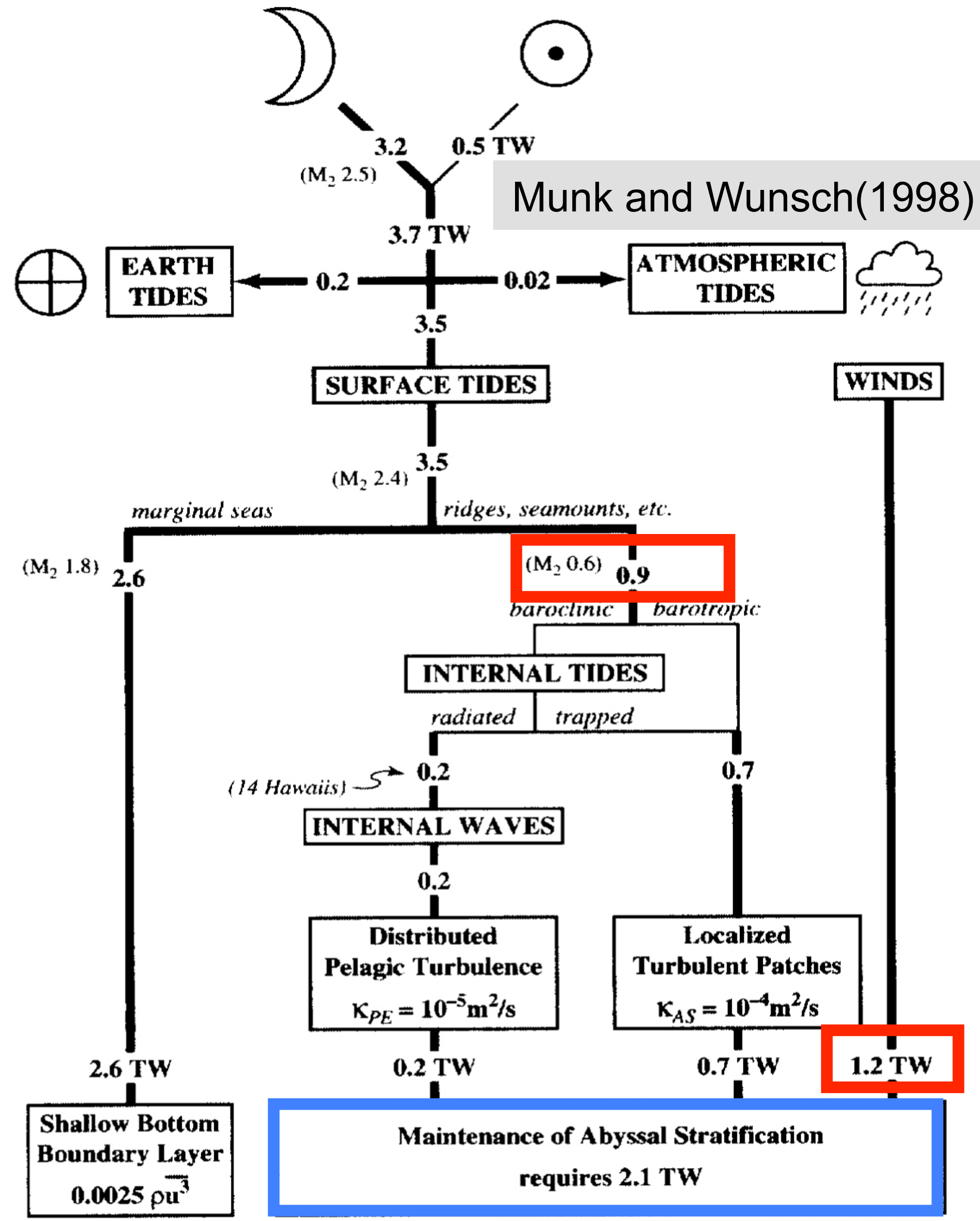


Munk &Wunsch (1998) Abyssal Recipes II

励起エネルギー~2.1TW
- 内部潮汐~1.2TW
- 風起源内部波~0.9TW
  (大気擾乱~0.7TW)
  (地衡流~0.2TW)

深層での散逸~0.9TW
- 内部潮汐~0.6TW
- 風起源内部波<0.3TW
  (大気擾乱<0.1TW)
  (地衡流~0.2TW)

全球平均$K_v=10^{-4} m^2 s^{-1}$の乱流混合の維持~2.1TW



数値モデルに投入したトレーサーの軌跡から求めた北大西洋深層水(NADW)起源の海水の鉛直速度

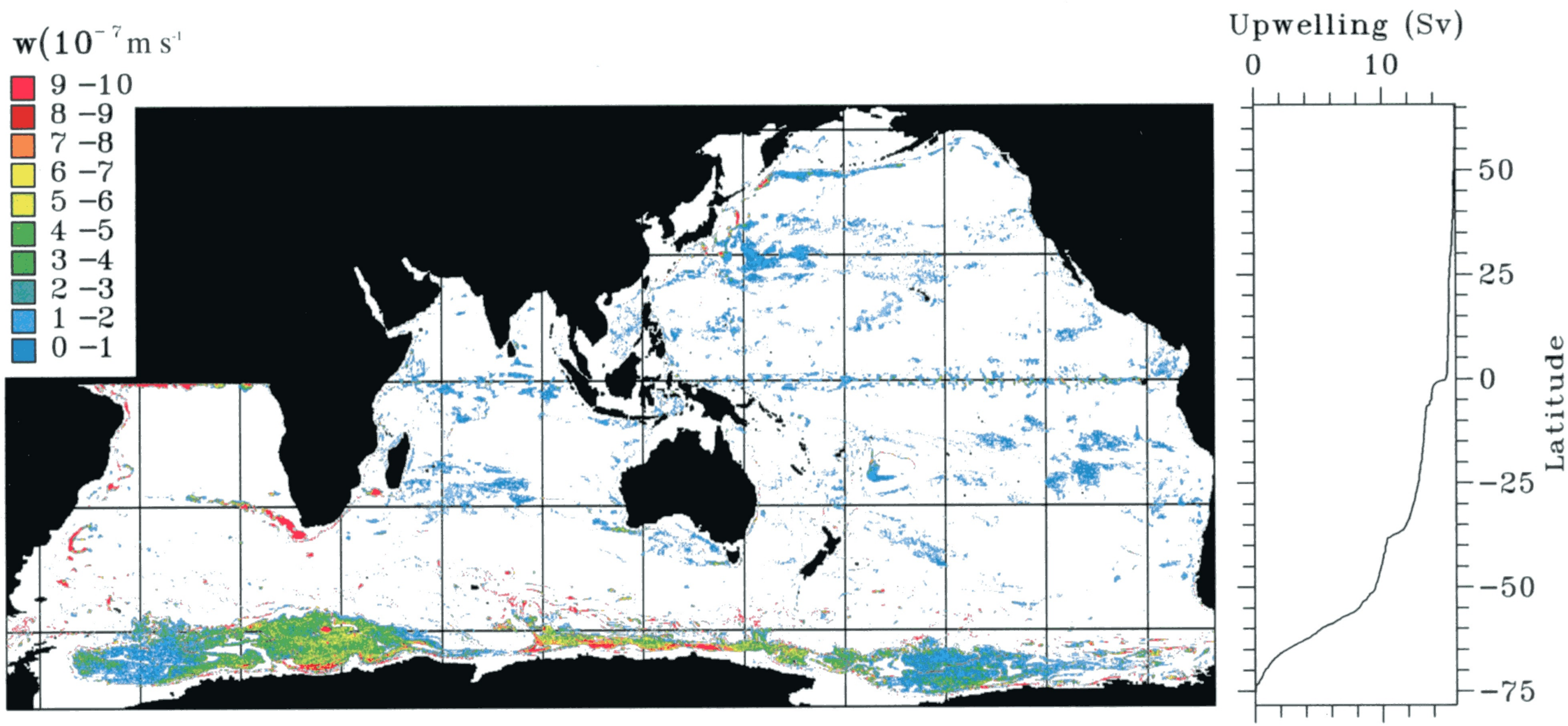
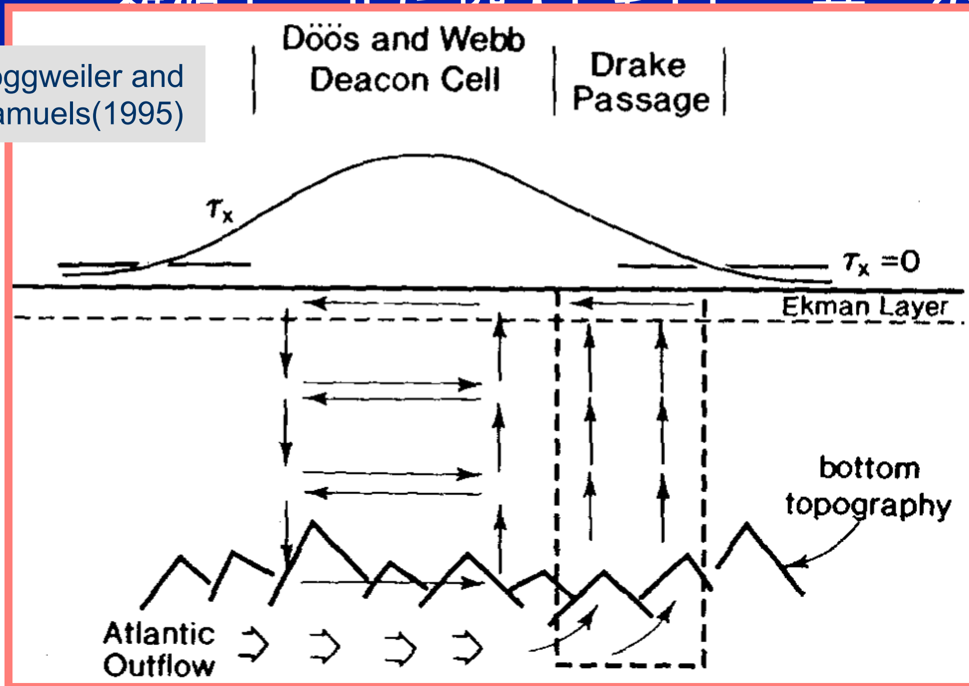


Plate 4.2.3 (see p. 212) Vertical velocity of the originally North Atlantic Deep Water as it reaches the isopycnal σ_0 = 1027.625 kg m^{-3} calculated from 1.58 million trajectories made using data from the OCCAM model. On the right is the meridionally integral of the vertical transport. The total transport of NADW in the model is 15.8 x 10^6 m^3 s^{-1}. (Adapted from Döös and Coward, 1997).

Döös and Coward(1997)

風応力の作用(Ekman suction)によって南極海で深層水が湧昇
→深層循環の別の駆動機構

Toggweiler and Samuels(1995)



$$fV=\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\int_E^W V dx = f^{-1}\left[P\right]_E^W$$

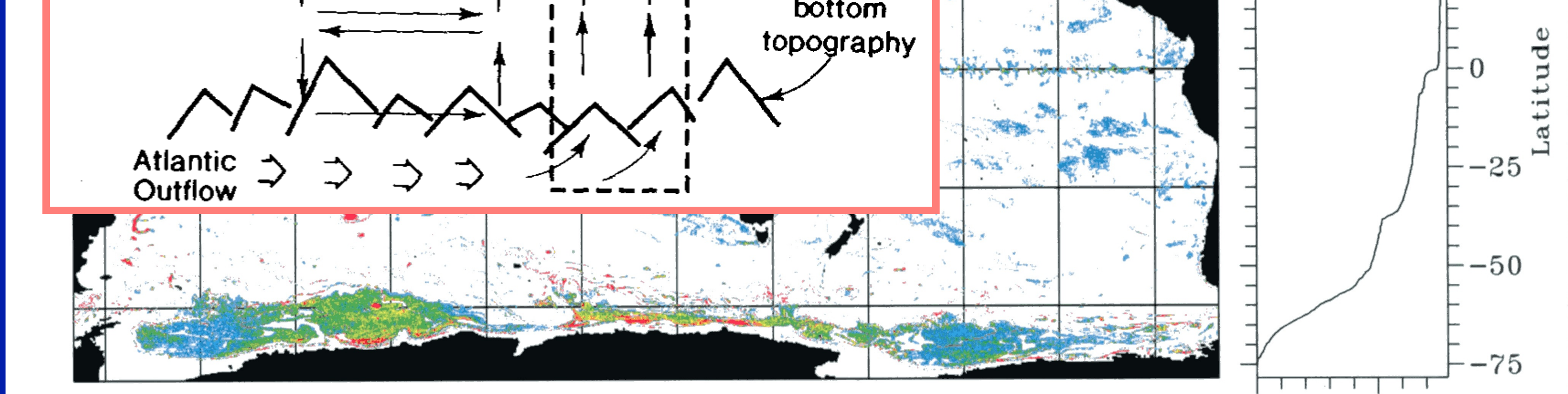
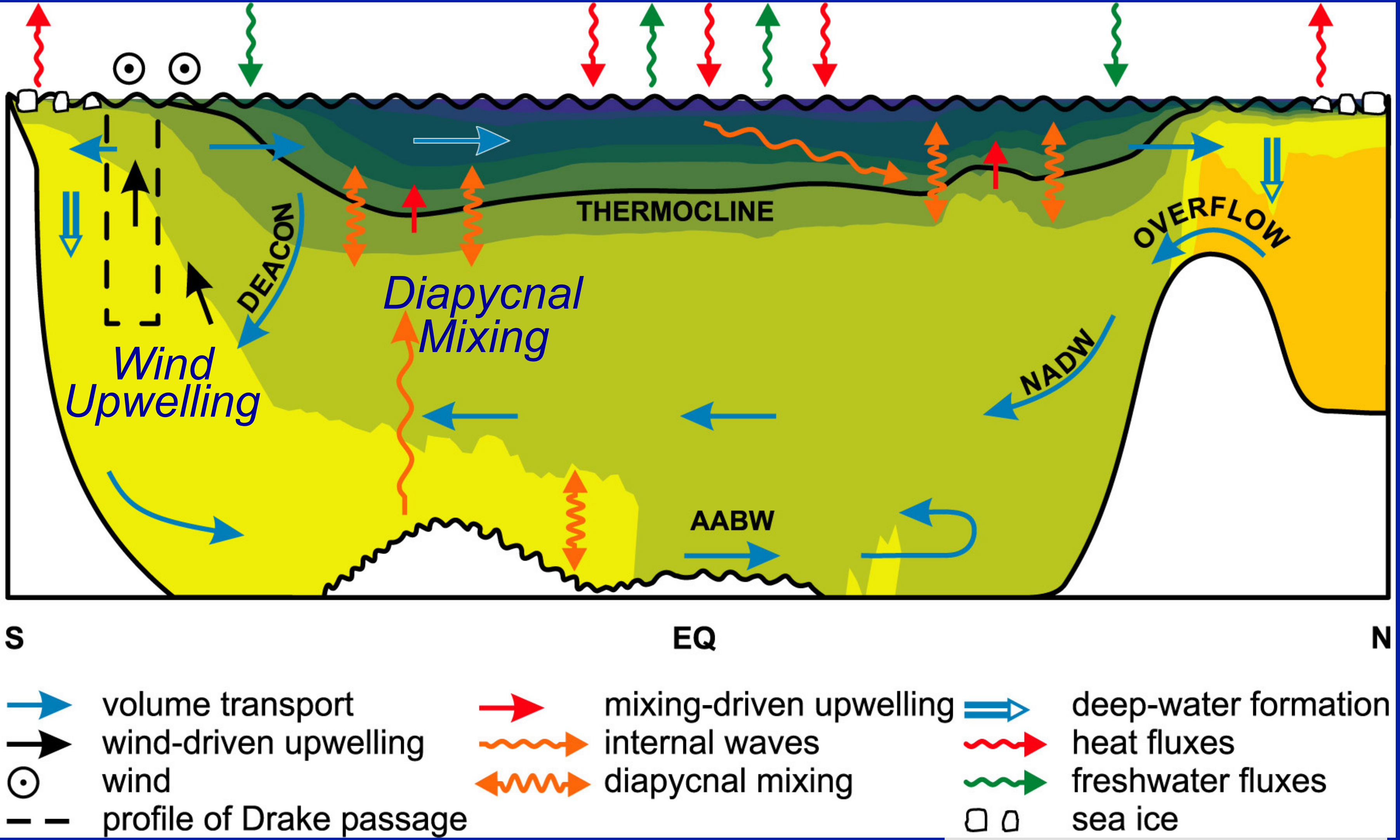


Plate 4.2.3 (see p. 212) Vertical velocity of the originally North Atlantic Deep Water as it reaches the isopycnal σ_0 = 1027.625 kg m^{-3} calculated from 1.58 million trajectories made using data from the OCCAM model. On the right is the meridionally integral of the vertical transport. The total transport of NADW in the model is 15.8 x 10^{6} m^{3} s^{-1}. (Adapted from Döös and Coward, 1997).

Döös and Coward(1997)

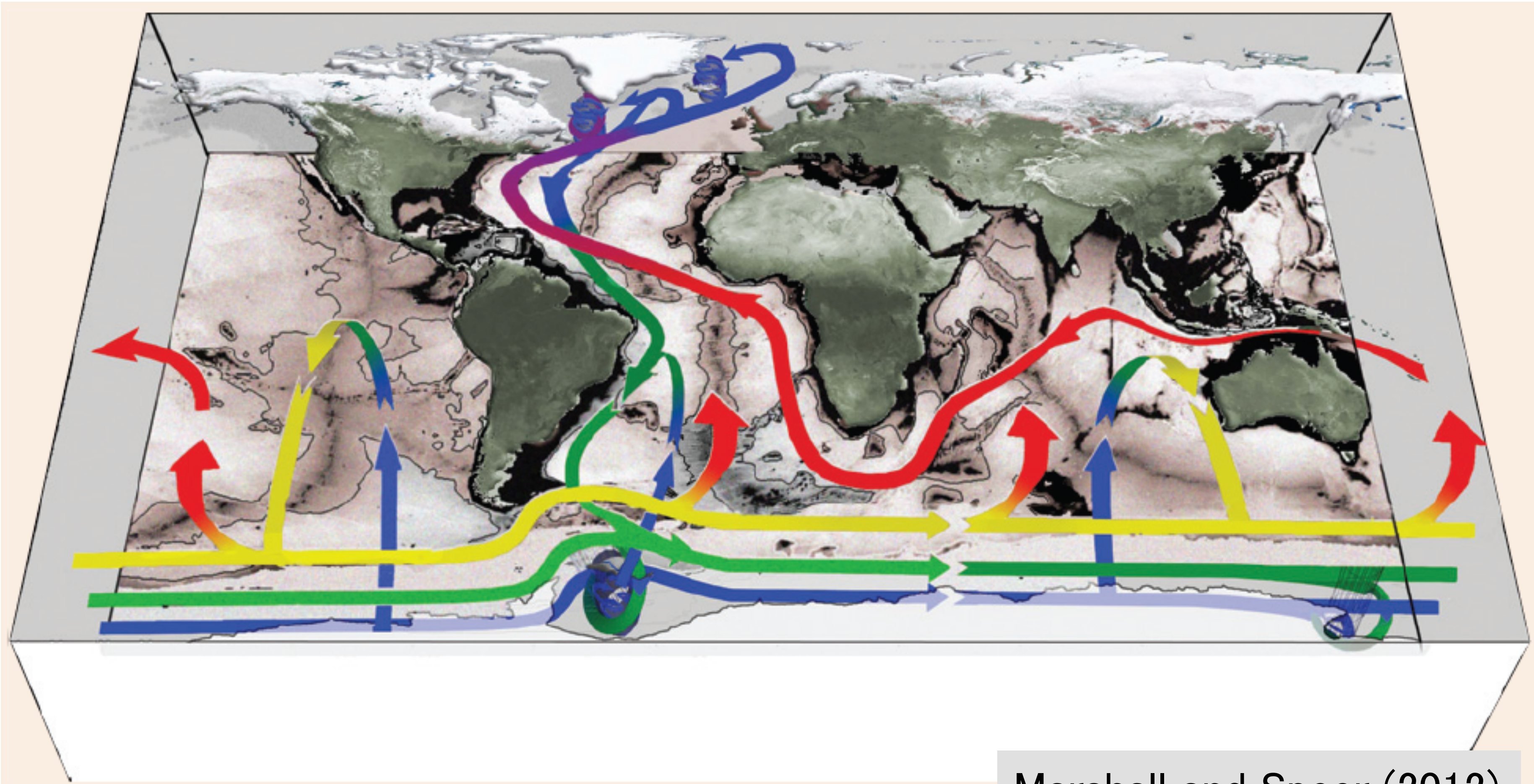
風応力の作用(Ekman suction)によって南極海で深層水が湧昇
→深層循環の別の駆動機構

深層循環の物理機構



Kuhlbrodt et al.(2007)

海洋深層大循環



Marshall and Speer (2012)

Webb and Suginohara(2001)のエネルギーダイアグラム

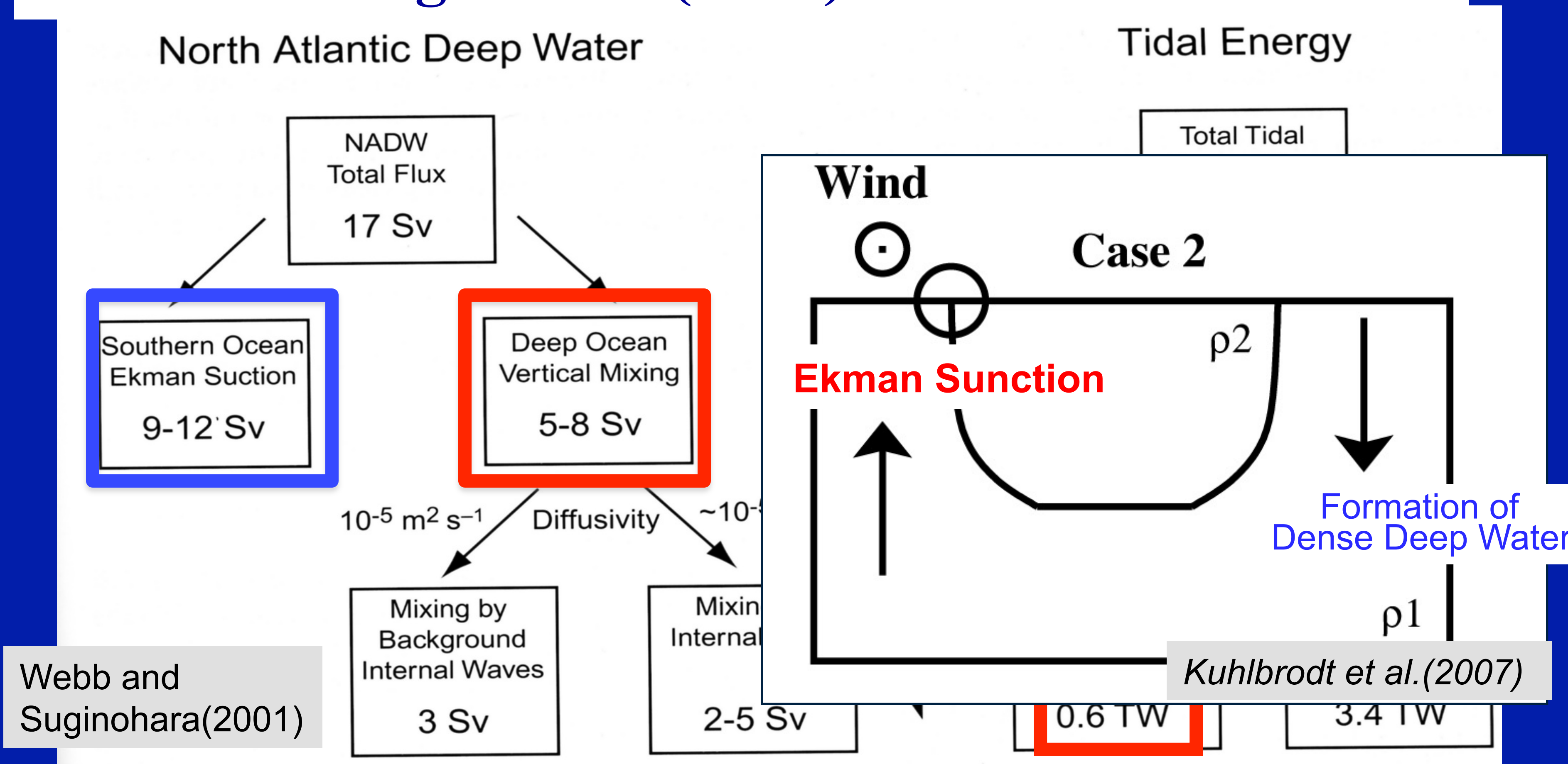


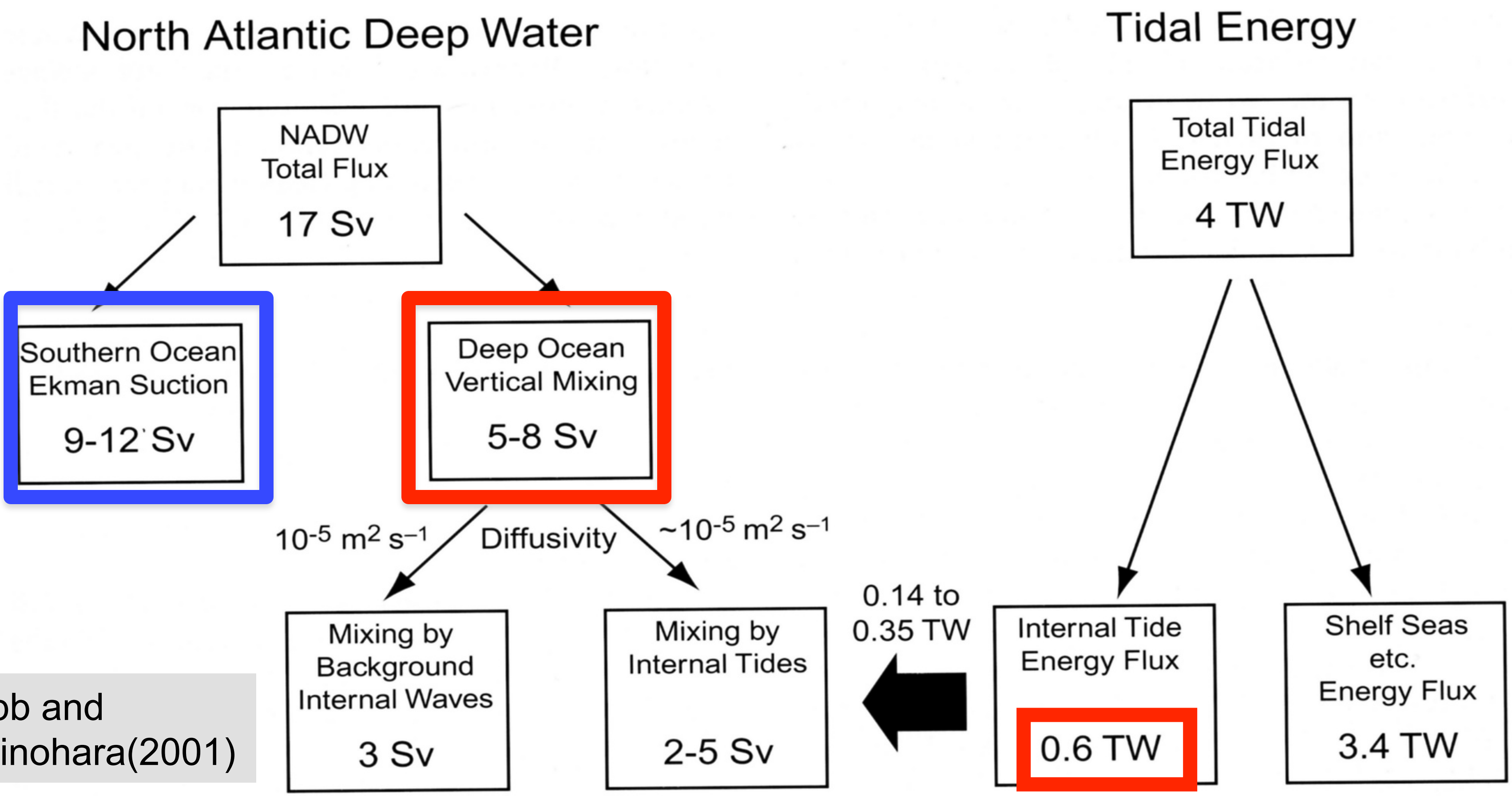
Fig. 4.2.4 Schematic of the proposed relationships between the upwelling of North Atlantic Deep Water in the present

The Required Mixing Energy=0.6TW
to maintain the thermohaline circulation

Internal Tide Energy=0.6TW
Available for deep ocean mixing

Other Energy Sources for Deep Ocean Mixing

Webb and Suginohara(2001)のエネルギーダイアグラム



Webb and Suginohara(2001)

Fig. 4.2.4 Schematic of the proposed relationships between the upwelling of North Atlantic Deep Water in the present

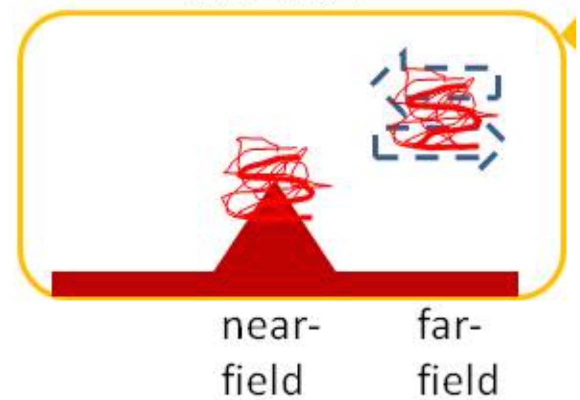
The Required Mixing Energy=0.6TW to maintain the thermohaline circulation

Internal Tide Energy=0.6TW Available for deep ocean mixing

Other Energy Sources for Deep Ocean Mixing

Oka and Niwa(2013) パラメタリゼーション

潮汐混合



内部潮汐励起源の近傍の乱流混合
鉛直分布
スケールハイト=500m

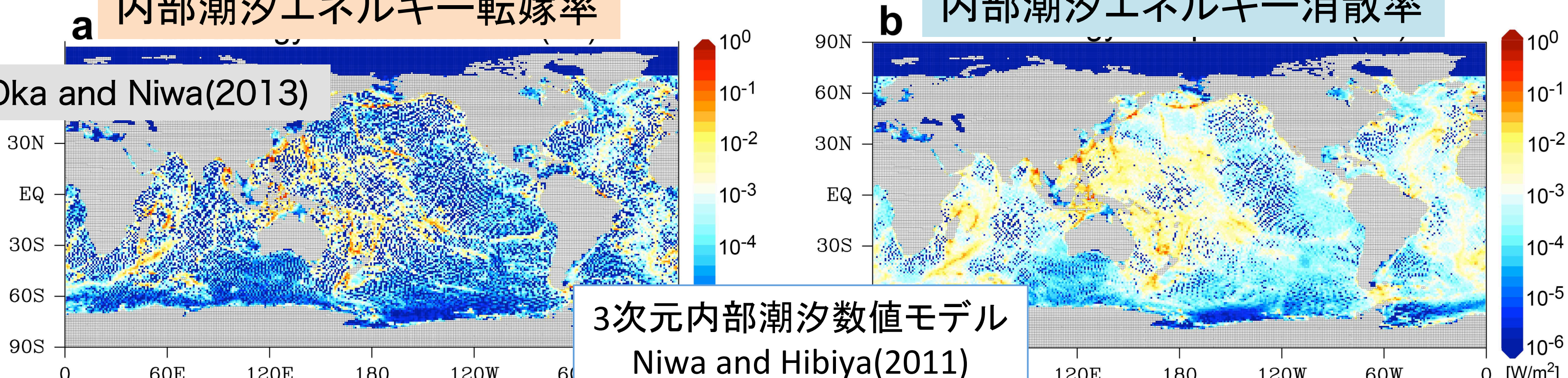
内部潮汐の励起源から離れた海域の乱流混合
鉛直一様分布

風起源の乱流混合

$$Kv(x,y,z)=\frac{\Gamma E_{NEAR}(x,y)F(z)}{\rho N^2}+\frac{\Gamma E_{FAR}(x,y)\frac{1}{H}}{\rho N^2}+10^{-5}m^2s^{-1}$$

内部潮汐エネルギー転嫁率

内部潮汐エネルギー消散率

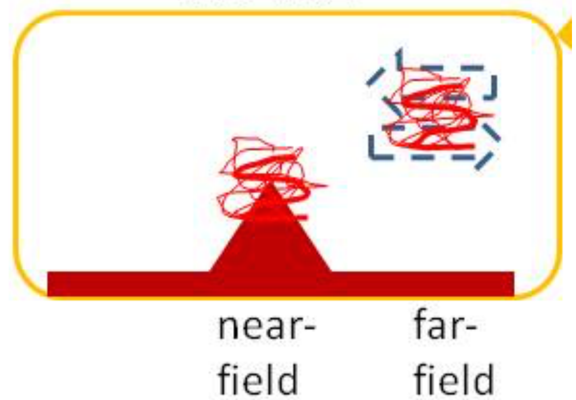


Oka and Niwa(2013)

3次元内部潮汐数値モデル
Niwa and Hibiya(2011)

Oka and Niwa(2013) パラメタリゼーション

潮汐混合



内部潮汐励起源の近傍の乱流混合
鉛直分布
スケールハイト=500m

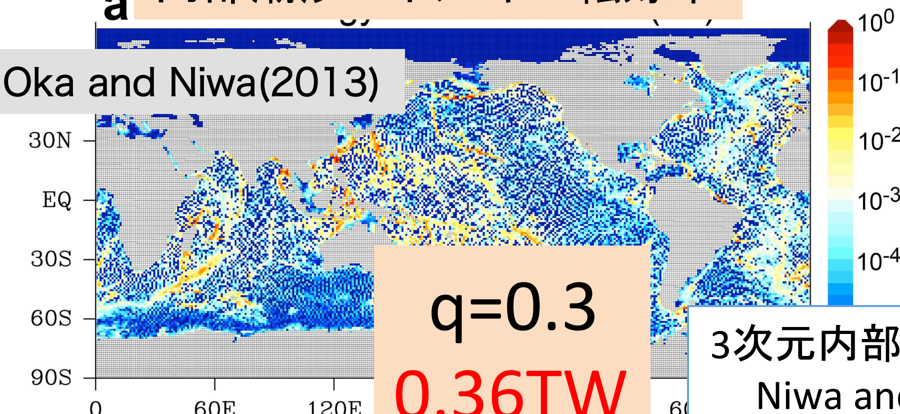
内部潮汐の励起源から離れた海域の乱流混合
鉛直一様分布

風起源の乱流混合

$$Kv(x,y,z)=\frac{\Gamma E_{NEAR}(x,y)F(z)}{\rho N^2}+\frac{\Gamma E_{FAR}(x,y)\frac{1}{H}}{\rho N^2}+10^{-5}m^2s^{-1}$$

0.2TW

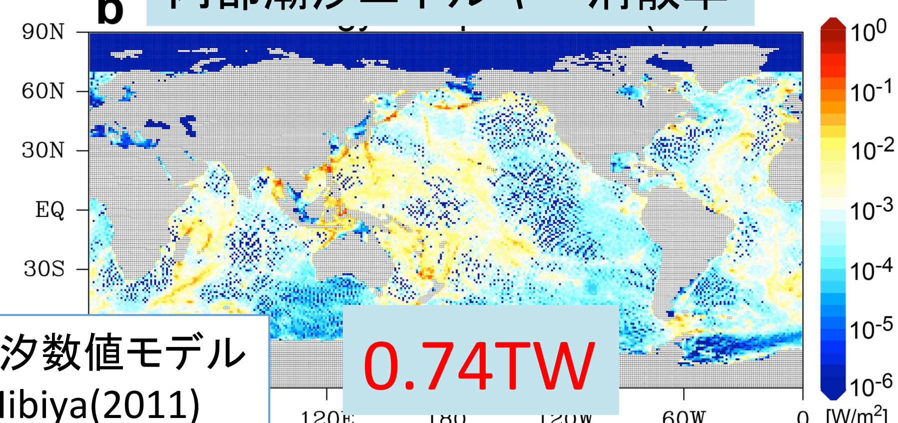
内部潮汐エネルギー転嫁率



Oka and Niwa(2013)

q=0.3
0.36TW

内部潮汐エネルギー消散率

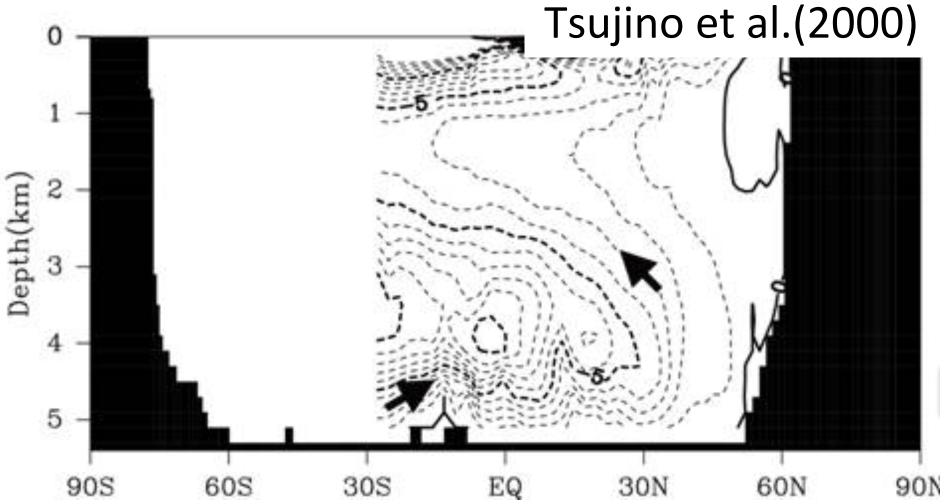


3次元内部潮汐数値モデル
Niwa and Hibiya(2011)

0.74TW

乱流混合エネルギー合計＝1.3TW

水平一様な鉛直拡散係数分布での実験



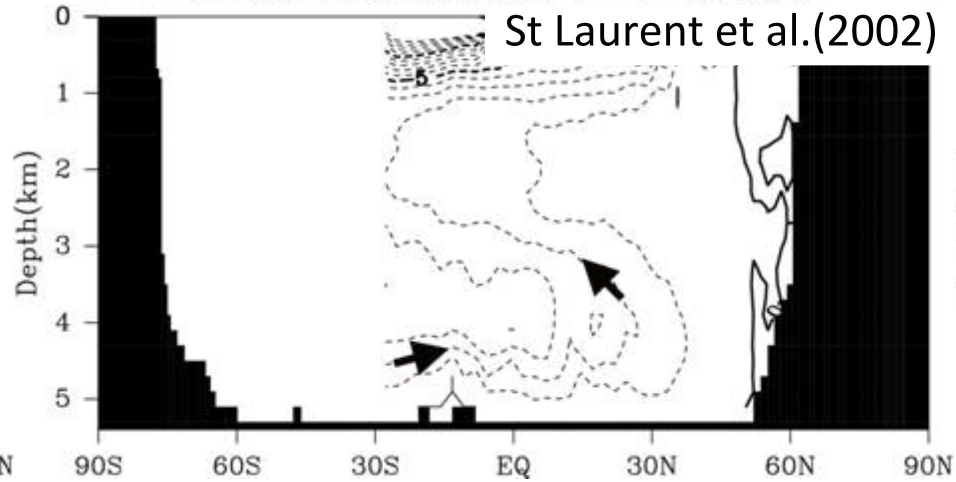
循環量10.2SV

太平洋の子午面循環

Oka and Niwa(2013)

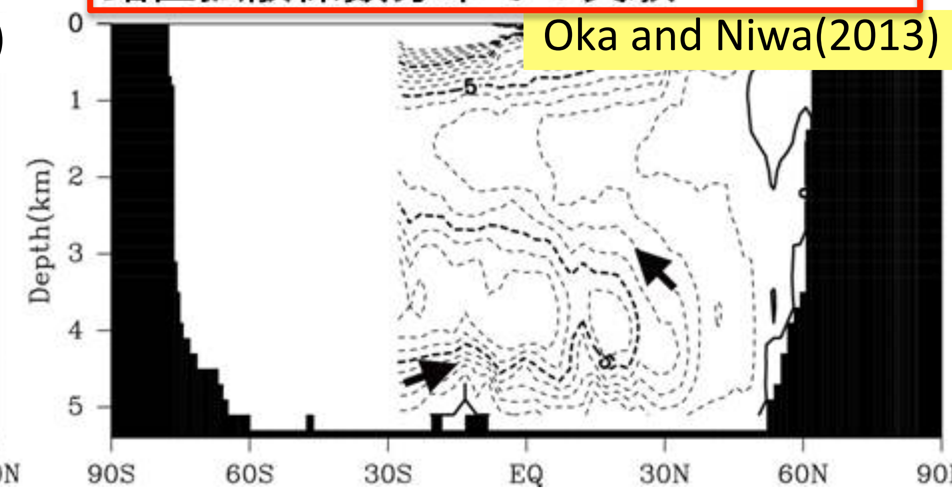
観測結果7-10SV

near-field mixingに着目した従来の方法による鉛直拡散係数分布での実験



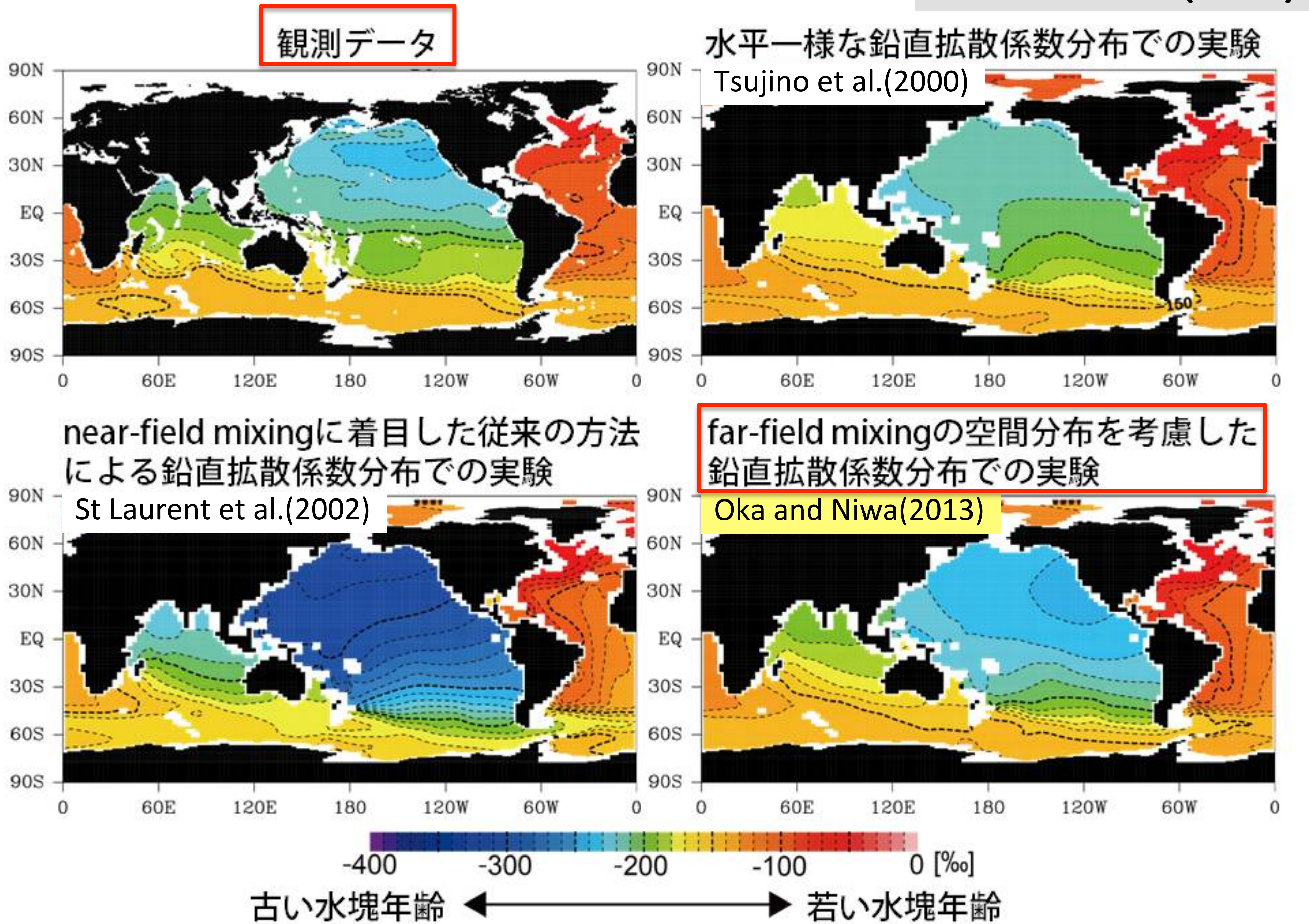
循環量4SV

far-field mixingの空間分布を考慮した鉛直拡散係数分布での実験



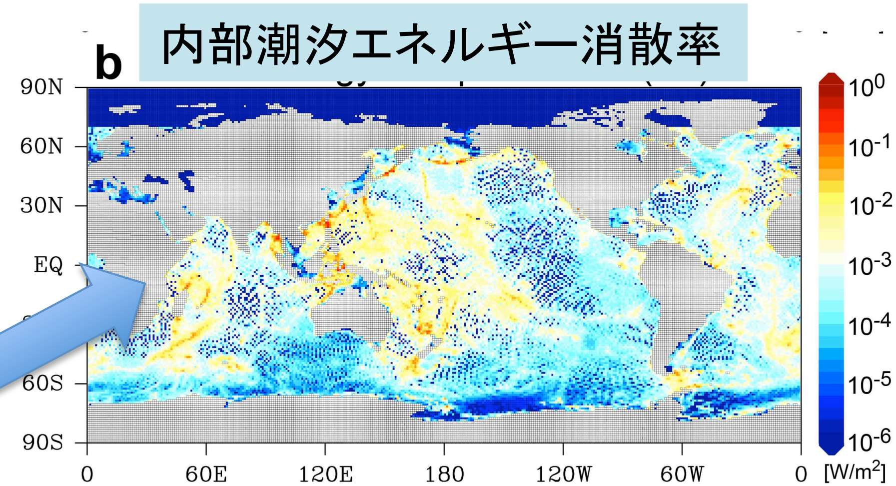
循環量8SV

Oka and Niwa(2013)



Oka and Niwa(2013)パラメタリゼーションの問題点

1. 現実の内部潮汐波の消散率の空間分布は不明



3次元内部潮汐モデル
Niwa and Hibiya(2011)

現実の内部潮汐波の**エネルギーカスケード過程**は解像できない。

内部波(GMスペクトル)相互作用、地衡流相互作用、
高波数地形による散乱、海底地形の臨界反射など

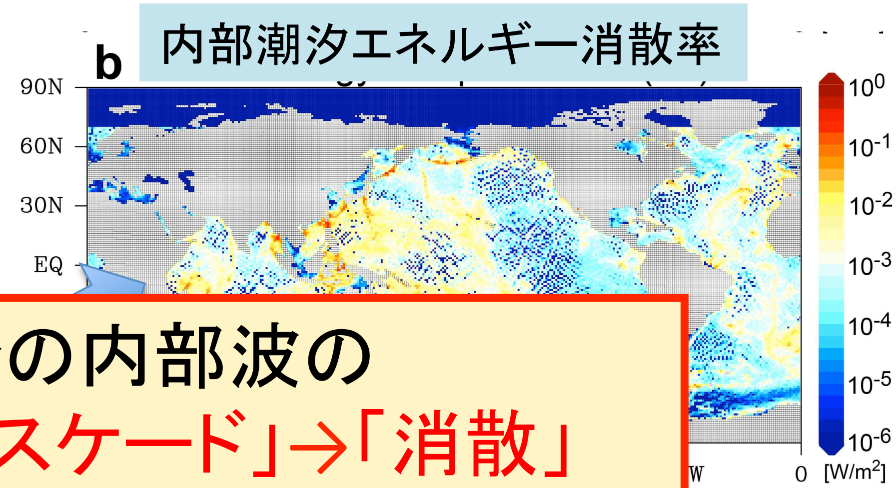
2. 内部波の励起源近傍及び離れた海域での乱流混合の鉛直分布は不明

$$F_{NEAR}(z) \propto \exp(-\frac{z}{500m}), \quad F_{FAR}(z) = \frac{1}{H}$$

仮定:一定のスケールハイト　　　仮定:鉛直一様な分布

Oka and Niwa(2013)パラメタリゼーションの問題点

1. 現実の内部潮汐波の
消散率の空間分布は不明



全球スケールでの内部波の
「励起」→「伝播」→「カスケード」→「消散」
のエネルギーバランスの解明が必要。

ない。

内部波(GMスペクトル)相互作用、地衡流相互作用、
高波数地形による散乱、海底地形の臨界反射など

2. 内部波の励起源近傍及び離れた海域
での乱流混合の鉛直分布は不明

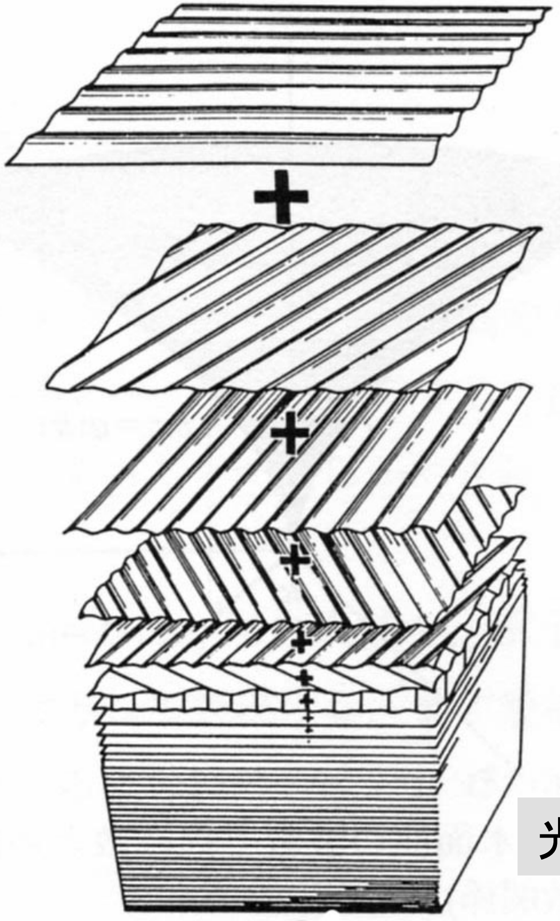
$$F_{NEAR}(z) \propto \exp\left(-\boxed{\frac{z}{500m}}\right),\quad F_{FAR}(z) = \boxed{\frac{1}{H}}$$

仮定：一定のスケールハイト　　仮定：鉛直一様な分布

5. 海洋内部波の普遍スペクトルモデル (Garrett-Munk (GM)スペクトル）

海洋中の内部波場:様々な波数・周波数を持つ無数の内部波のランダムな重ね合わせ。

【例】風波の波面
様々な伝播方向・波長を持つ
無数のサイン波のランダムな重ね合わせ



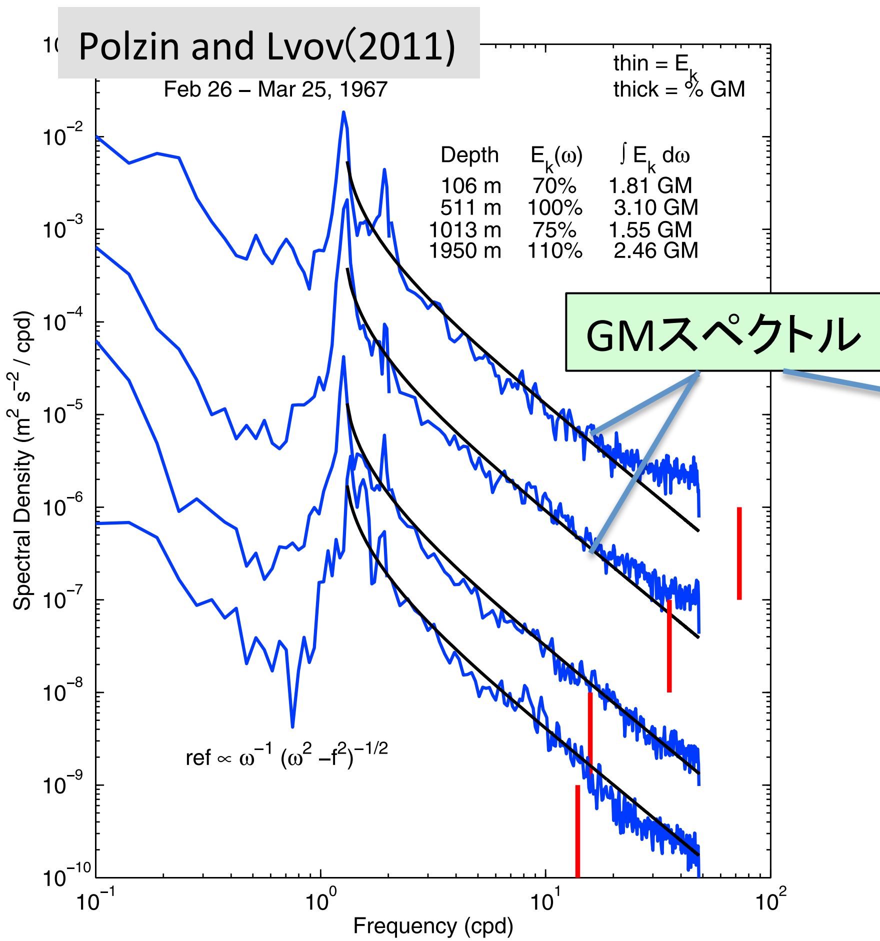
光易(1995)

内部波場の場合:
空間三次元＋時間一次元的な変動
→水平＋鉛直方向に伝播する内部波のランダムな重ね合わせ

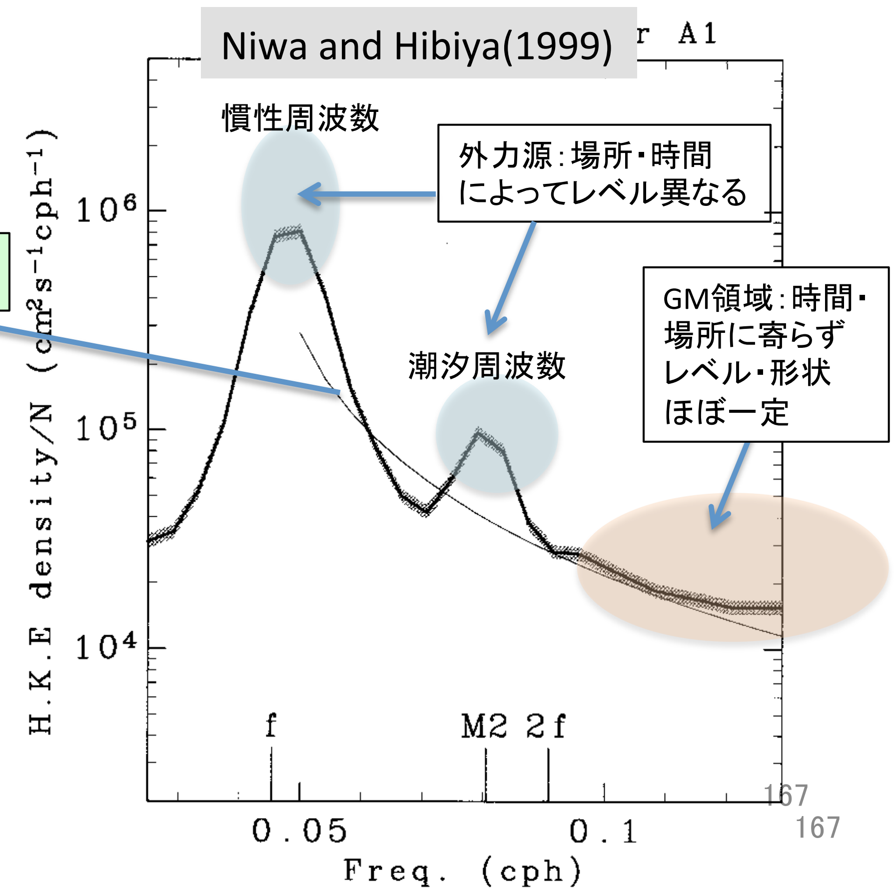
海洋内部波の普遍スペクトル

海洋深層で観測される内部波スペクトルの(規格化した)エネルギーレベルとその形状が場所や時間に寄らずほぼ一定に保たれている。
⇒Garrett-Munk(GM)スペクトルと呼ばれている。

西部大西洋で観測された
水平流速の周波数スペクトル



西部太平洋で観測された
水平流速の周波数スペクトル



Garrett& Munk (1972, 1975), Munk(1981)

断片的な観測データから海洋内部波場を記述する
経験的なスペクトルモデルを構築した。

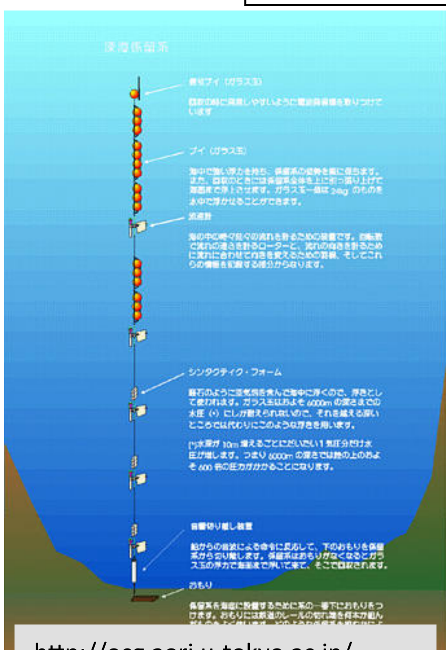
※内部波場の完全な情報：$\boxed{\vec{u}(x,y,z,t),\ \rho'(x,y,z,t)}$ 空間3次元＋時間1次元の各物理量のデータ

実際に得られる観測データ＝内部波場の断片的な情報

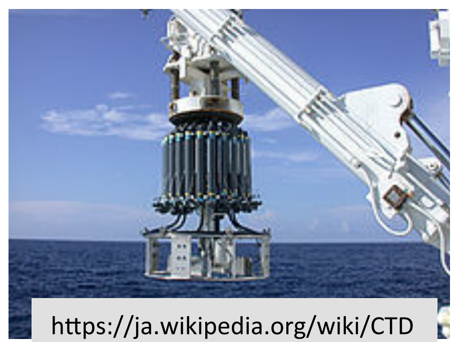
係留観測 $\vec{u}(\cancel{x},\cancel{y},\cancel{z},t),\ \rho'(\cancel{x},\cancel{y},\cancel{z},t)$

投下観測 $\vec{u}(\cancel{x},\cancel{y},z,\cancel{t}),\ \rho'(\cancel{x},\cancel{y},z,\cancel{t})$

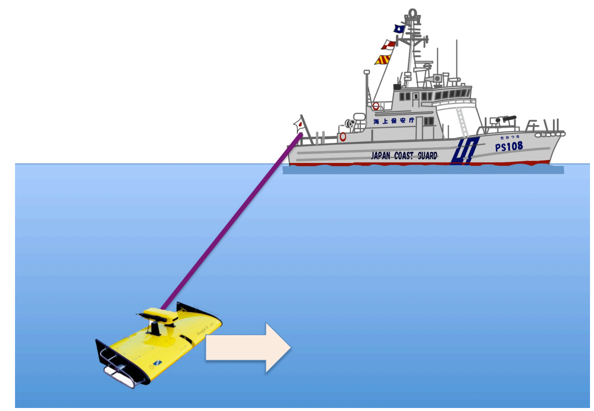
曳航観測 $\vec{u}(x,\cancel{y},\cancel{z},\cancel{t}),\ \rho'(x,\cancel{y},\cancel{z},\cancel{t})$



http://ocg.aori.u-tokyo.ac.jp/research/Marine1997/poster.html



https://ja.wikipedia.org/wiki/CTD



※内部波場の完全な情報：

$\vec{u}(x,y,z,t),\ \rho'(x,y,z,t)$

エネルギースペクトル

$E(k,l,+m,-m,\omega)$

上向き伝播　下向き伝播

GMスペクトルモデルの仮定

・鉛直方向の対称性

上向きと下向きの区別なし

E(m)=E(-m)

$E(k,l,m,\omega)$

鉛直波数振幅

$m = |m| > 0$

・水平方向の等方性

水平波数ベクトル (k, l) の方向に依存しない

$E(\kappa,m,\omega)$

水平波数ベクトル振幅

$\kappa = \sqrt{k^2 + l^2} > 0$

・線形内部波理論が成立

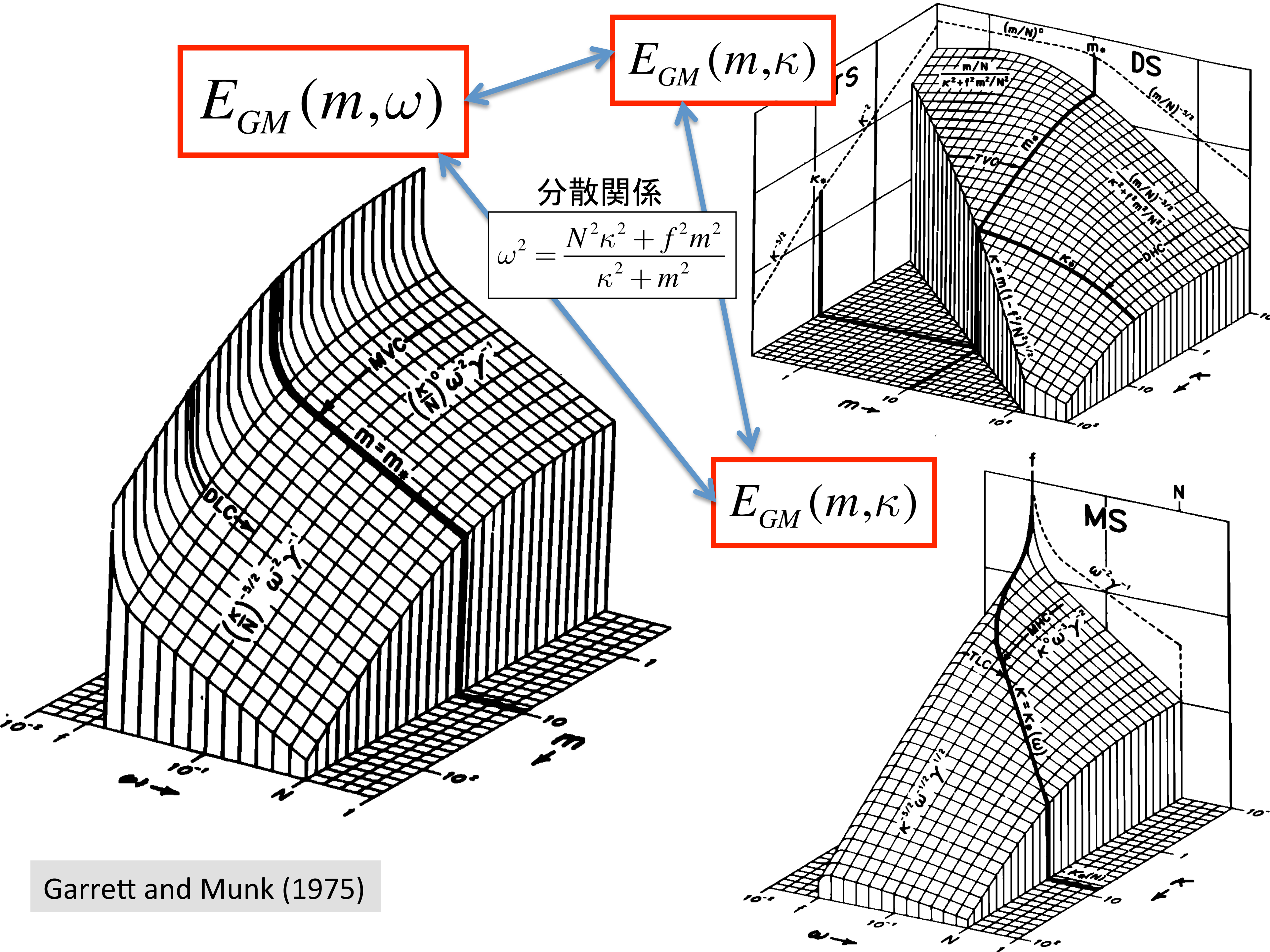
$E(m,\omega)$

観測データにフィットするスペクトル関数を求める

⇒GMスペクトル

分散関係式

$$\omega^2 = \frac{N^2\kappa^2 + f^2 m^2}{\kappa^2 + m^2} \Rightarrow \kappa(m,\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}}\,m$$



Garrett and Munk (1975)

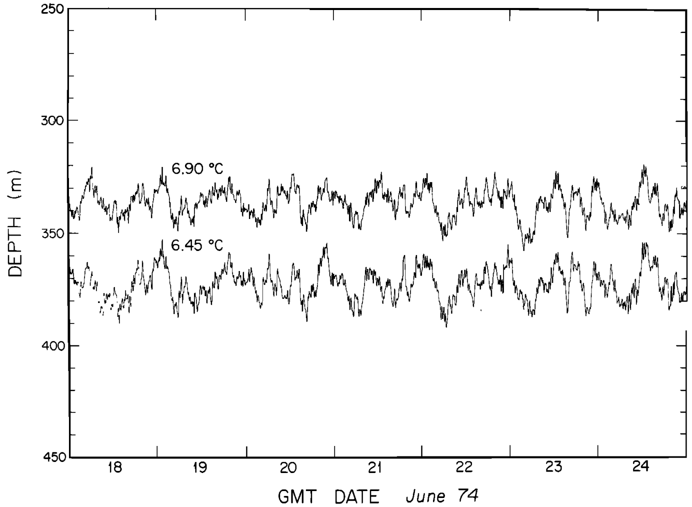
係留観測データ

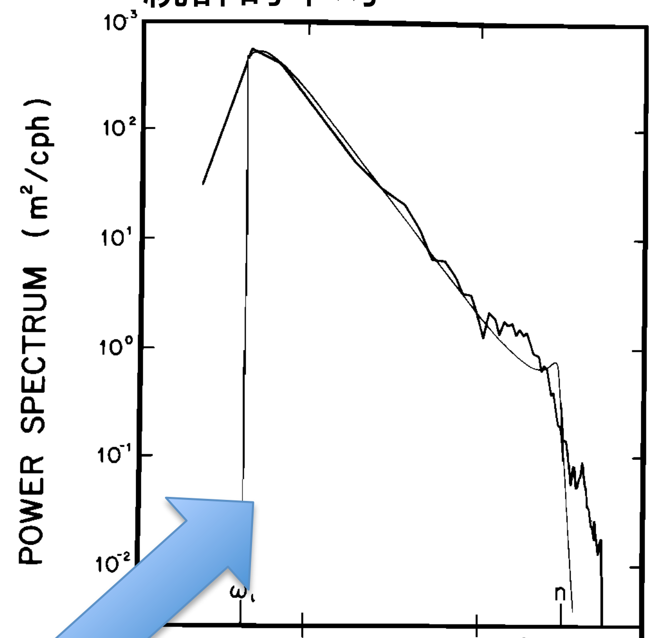
フーリエ変換　パワースペクトル

鉛直変位時系列 $\eta(t)$ → $\tilde{\eta}(\omega)$ → $P_{\eta^2}(\omega)$

$$= E\left[\tilde{\eta}(\omega)\tilde{\eta}^*(\omega)\right]$$

統計的平均





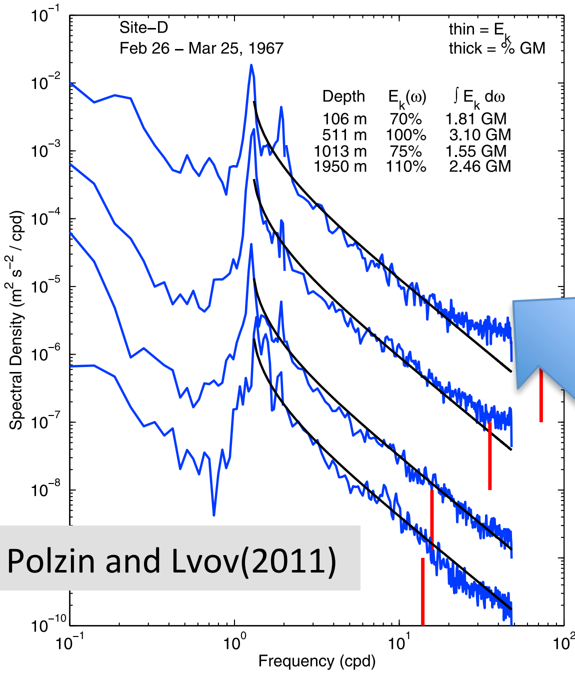
Cairns and Williams(1976)

$$\tilde{\eta}(\omega)\tilde{\eta}^*(\omega) = \frac{\tilde{w}(\omega)\tilde{w}^*(\omega)}{\omega^2},\ E \approx \frac{\rho^*}{2}\frac{N^2}{\omega^2 - f^2}|\tilde{w}|^2$$ 静水圧近似

$$P_{\eta^2}(\omega,m) \approx \frac{2}{\rho^*}\frac{\omega^2 - f^2}{N^2\omega^2}E(\omega,m)$$

$$\boxed{P_{\eta^2}(\omega) \approx \frac{2}{\rho^*}\frac{\omega^2 - f^2}{N^2\omega^2}\int_0^\infty E(m,\omega)\,dm}$$

水平流速の周波数スペクトル



Polzin and Lvov(2011)

$$KE = \frac{1}{2}\rho^*\overline{\left(u^2+v^2\right)} = \frac{\rho^*}{4}\left(\frac{N^2}{\omega^2}\cdot\frac{\omega^2+f^2}{\omega^2-f^2}\right)\left|\tilde{w}\right|^2$$

$$E = KE + PE = \frac{\rho^*}{2}\frac{N^2}{\omega^2-f^2}\left|\tilde{w}\right|^2$$

$$\Rightarrow \overline{u^2} = \overline{v^2} = \frac{1}{2\rho^*}\frac{\omega^2+f^2}{\omega^2}E$$

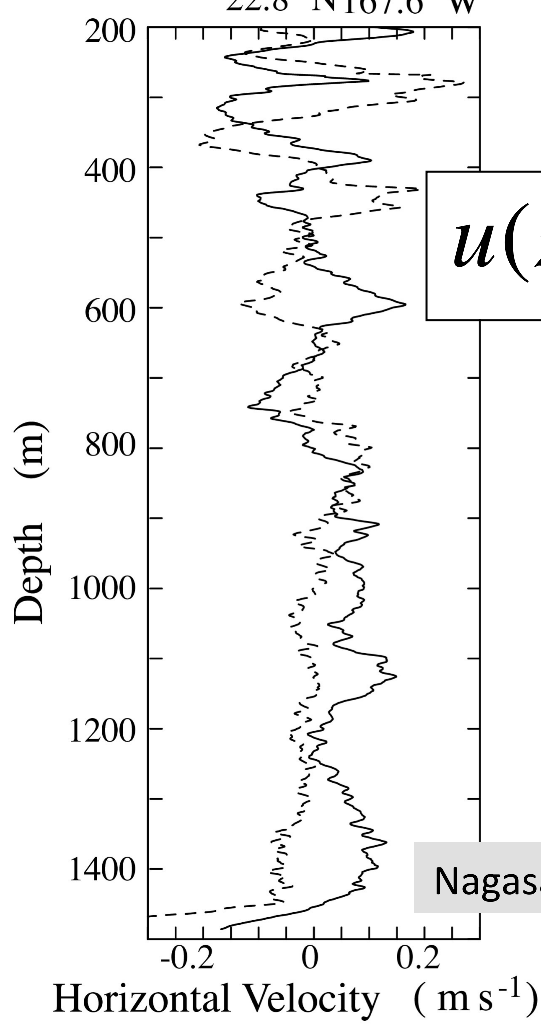
$$P_{u^2}(\omega) \approx \frac{1}{2\rho^*}\frac{\omega^2+f^2}{\omega^2}\int_0^\infty E(m,\omega)\,dm$$

※観測データの周波数スペクトルにフィットする関数形

$$\int_0^\infty E(m,\omega)\,dm \;\propto\; B(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{f}{\omega\sqrt{\omega^2-f^2}}$$

規格化 $\int_f^\infty B(\omega) = 1$

投下観測(鉛直プロファイル)データ

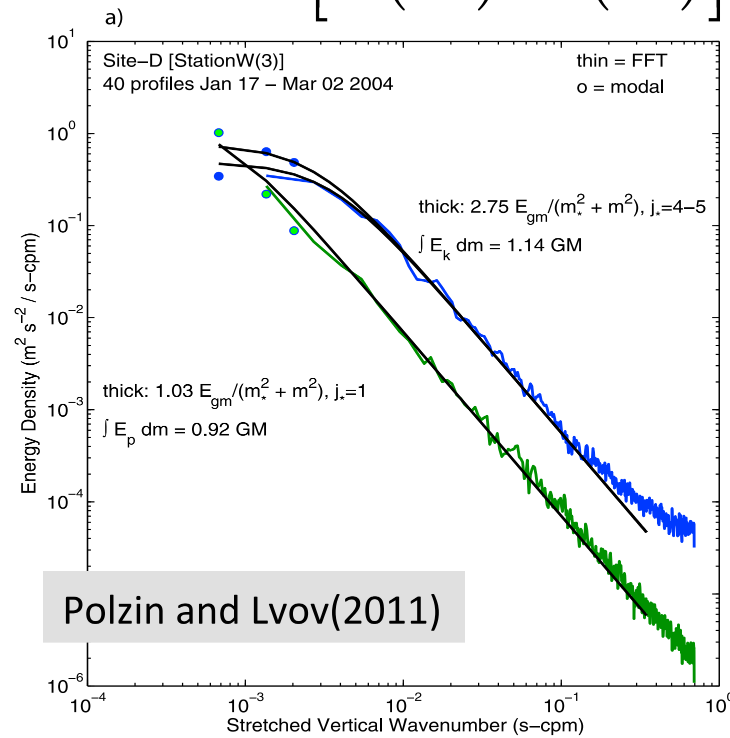


Nagasawa et al.(2002)

$$u(z) \rightarrow \tilde{u}(m) \rightarrow P_{u^2}(m) = E\left[\tilde{u}(m)\tilde{u}^*(m)\right]$$

フーリエ変換

パワースペクトル



Polzin and Lvov(2011)

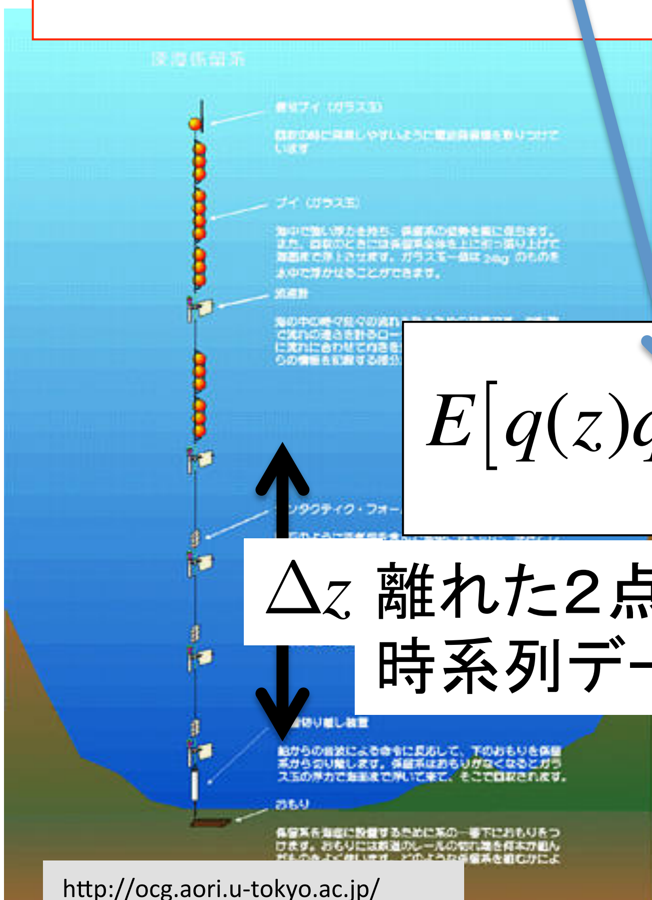
$$\boxed{\int_f^N E(m,\omega)\,d\omega \;\propto\; H(m) = \left(\frac{1}{m^2+m_*^2}\right) \Bigg/ \left(\int_0^\infty \frac{1}{m^2+m_*^2}\,dm\right)}$$

m_*＝定数　規格化 $\int_0^\infty H(m) = 1$

ウィナーヒンチンの定理

パワースペクトル $P_{q^2}(m)$ と自己相関 $r_{qq}(\Delta z)$ はフーリエ変換の関係

$$r_{qq}(\Delta z) = E[q(z)q(z+\Delta z)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{q^2}(m) e^{im\Delta z} dm$$

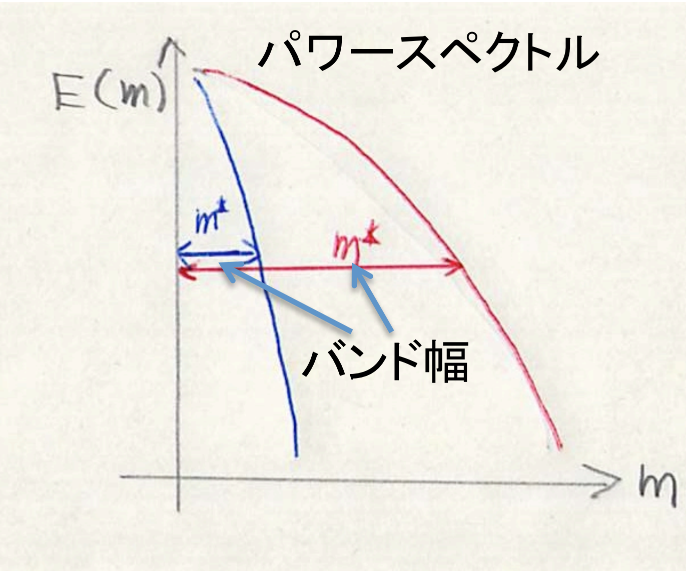


$$E[q(z)q(z+\Delta z)] = \frac{1}{T}\int_0^T q(t,z)q(t,z+\Delta z)dt$$

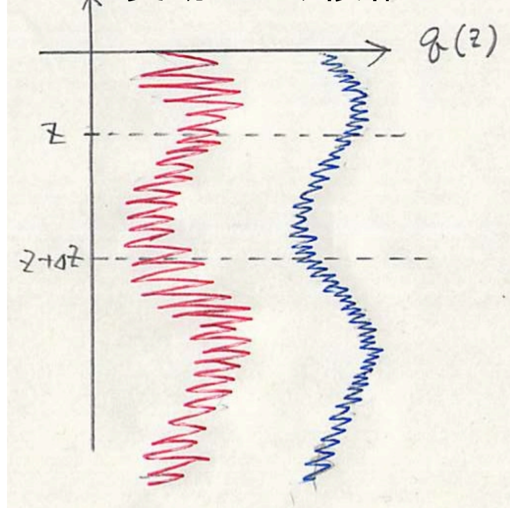
Δz 離れた2点の係留点で得られた
時系列データの間の相関

http://ocg.aori.u-tokyo.ac.jp/
research/Marine1997/poster.html

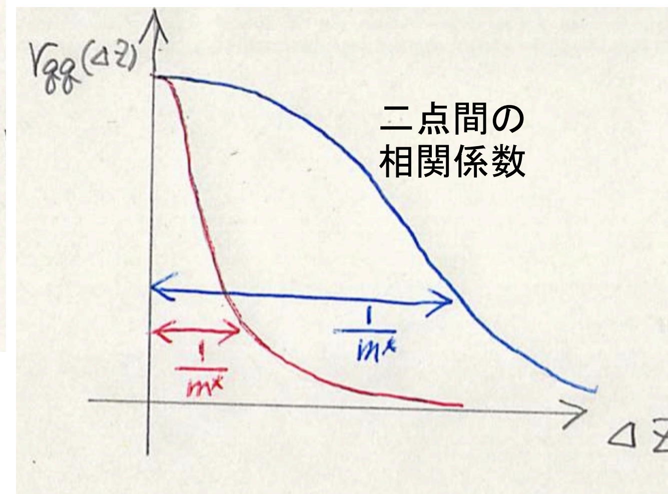
ウィナーヒンチンの定理のイメージ



バンド幅が広いと
変動がより複雑



バンド幅が広いと
二点間の相関係数は
距離に応じて速く減衰



自己相関係数 → パワースペクトルの広がりの程度（バンド幅）の推定

コヒーレンス　相関係数を周波数に分解する

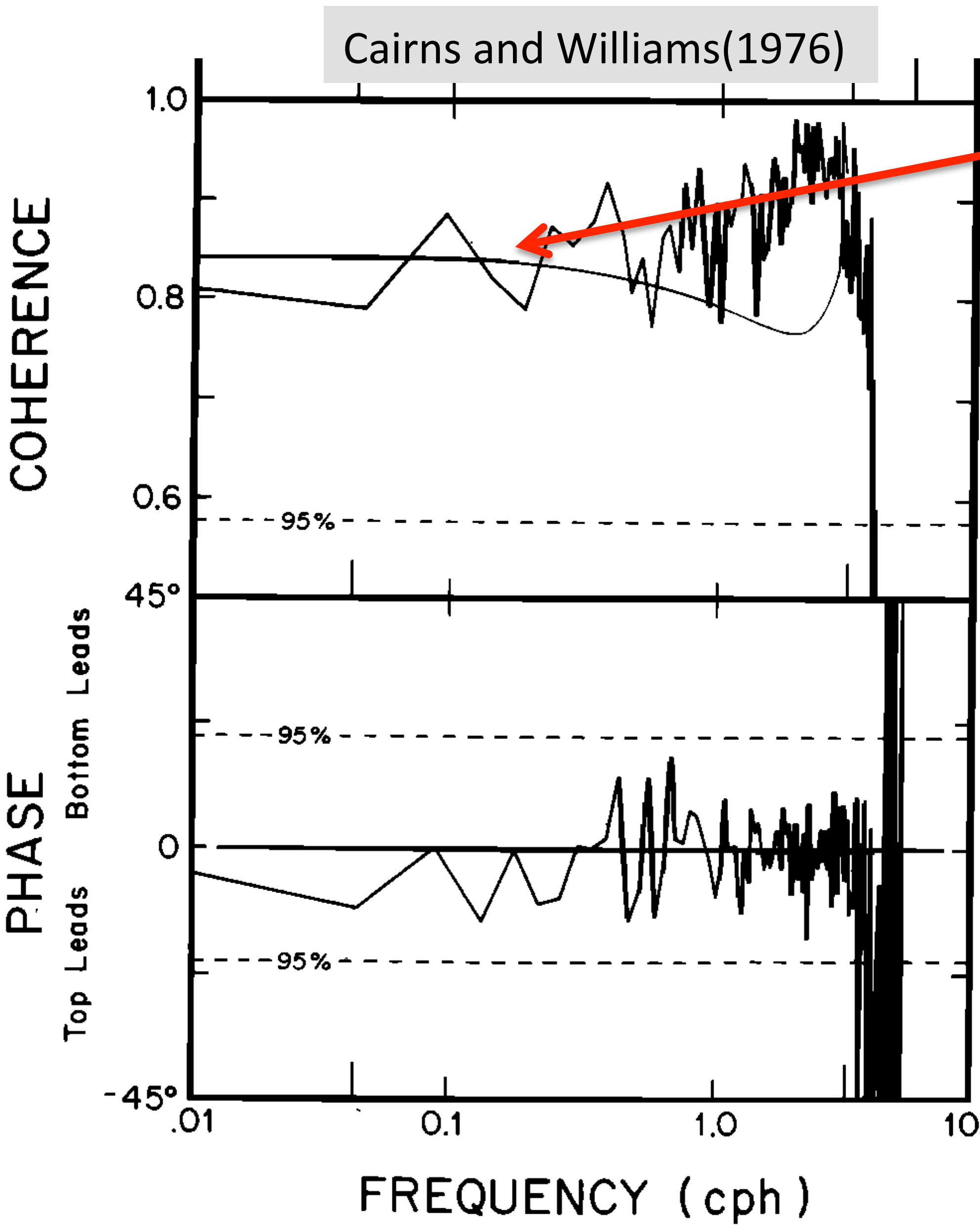
$$Coh\left[\omega:\ q(t,z),\ q(t,z+\Delta z)\right]=\frac{E\left[\tilde{q}_z(\omega)\tilde{q}^*_{z+\Delta z}(\omega)\right]}{\sqrt{E\left[\left|\tilde{q}_z(\omega)\right|^2\right]}\sqrt{E\left[\left|\tilde{q}_{z+\Delta z}(\omega)\right|^2\right]}}$$

各周波数についての相関係数

$$Coh\left[\omega;q(z),q(z+\Delta z)\right]\ \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}P_{q^2}(m,\omega)e^{im\Delta z}dm$$

コヒーレンス → $E(m,\omega)$の各周波数ごとに鉛直波数に関してのスペクトルの広がり程度（鉛直波数バンド幅）が推定できる

異なる水深(Δz=40m) 鉛直変位のコヒーレンス



コヒーレンスが周波数に依存しない

鉛直波数スペクトルのバンド幅が周波数に依存しない。

各周波数ごとに鉛直波数スペクトルの形状が変わらないこと示唆。

スペクトル関数が変数分離形

$$E(m,\omega) \propto B(\omega) H(m)$$

GM(1981)スペクトルモデル（Munk,1981）

$$E_{GM}(m,\omega)=E_{GM}^{0}\rho^{*}N(z)N_{0}b^{2}B(\omega)H\left(j(m)\right)$$

WKBスケーリング

$E_{GM}^{0}=6.3\times10^{-5}$ 無次元定数

$N(z)=N_{0}e^{z/b}$ $N_{0}=5\times10^{-3}(rad/s)$
$b=1300m$

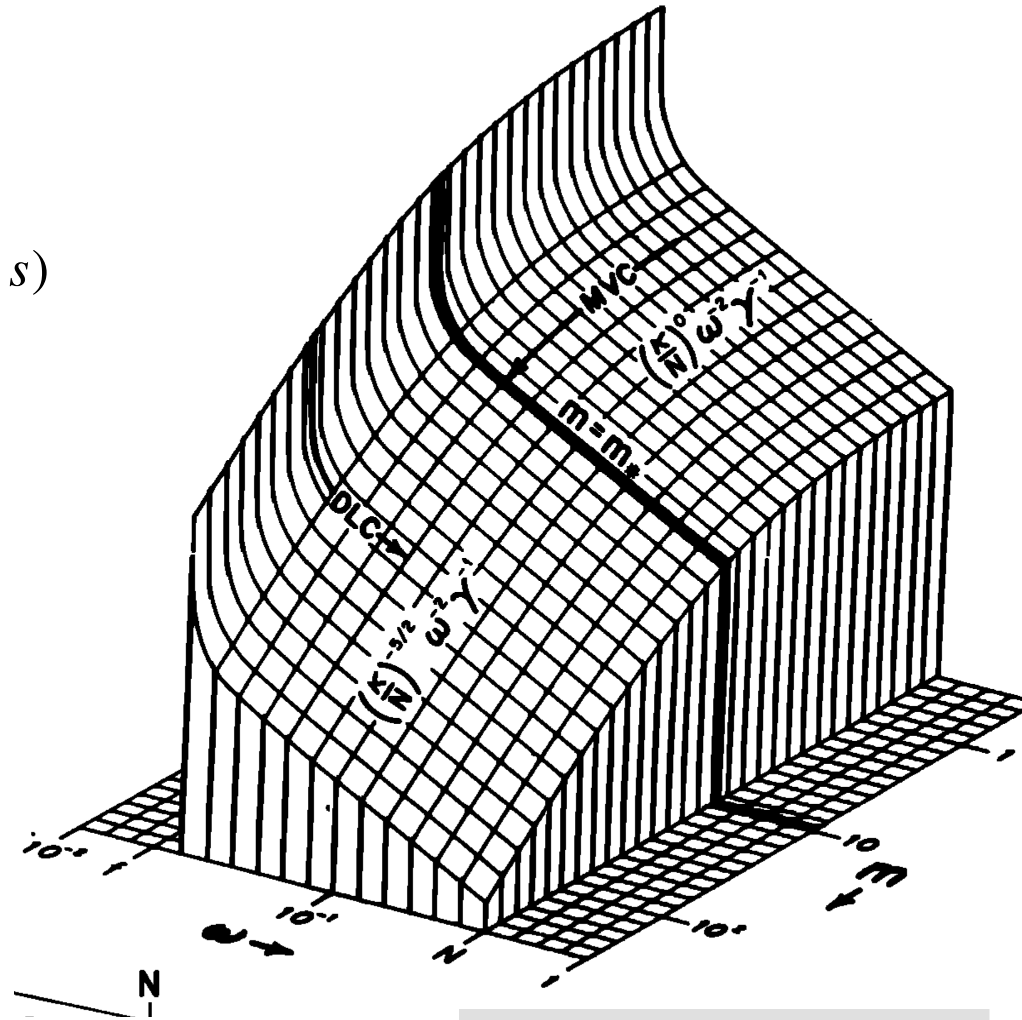
$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{f}{\omega\sqrt{\omega^{2}-f^{2}}}$$

$$H(j)=\left(\frac{1}{j^{2}+j_{*}^{2}}\right)\Bigg/\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2}+j_{*}^{2}}\right)$$

$j=$ 鉛直モード数, $j^{*}=3$

鉛直モードj⇔鉛直波数m(WKB近似）

$$m(j,z)=\frac{\pi}{b}\frac{N(z)}{N_{0}}j$$

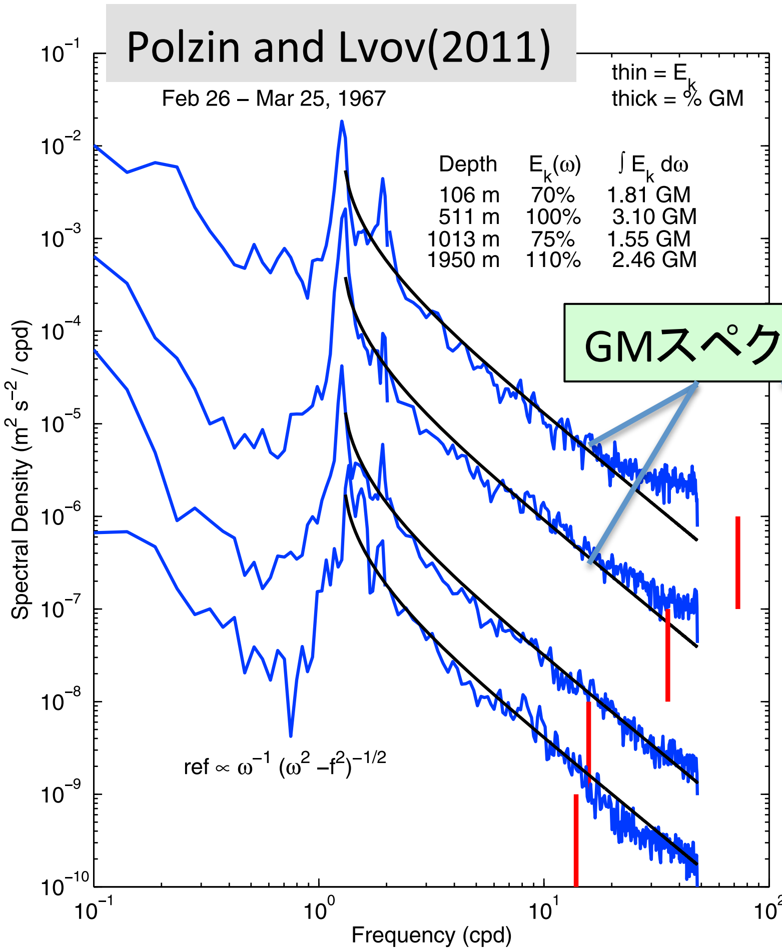


Garrett and Munk (1975)

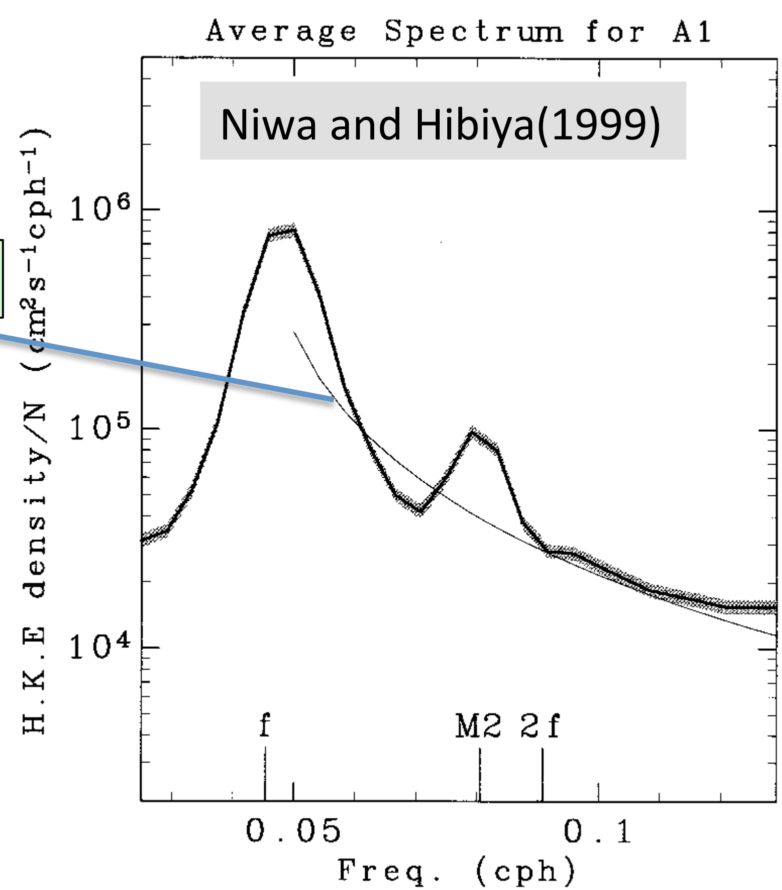
④海洋内部波の普遍平衡スペクトル

海洋深層で観測される内部波スペクトルの形状と規格化したエネルギーレベルが場所や時間に寄らずほぼ一定に保たれている。
⇒Garrett-Munk(GM)スペクトル。

西部大西洋で観測された
水平流速の周波数スペクトル

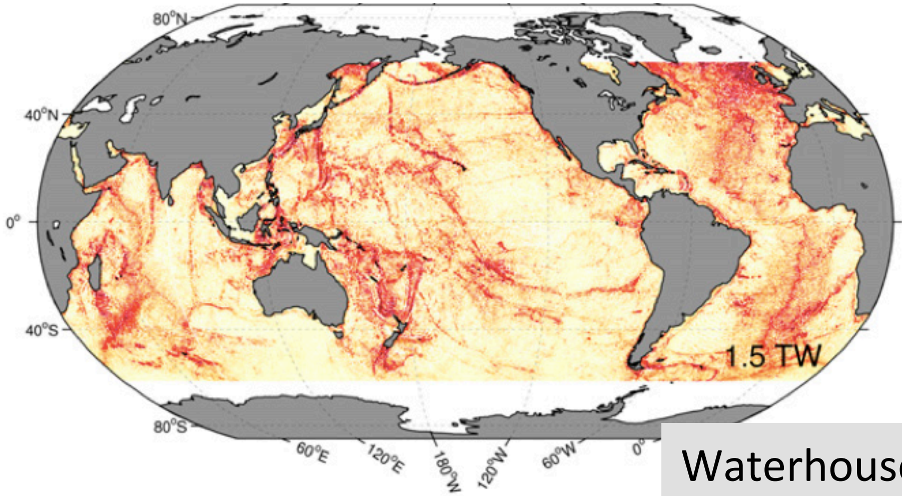


西部太平洋で観測された
水平流速の周波数スペクトル



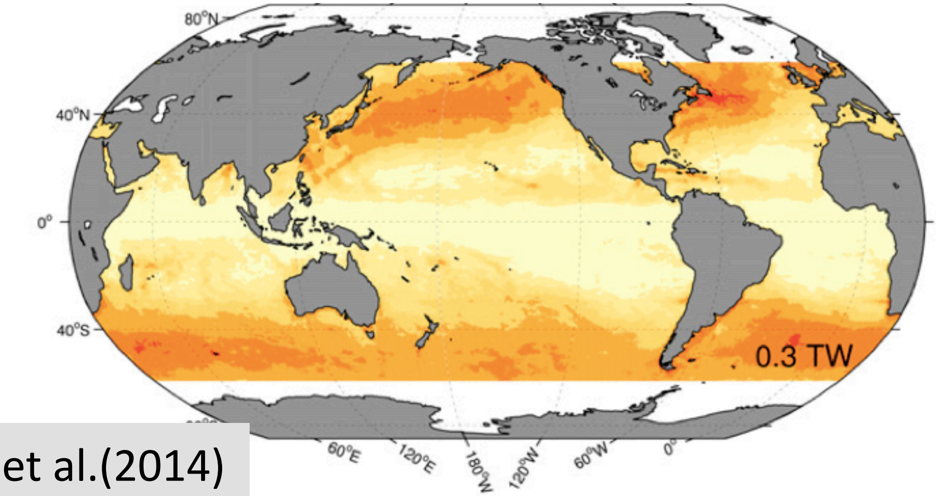
GMスペクトルの普遍性の維持プロセス？

内部潮汐の励起源分布



(a) Internal tides

大気擾乱起源の近慣性波の励起源分布



(b) Near-inertial waves

Waterhouse et al.(2014)

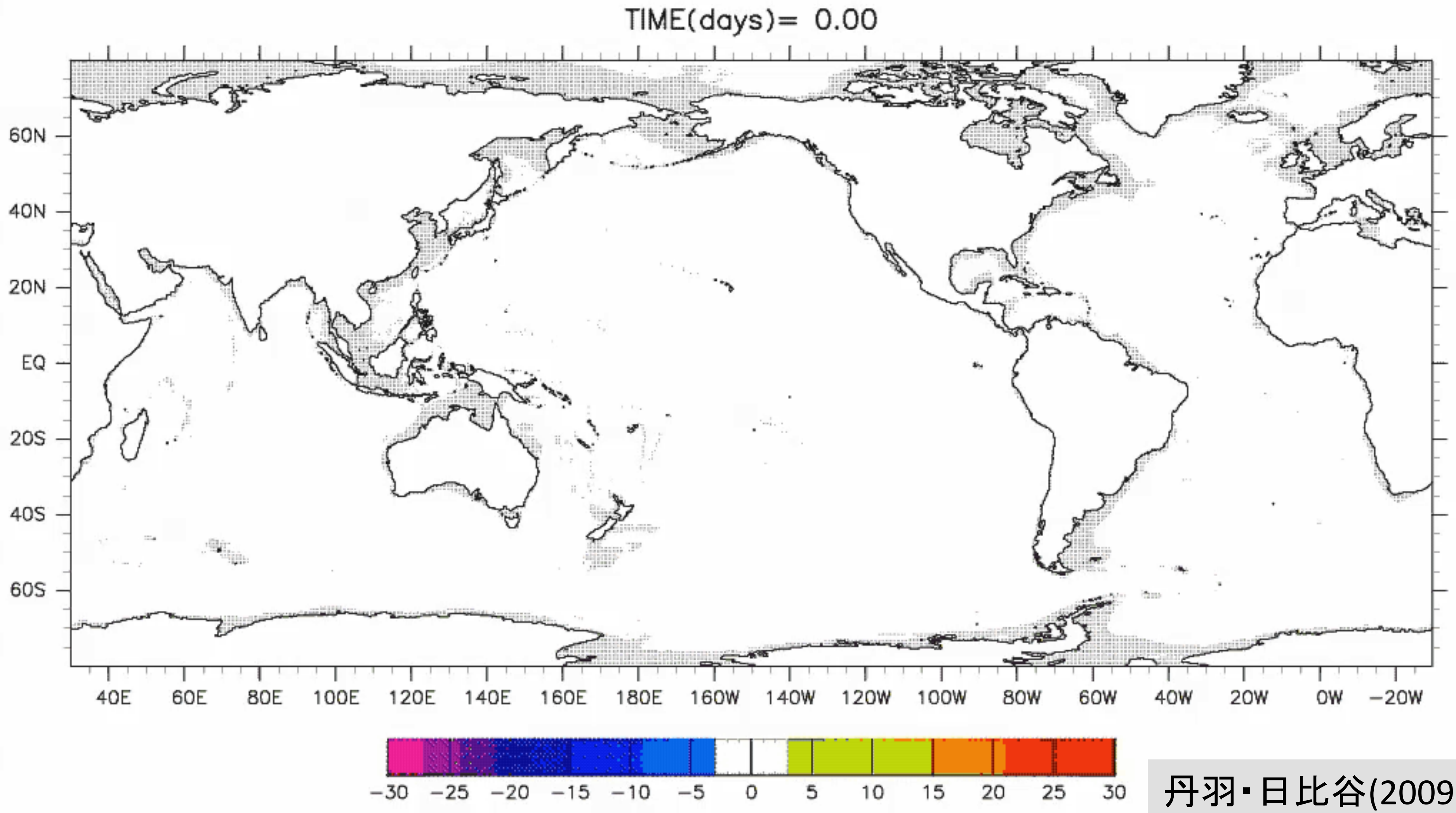
内部波の励起源は空間的に局在している

にもかかわらず

GMスペクトルの普遍性＝外洋の内部波スペクトルのレベルや形状は場所や時間によらずほぼ一定に保たれている。

GMスペクトルの維持プロセスは完全には解明されていない。

内部波の長距離伝播



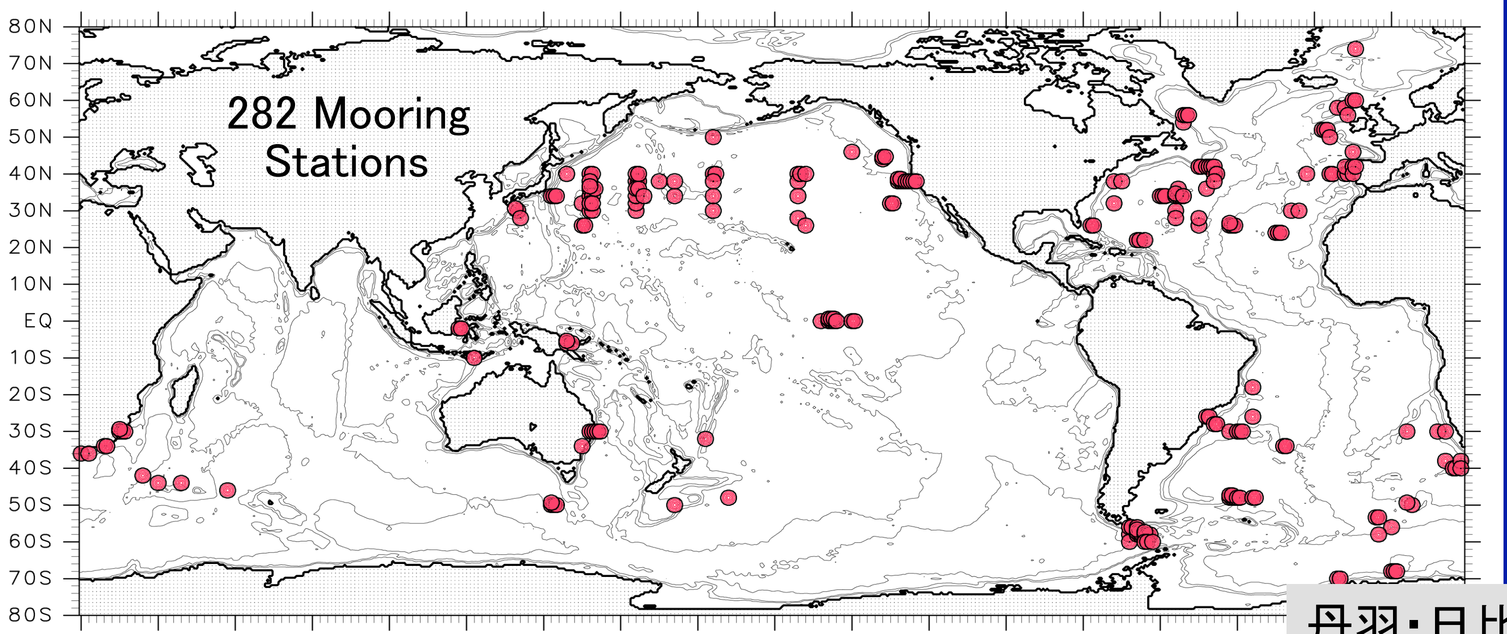
丹羽・日比谷(2009)

内部潮汐波は大洋中を10000km以上伝播できる。
⇒GMスペクトルの普遍的エネルギーレベルを維持？

Current Meter Data of Mooring Obs.

☆ The Buoy Data Archive of Oregon State University

- Sea floor depth ≥ 1000m
- Current meter depth: Zcm > 100m, Zcm < sea floor depth-100.
- Sampling interval ≤ 180min.
- Record length ≥ 60 days
- Number of current meters ≥ 2
- Min(Zcm) < Zero-crossing of the 1st mode wave < Max(Zcm)



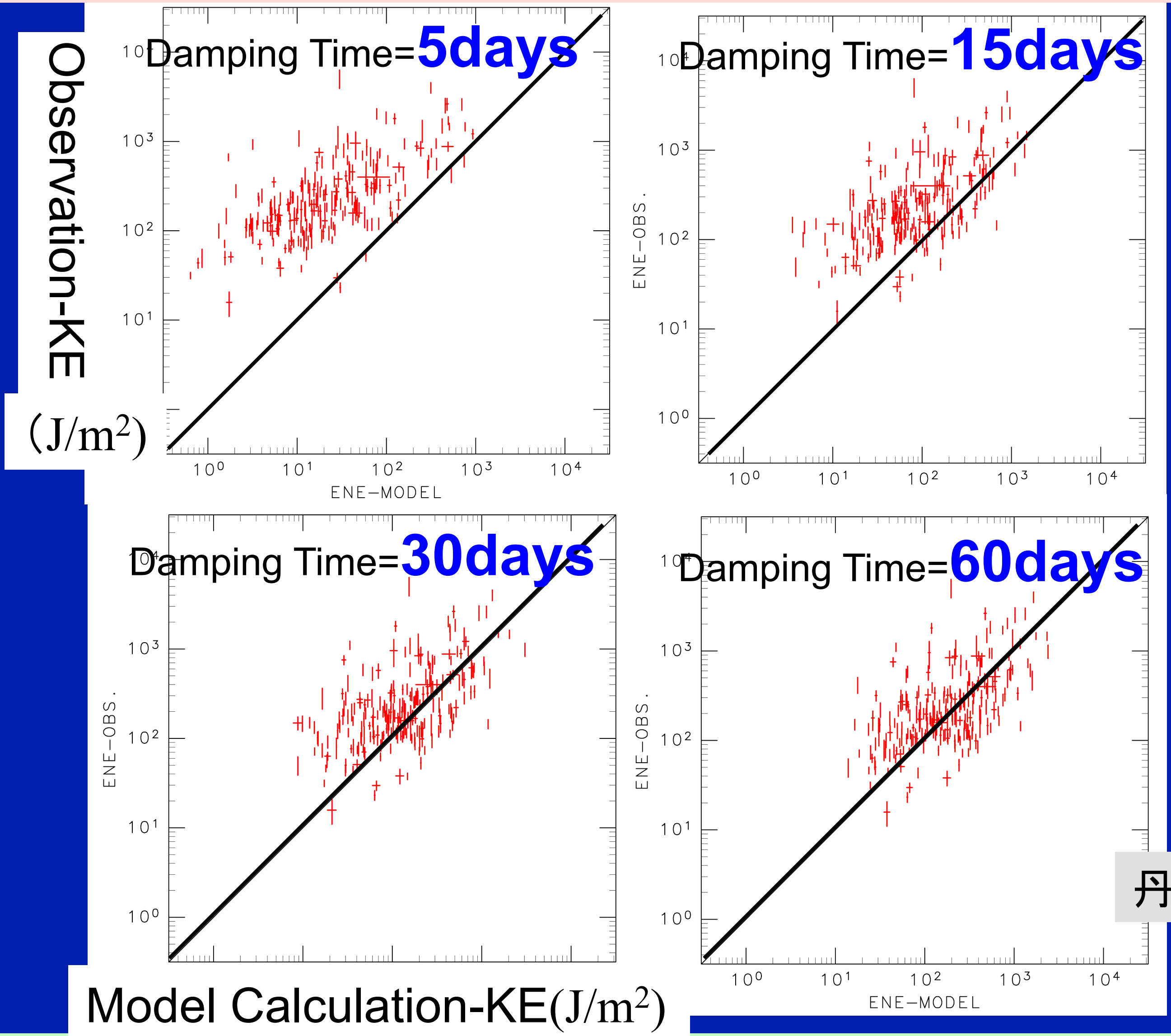
丹羽・日比谷(2009)

Data Analysis

1. Band Pass Filterring ⇒ Semidiurnal Period Components
2. Vertical Mode Analysis ⇒ Barotropic Mode+First Vertical Mode

⇒ 1st-Vertical-Mode Semidiurnal Internal Tide Energy

Comparison between Mooring Obs. and Model Results

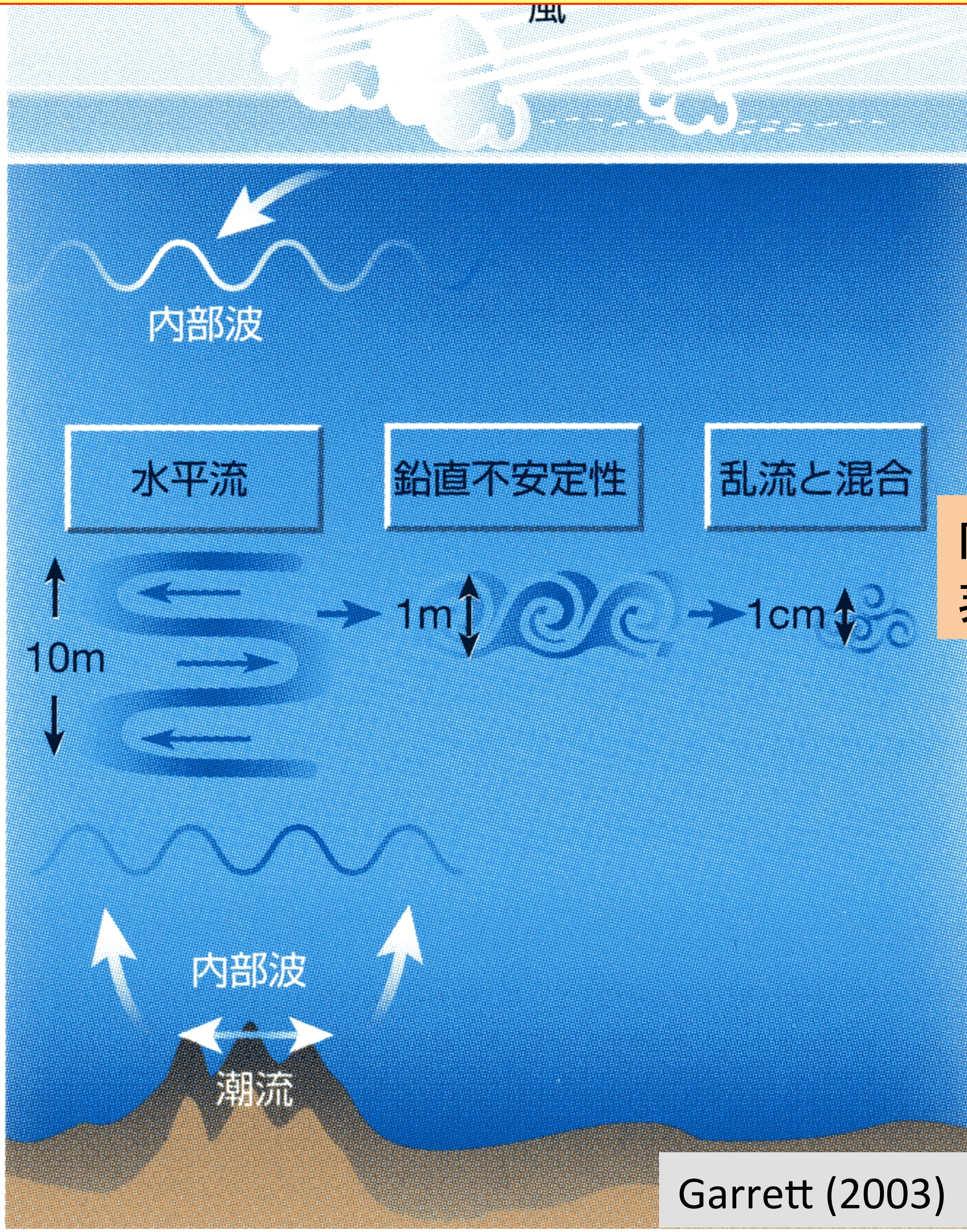


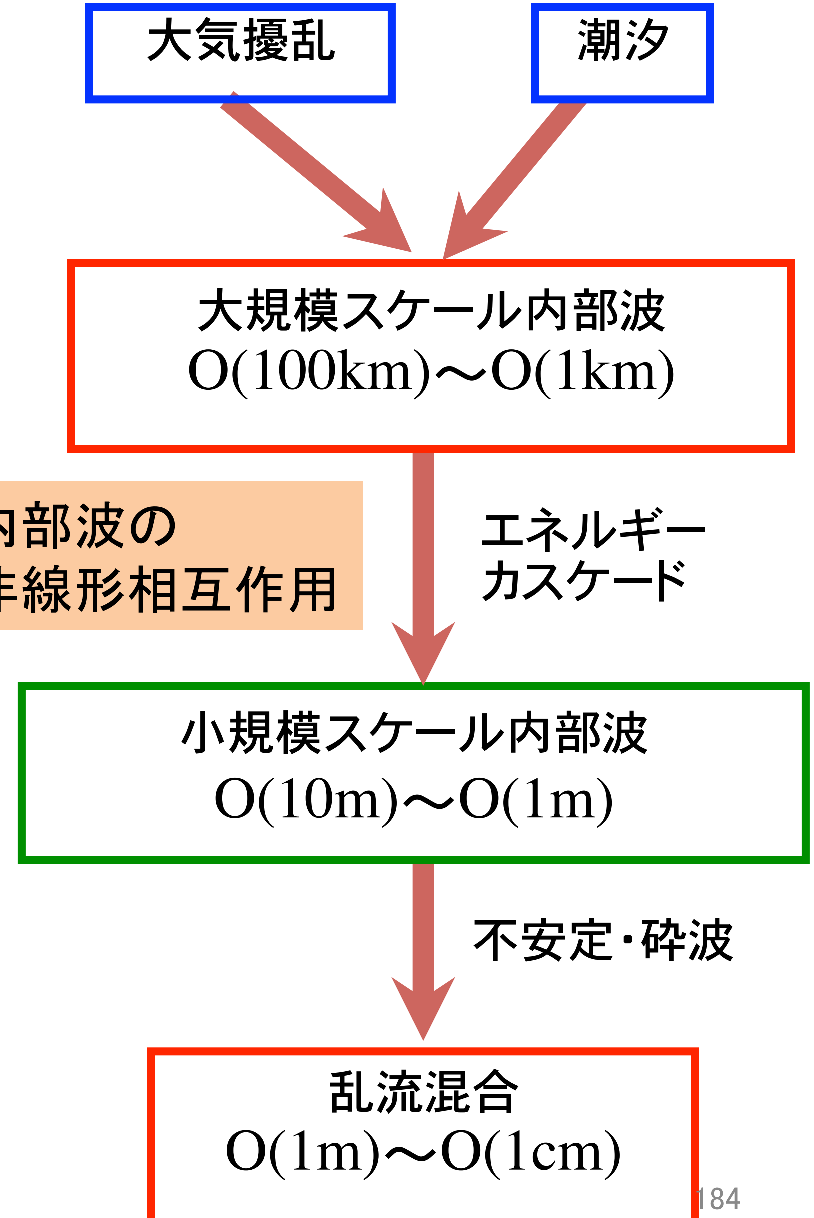
丹羽・日比谷(2009)

Propagation Velocity

Adequate Damping Time of Internal Tides : 30days~60days ×Cg~3m/s
=> Internal Tides can propagate nearly 10000 km across the open ocean.

6 海洋内部波の非線形相互作用

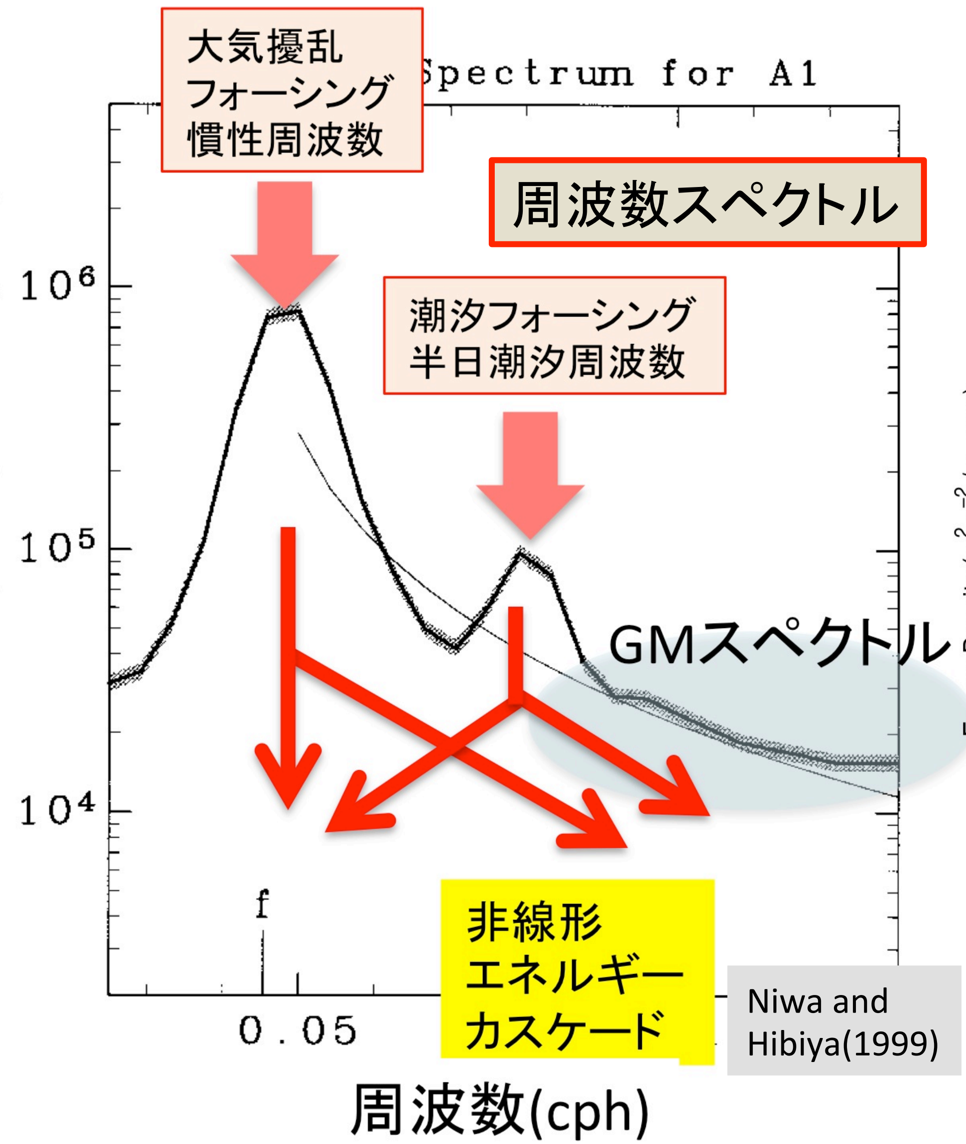


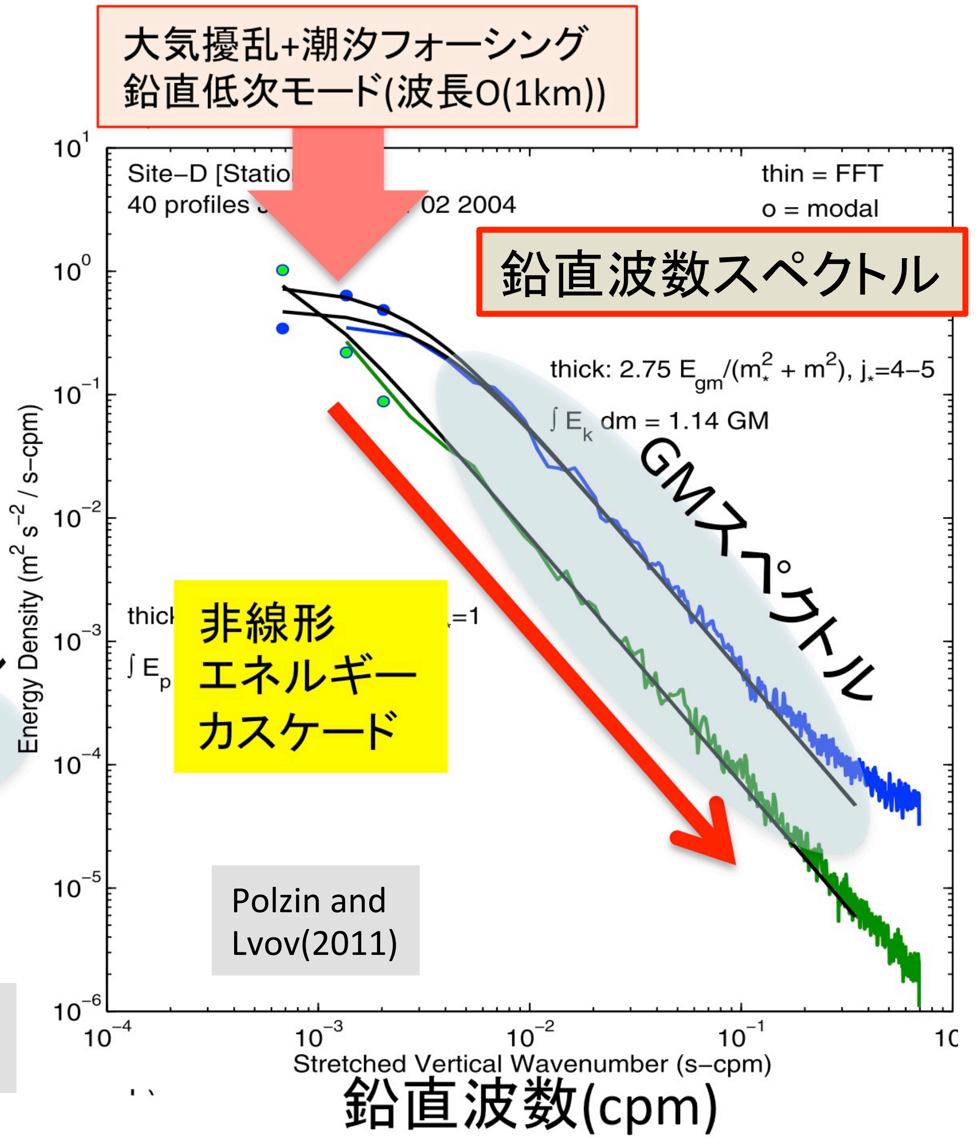


内部波の
非線形相互作用

内部波
非線形相互作用

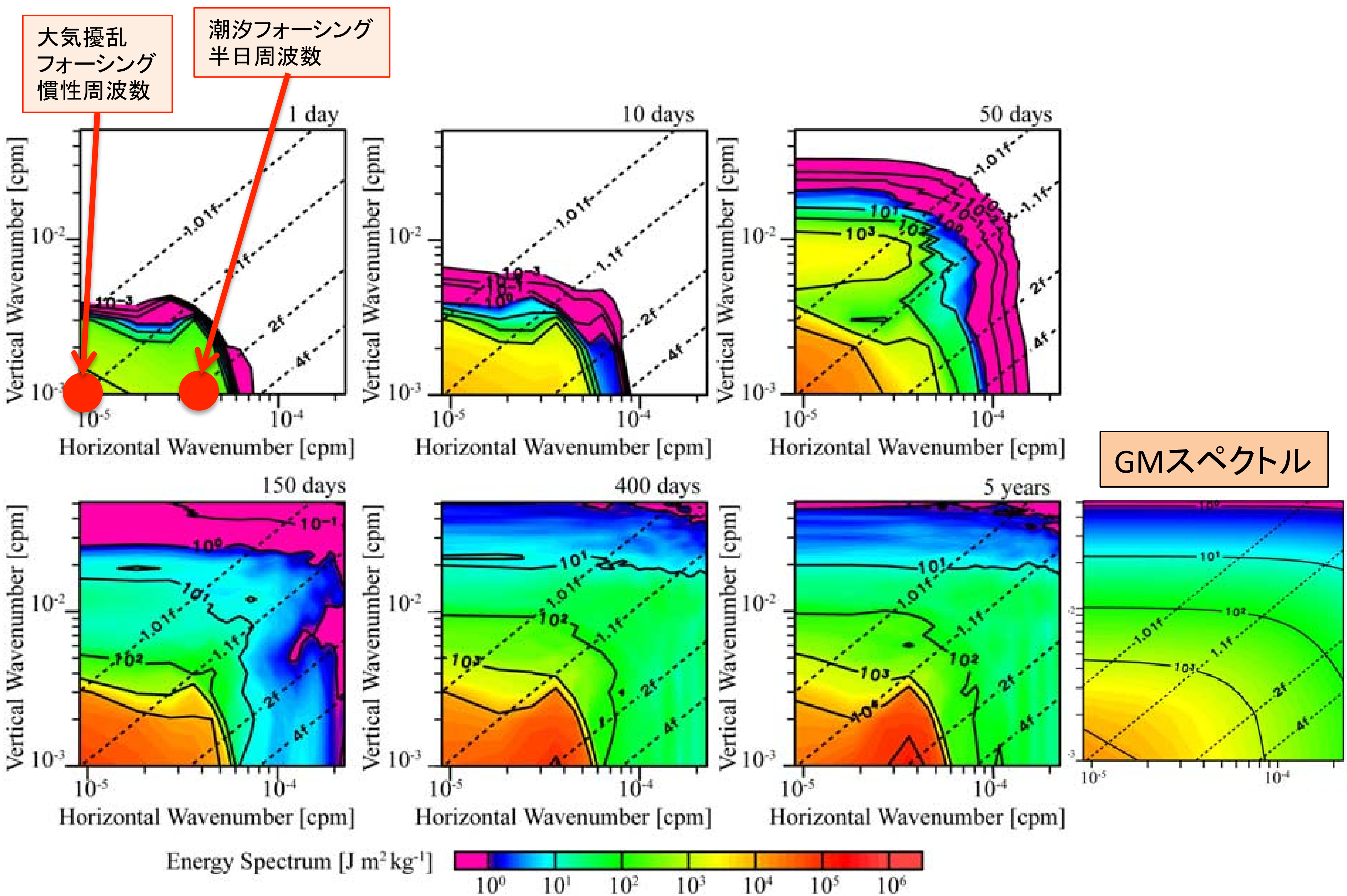
周波数・波数スペクトル空間
エネルギーカスケード





数値実験で再現された内部波平衡スペクトル

Sugiyama et al.(2008)



6.1 弱非線形相互作用(三波共鳴相互作用)

・線形の内部波場

＝分散関係式を満たす線形内部波の重ね合わせ。

分散関係式：周波数ωが波数kの関数 $\omega = \omega(\vec{k})$

各成分波は互いに独立に伝播する。

$$\eta = \underbrace{A_1}_{\text{定数}} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \underbrace{\omega(k_1)}_{\text{分散関係式}} t) + \underbrace{A_2}_{\text{定数}} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \underbrace{\omega(k_2)}_{\text{分散関係式}} t) + \cdots$$

・弱非線形の内部波場

＝分散関係式を満たす線形内部波の重ね合わせ。

ただし、各成分波は微小な非線形項を通じて

エネルギーを相互に交換しあいゆっくり振幅が変化する。

$$\eta = \underbrace{A_1(t)}_{\text{振幅変化}} \underbrace{\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega(k_1)t)}_{\text{線形波}} + \underbrace{A_2(t)}_{\text{振幅変化}} \underbrace{\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega(k_2)t)}_{\text{線形波}} + \cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{\partial p}{\partial x} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - w\frac{\partial u}{\partial x}$$

線形項

非線形項→線形項に対する
微弱な外力と見なす
（弱非線形の仮定）

二つの単色波が存在すると

$$u = A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega(k_1)t) + A_2 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega(k_2)t)$$

非線形項を通じて

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = B_{+1+2}\cos\left[\left(\vec{k}_1 + \vec{k}_2\right)\cdot\vec{x} - \left(\omega(k_1) + \omega(k_2)\right)t\right]$$
$$+ B_{+1-2}\cos\left[\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\cdot\vec{x} - \left(\omega(k_1) - \omega(k_2)\right)t\right] + \cdots\cdots$$

微弱な
第三の波が
励起される

$$k_3 = \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$$

$$\omega_3 = \omega\left(\vec{k}_1\right) \pm \omega\left(\vec{k}_2\right)$$

一般に第三の波は
分散関係式を満たさない

線形内部波

Thorpe(1975)

線形内部波

非線形効果により
励起される内部波

三波共鳴相互作用

第三の内部波が
分散関係を満たす
共鳴条件

$$\omega\left(\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2\right) = \omega\left(\vec{k}_1\right) \pm \omega\left(\vec{k}_2\right)$$

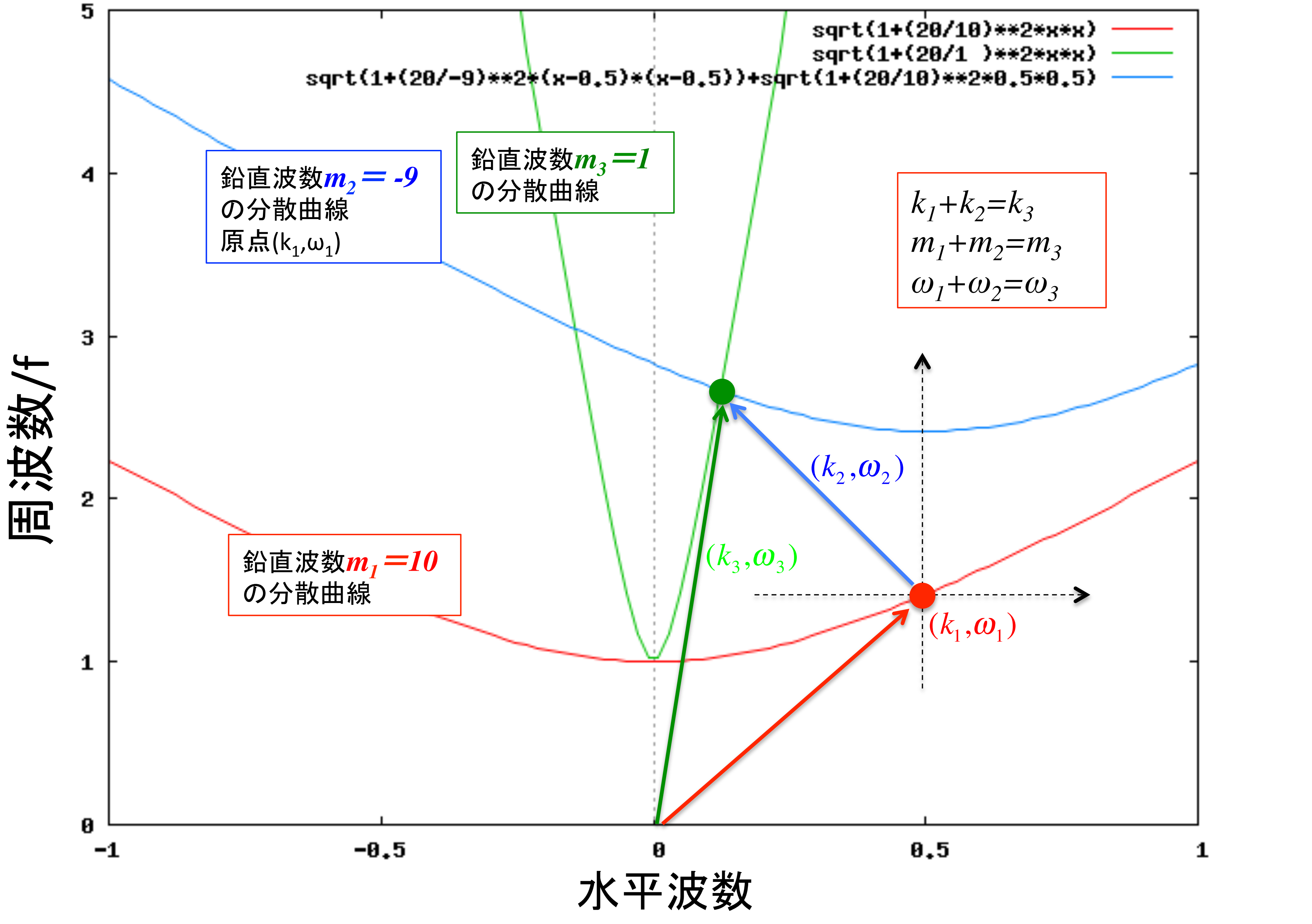
第三の波の振幅
が大きく成長する。
→3つの波の間で
効率的にエネル
ギーが交換される

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{\partial p}{\partial x} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - w\frac{\partial u}{\partial x}$$

線形項

非線形項→線形項に
対する共鳴外力となる。
微弱な非線形項によって
徐々に大きな波が励起される。

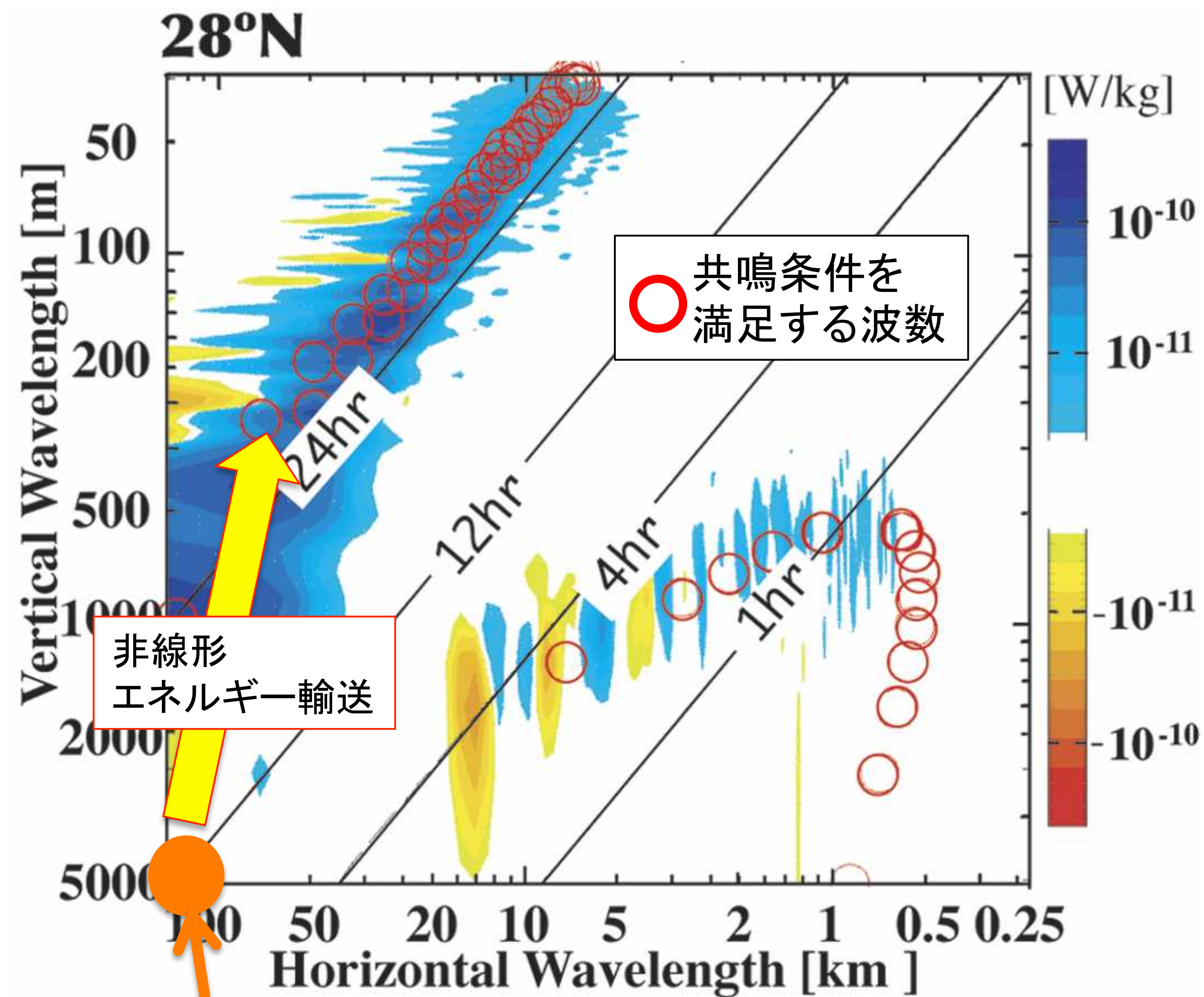
内部波の共鳴条件



sqrt(1+(20/10)**2*x*x)
sqrt(1+(20/1)**2*x*x)
sqrt(1+(20/-9)**2*(x-0.5)*(x-0.5))+sqrt(1+(20/10)**2*0.5*0.5)
鉛直波数m_2= -9
の分散曲線
原点(k_1,ω_1)
鉛直波数m_3=1
の分散曲線
$k_1+k_2=k_3$
$m_1+m_2=m_3$
$\omega_1+\omega_2=\omega_3$
鉛直波数m_1=10
の分散曲線
(k_2,ω_2)
(k_3,ω_3)
(k_1,ω_1)
周波数/f
水平波数
0
1
2
3
4
5
-1
-0.5
0
0.5
1

GMスペクトルのバイスペクトル解析

Furuichi et al.(2005)



半日周期・鉛直第一モード
内部潮汐フォーシング

基礎方程式

ブジネスク近似・Navier Stokes方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'}{\partial x}+fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'}{\partial y}-fu$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'}{\partial z}-\frac{g}{\rho^*}\rho'$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+u\frac{\partial \rho'}{\partial x}+v\frac{\partial \rho'}{\partial y}+w\frac{\partial \rho'}{\partial z}=\frac{\rho^* N^2}{g}w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

無次元化

$$t=\frac{\tilde{t}}{\omega},\ (x,y,z)=\frac{1}{k}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}),\ (u,v,w)=U(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}),\ \rho'=\Delta\rho\cdot\tilde{\rho}'$$

$$f=\omega\tilde{f},\ N=\omega\tilde{N},\ p'=\frac{\rho^*\omega U}{k}p',\ g=\frac{\rho^*\omega U}{\Delta\rho}\tilde{g}$$

非線形パラメータ
微少量と仮定

$$\varepsilon=\frac{U}{\omega/k}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\varepsilon\left(\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}\right)=-\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{x}}+\tilde{f}\tilde{v}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}}+\varepsilon\left(\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}}\right)=-\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{y}}-\tilde{f}\tilde{u}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}}+\varepsilon\left(\tilde{u}\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial w}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}}\right)=-\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{z}}-\tilde{g}\tilde{\rho}'$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{t}}+\varepsilon\left(\tilde{u}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{z}}\right)=\frac{\tilde{N}^2}{\tilde{g}}\tilde{w}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial v}{\partial \tilde{y}}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}}=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w+f^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+N^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w$$

$$=\varepsilon\left[\quad\left(\frac{\partial}{\partial z\partial x\partial t}-f\frac{\partial}{\partial z\partial y}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial z\partial y\partial t}+f\frac{\partial}{\partial z\partial x}\right)\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)+g\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\quad\right]$$

$$w=a(\varepsilon t)e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$$

$$w=a(T)e^{i(kx+ly+mz-\omega t)},\ T\equiv\varepsilon t$$

tとTをそれぞれ独立変数として扱う

$$\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T}$$

ε^0次オーダー方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w+f^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+N^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w=0$$

0次オーダーの解：共鳴条件を満たす3波の重ね合わせ

$$w=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}\left(a_i(T)e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega_i t)}\right)=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}a_i(T)e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega_i t)}+\frac{1}{2}a_i^*(T)e^{-i(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega_i t)}$$

$$u=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}\left[-\frac{\left(N^2-\omega_i^2\right)\left(k_i\omega_i+il_if\right)}{\left(\omega_i^2-f^2\right)\omega_i m_i}a_i(T)e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega_i t)}\right]$$

$$v=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}\left[-\frac{\left(N^2-\omega_i^2\right)\left(l_i\omega_i-ik_if\right)}{\left(\omega_i^2-f^2\right)\omega_i m_i}a_i(T)e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega_i t)}\right]$$

$$\rho'=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}\left(\frac{iN^2}{\omega_i g}a_i(T)e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega_i t)}\right)$$

$$\omega_i=\frac{N^2\left(k_i^2+l_i^2\right)+f^2m_i^2}{k_i^2+l_i^2+m_i^2}$$

共鳴条件

$$\vec{k}_1+\vec{k}_2=\vec{k}_3$$

$$\omega_1+\omega_2=\omega_3$$

ε^1次オーダー方程式

$$2\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial T}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w$$
$$=\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial z\partial x\partial t}-f\frac{\partial}{\partial z\partial y}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial z\partial y\partial t}+f\frac{\partial}{\partial z\partial x}\right)\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)+g\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\Bigg]$$

ε^0次オーダーの解を代入

$$\sum_{i=1}^{3}-i\omega_i\left(k_i^2+l_i^2+m_i^2\right)\frac{da_i}{dT}e^{i\left(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega_i t\right)}+i\omega_i\left(k_i^2+l_i^2+m_i^2\right)\frac{da_i^*}{dT}e^{-i\left(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega_i t\right)}$$
$$=\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial z\partial x\partial t}-f\frac{\partial}{\partial z\partial y}\right)\left(u(a)\frac{\partial u(a)}{\partial x}+v(a)\frac{\partial u(a)}{\partial y}+w(a)\frac{\partial u(a)}{\partial z}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial z\partial y\partial t}+f\frac{\partial}{\partial z\partial x}\right)\left(u(a)\frac{\partial v(a)}{\partial x}+v(a)\frac{\partial v(a)}{\partial y}+w(a)\frac{\partial v(a)}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(u(a)\frac{\partial w(a)}{\partial x}+v(a)\frac{\partial w(a)}{\partial y}+w(a)\frac{\partial w(a)}{\partial z}\right)+g\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(u(a)\frac{\partial \rho(a)}{\partial x}+v(a)\frac{\partial \rho(a)}{\partial y}+w(a)\frac{\partial \rho(a)}{\partial z}\right)\Bigg]$$
$$=A_{11}a_1a_1e^{i((\vec{k}_1+\vec{k}_1)\cdot\vec{x}-(\omega_1+\omega_1)t)}+A_{12}a_1a_2e^{i((\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}-(\omega_1+\omega_2)t)}+A_{13}a_1a_3e^{i((\vec{k}_1+\vec{k}_3)\cdot\vec{x}-(\omega_1+\omega_3)t)}$$
$$+A'_{11}a_1a_1^*e^{i((\vec{k}_1-\vec{k}_1)\cdot\vec{x}-(\omega_1-\omega_1)t)}+A'_{12}a_1a_2^*e^{i((\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t)}+A'_{13}a_1a_3^*e^{i((\vec{k}_1-\vec{k}_3)\cdot\vec{x}-(\omega_1-\omega_3)t)}$$
$$+A_{21}a_2a_1e^{i((\vec{k}_2+\vec{k}_1)\cdot\vec{x}-(\omega_2+\omega_1)t)}+A_{22}a_2a_3e^{i((\vec{k}_2+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}-(\omega_2+\omega_2)t)}+A_{23}a_2a_3e^{i((\vec{k}_2+\vec{k}_3)\cdot\vec{x}-(\omega_2+\omega_3)t)}$$
$$+A'_{21}a_2a_1^*e^{i((\vec{k}_2-\vec{k}_1)\cdot\vec{x}-(\omega_2-\omega_1)t)}+A'_{22}a_2a_2^*e^{i((\vec{k}_2-\vec{k}_2)\cdot\vec{x}-(\omega_2-\omega_2)t)}+A'_{23}a_2a_3^*e^{i((\vec{k}_2-\vec{k}_3)\cdot\vec{x}-(\omega_2-\omega_3)t)}$$
$$+A_{31}a_3a_1e^{i((\vec{k}_3+\vec{k}_1)\cdot\vec{x}-(\omega_3+\omega_1)t)}+A_{32}a_3a_3e^{i((\vec{k}_3+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}-(\omega_3+\omega_2)t)}+A_{33}a_3a_3e^{i((\vec{k}_3+\vec{k}_3)\cdot\vec{x}-(\omega_3+\omega_3)t)}$$
$$+A'_{31}a_3a_1^*e^{i((\vec{k}_3-\vec{k}_1)\cdot\vec{x}-(\omega_3-\omega_1)t)}+A'_{32}a_3a_2^*e^{i((\vec{k}_3-\vec{k}_2)\cdot\vec{x}-(\omega_3-\omega_2)t)}+A'_{33}a_3a_3^*e^{i((\vec{k}_3-\vec{k}_3)\cdot\vec{x}-(\omega_3-\omega_3)t)}$$

共鳴条件

$\vec{k}_1=\vec{k}_3-\vec{k}_2,\ \omega_1=\omega_3-\omega_2$

$\vec{k}_2=\vec{k}_3-\vec{k}_1,\ \omega_2=\omega_3-\omega_1$

$\vec{k}_3=\vec{k}_1+\vec{k}_2,\ \omega_3=\omega_1+\omega_2$

$$\frac{da_1}{dt} = \varepsilon\Gamma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{da_2}{dt} = \varepsilon\Gamma_2 a_1^* a_3, \quad \frac{da_3}{dt} = \varepsilon\Gamma_3 a_1 a_2$$

$$\left|\tilde{a}_i\right|^2 = E_i$$ 振幅の二乗＝エネルギーとなるよう規格化

$$\frac{d\tilde{a}_1}{dt} = -i\varepsilon\omega_1\Gamma^*\tilde{a}_2^*\tilde{a}_3, \quad \frac{d\tilde{a}_2}{dt} = -i\varepsilon\omega_2\Gamma^*\tilde{a}_1^*\tilde{a}_3, \quad \frac{d\tilde{a}_3}{dt} = -i\varepsilon\omega_3\Gamma\tilde{a}_1\tilde{a}_2$$

エネルギー保存が成立 $\frac{d}{dt}\left(\left|\tilde{a}_1\right|^2 + \left|\tilde{a}_2\right|^2 + \left|\tilde{a}_3\right|^2\right) = 0$

具体的な式の形は Neef (2004)

※ 初期状態：a_3＝有限振幅， a_1, a_2＝無限小振幅の場合

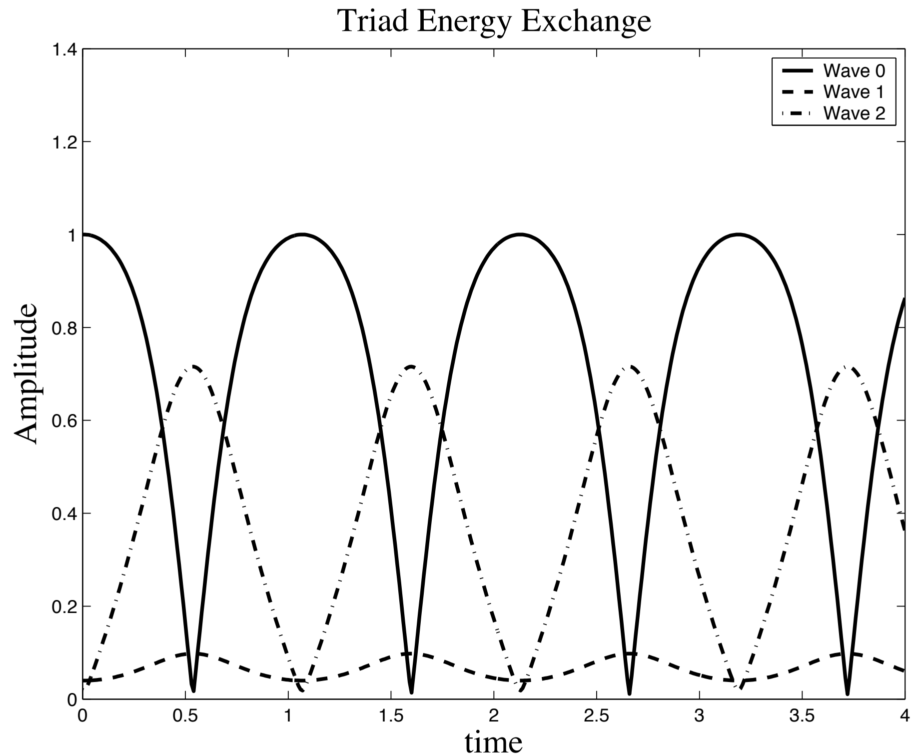
$$\frac{d\tilde{a}_3}{dt} = -i\varepsilon\omega_3\Gamma\tilde{a}_1\tilde{a}_2 \approx 0 \rightarrow \tilde{a}_3 \approx \tilde{a}_3^C = \text{一定}$$

$$\frac{d^2\tilde{a}_1}{dt^2} \approx -i\varepsilon\omega_1\Gamma^*\frac{d\tilde{a}_2^*}{dt}\tilde{a}_3^c \approx \varepsilon^2\omega_1\omega_2\left|\Gamma\right|^2\left|\tilde{a}_3^c\right|^2\tilde{a}_1 \quad \rightarrow \quad \tilde{a}_1 \propto \exp(\varepsilon\sqrt{\omega_1\omega_2}\left|\Gamma\right|\left|\tilde{a}_3^c\right|t)$$

指数関数的増加

$$\frac{d^2\tilde{a}_2}{dt^2} \approx -i\varepsilon\omega_2\Gamma^*\frac{d\tilde{a}_1^*}{dt}\tilde{a}_3^c \approx \varepsilon^2\omega_1\omega_2\left|\Gamma\right|^2\left|\tilde{a}_3^c\right|^2\tilde{a}_2 \quad \rightarrow \tilde{a}_2 \propto \exp(\varepsilon\sqrt{\omega_1\omega_2}\left|\Gamma\right|\left|\tilde{a}_3^c\right|t)$$

指数関数的増加



・三波間でエネルギーが交換される

・三波のエネルギーの和は保存

Neef (2004)

Figure 2: Exchange of energy between the three waves in a resonant triad. In this example, $f = 0$, and the wave frequencies are $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.8$. Initial wave amplitudes and phases are given in Table 1.

エネルギースペクトル時間発展式 (波動乱流理論, Hasselman(1966))

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} A(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \Big\{ & T^{+} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'') \delta(\omega-\omega'-\omega'') \\
& \cdot [A(\mathbf{k}') A(\mathbf{k}'') - A(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}') - A(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}'')] \\
& + 2T^{-} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'+\mathbf{k}'') \delta(\omega-\omega'+\omega'') \\
& [A(\mathbf{k}') A(\mathbf{k}'') + A(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}') - A(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}'')] \Big\}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

where $A(\mathbf{k}) = (E(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k}))$ is the action density spectrum and T^{+} and T^{-} are transfer functions depending on $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, and $\mathbf{k}''$. Explicit expressions for T^{+} and T^{-} can be found in the works by *Müller and Olbers*, [1975] and *Olbers* [1976]. The transfer equation can be inter-

Müller et al.(1986)

擾乱を加えたGMスペクトルが元に戻る緩和時間

McComas(1977)

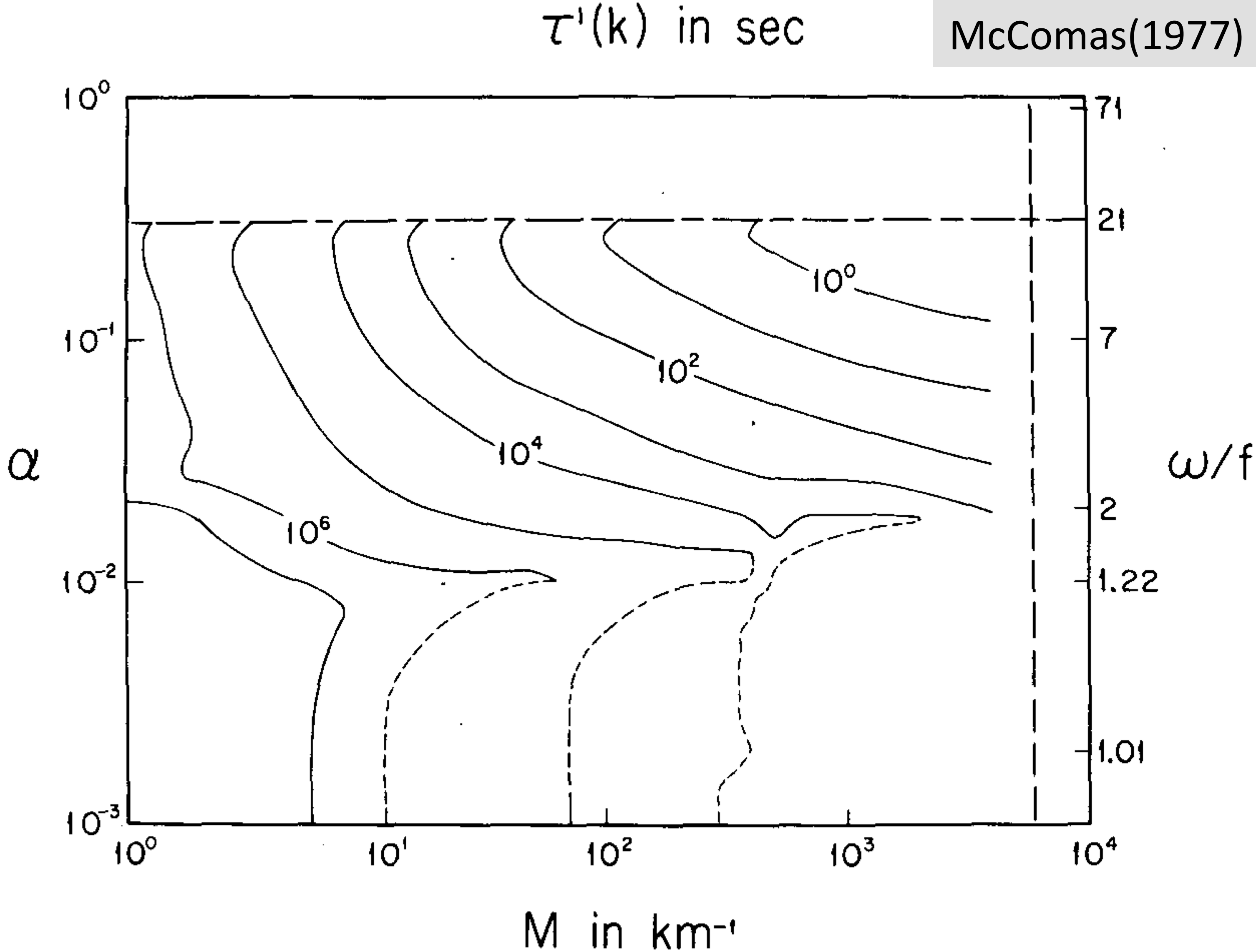


FIG. 4. Interaction time for a 10% spike perturbation to the GM spectrum. Negative values (dashed) indicate that the spike grows.

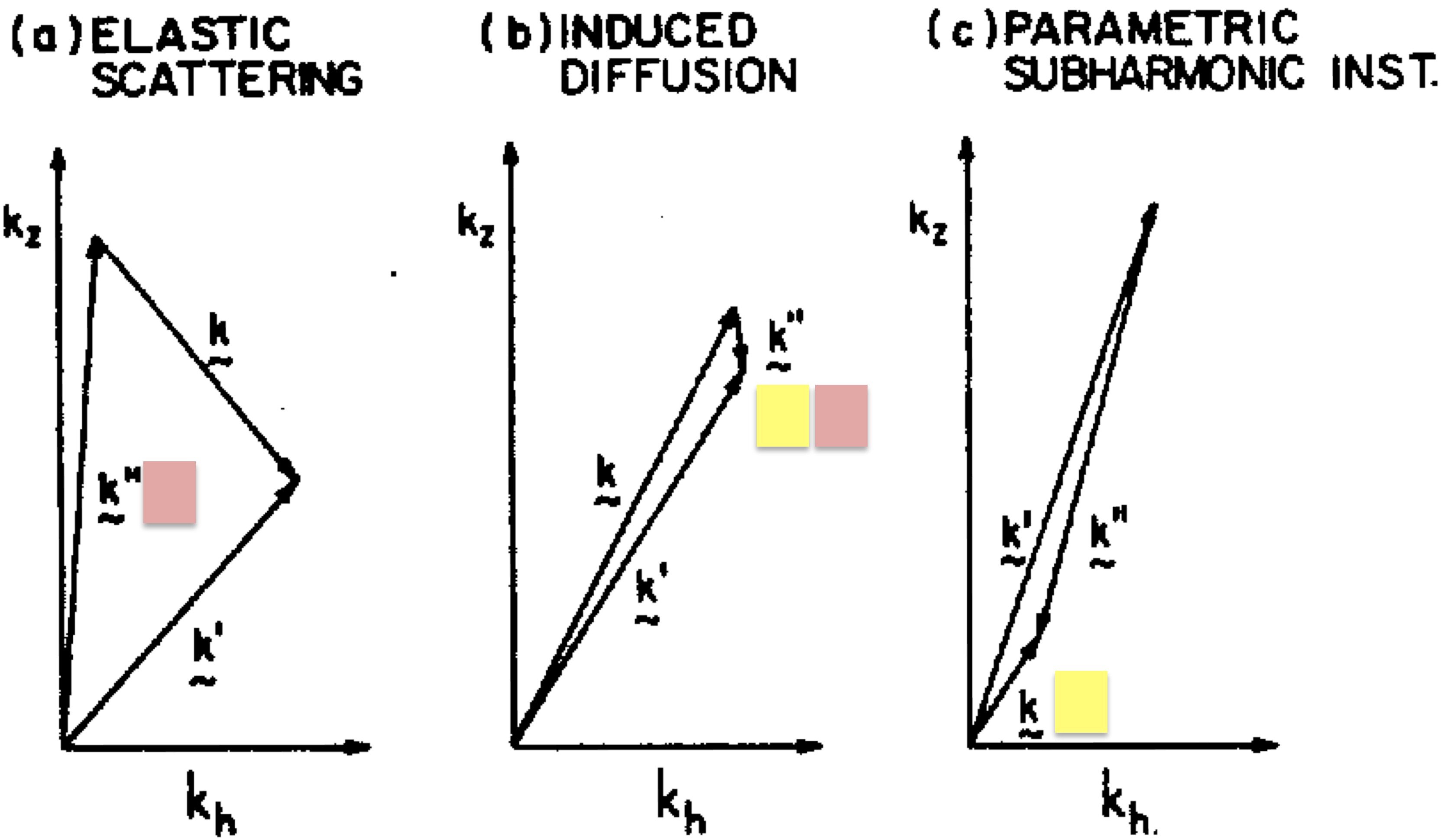
GMスペクトル中の重要な三波共鳴相互作用

McComas and Bretherton (1977)

GMスペクトル
高エネルギー

低周波数・内部波

低波数・内部波



擾乱を加えたGMスペクトルが元に戻るまでの緩和時間

McComas(1977)

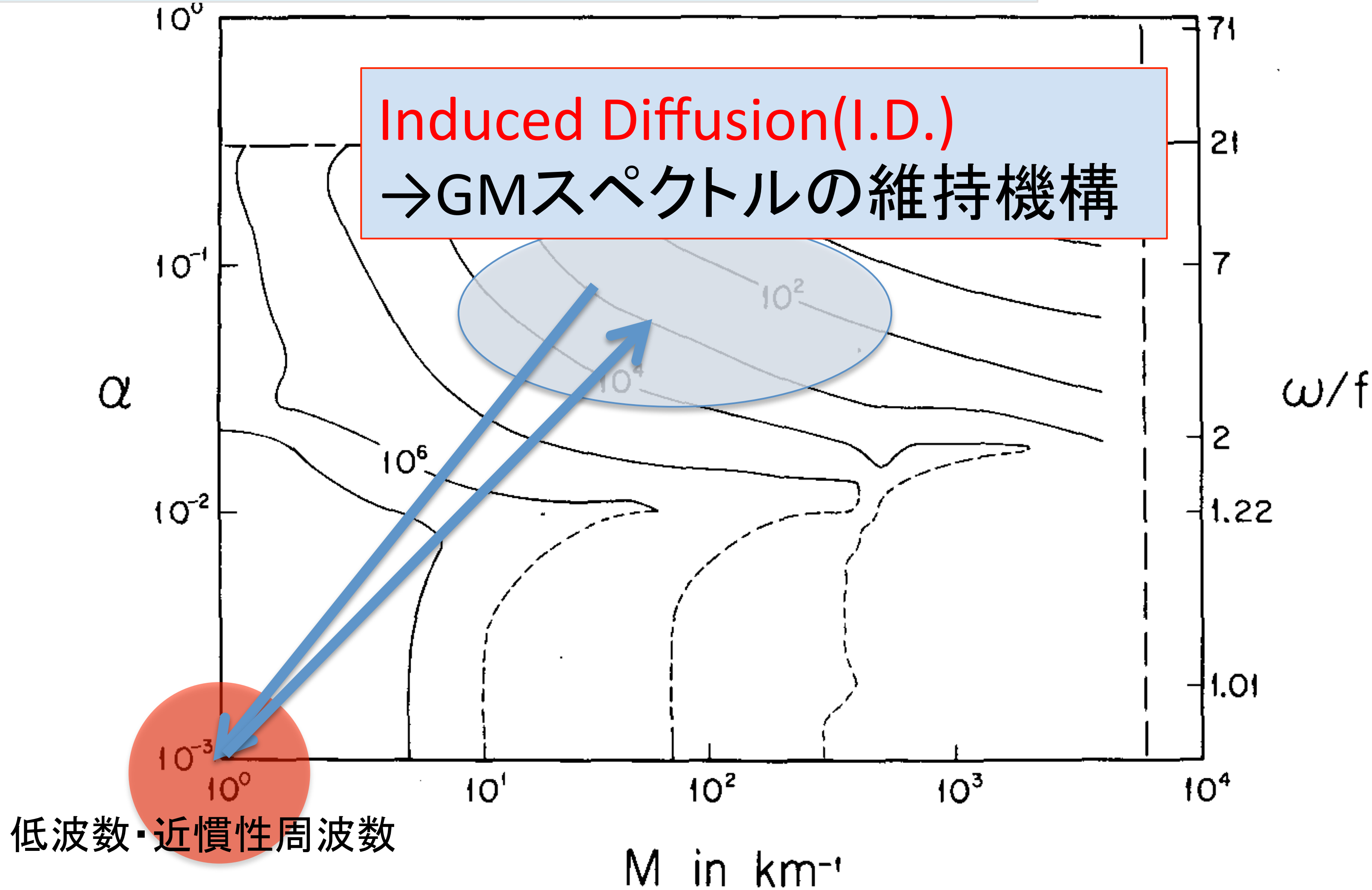
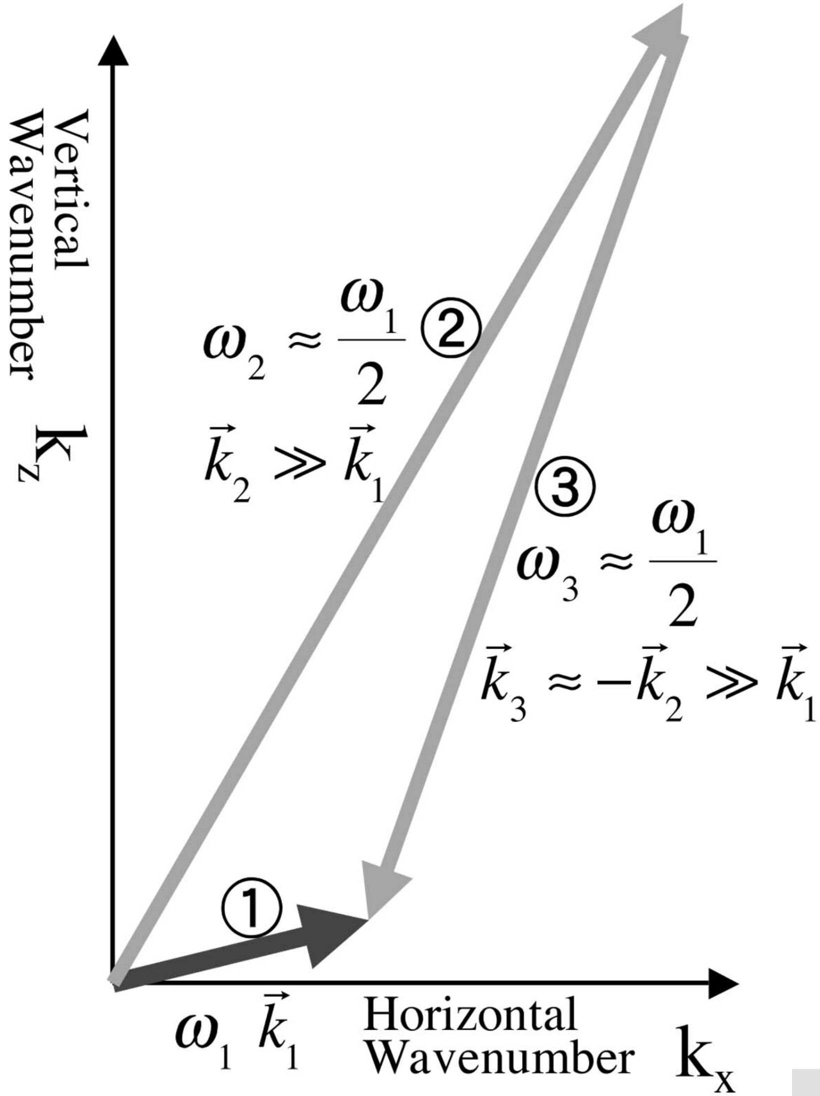
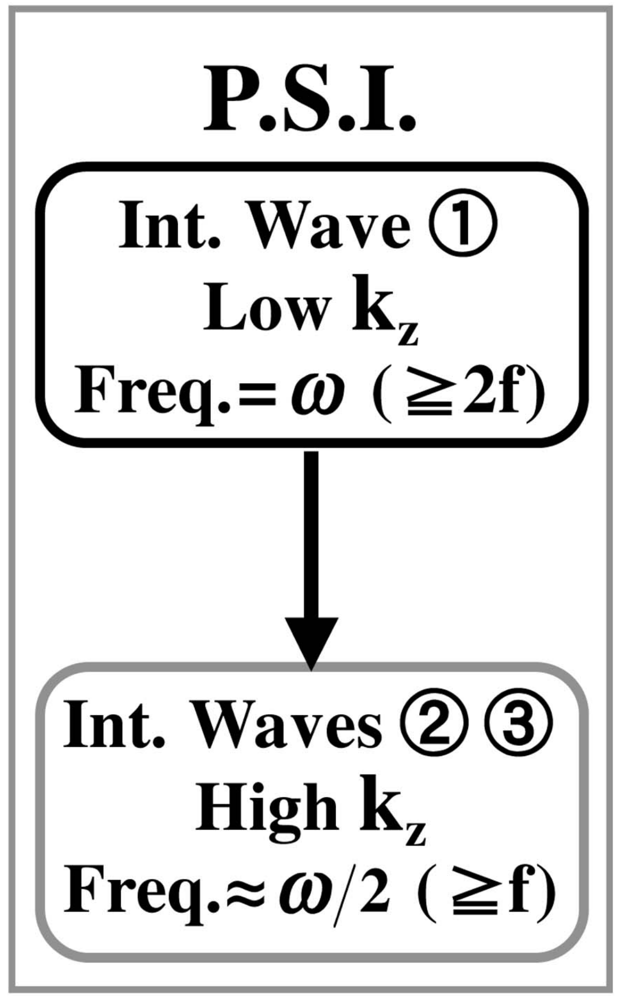


FIG. 4. Interaction time for a 10% spike perturbation to the GM spectrum. Negative values (dashed) indicate that the spike grows.

P.S.I. =Parametric Subharmonic Instability

鉛直低次モード内部波の主要なエネルギーカスケード機構





鉛直低波数
周波数ω

エネルギー
カスケード

鉛直高波数
周波数$\omega/2$

丹羽(2006)

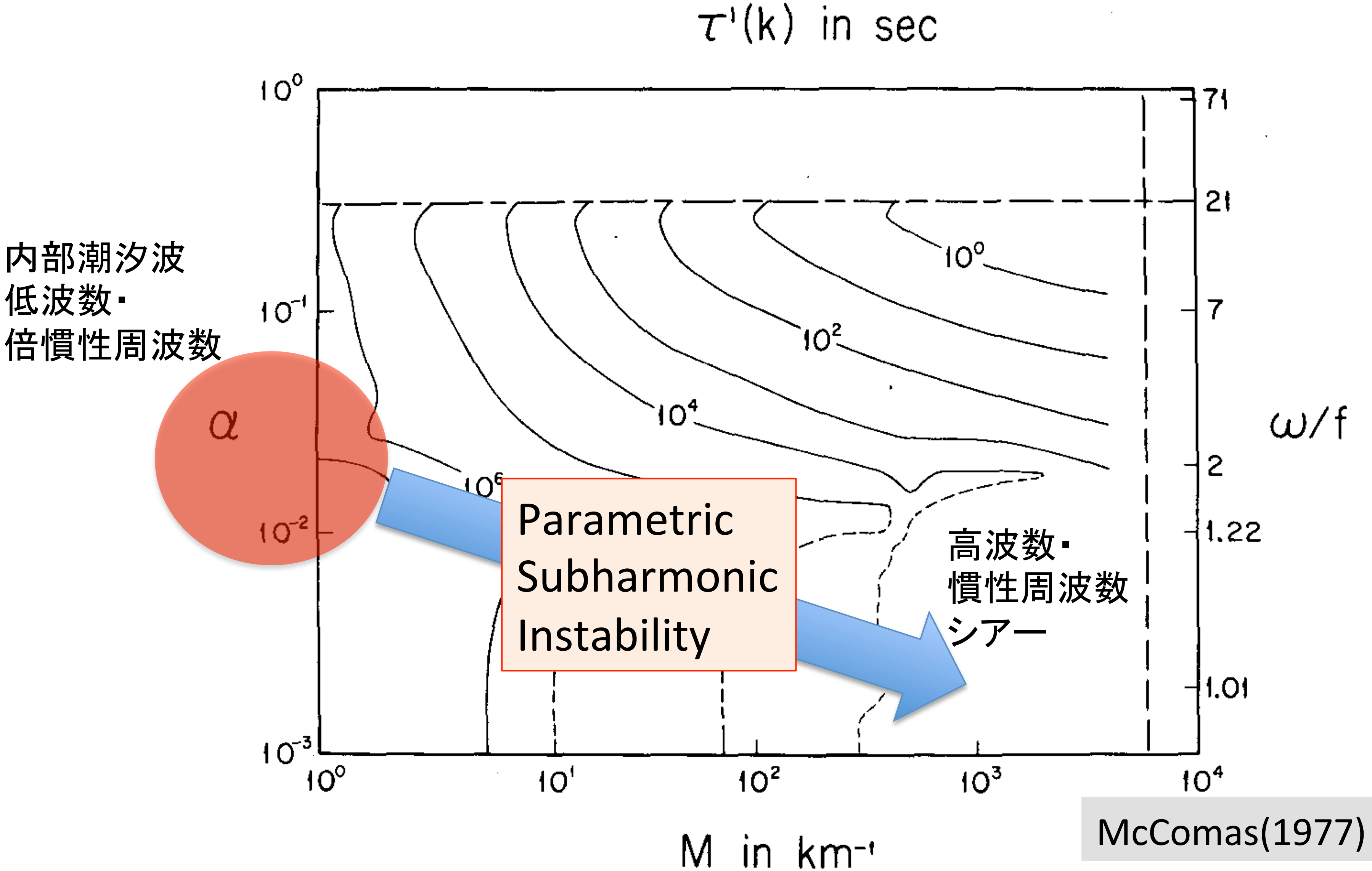
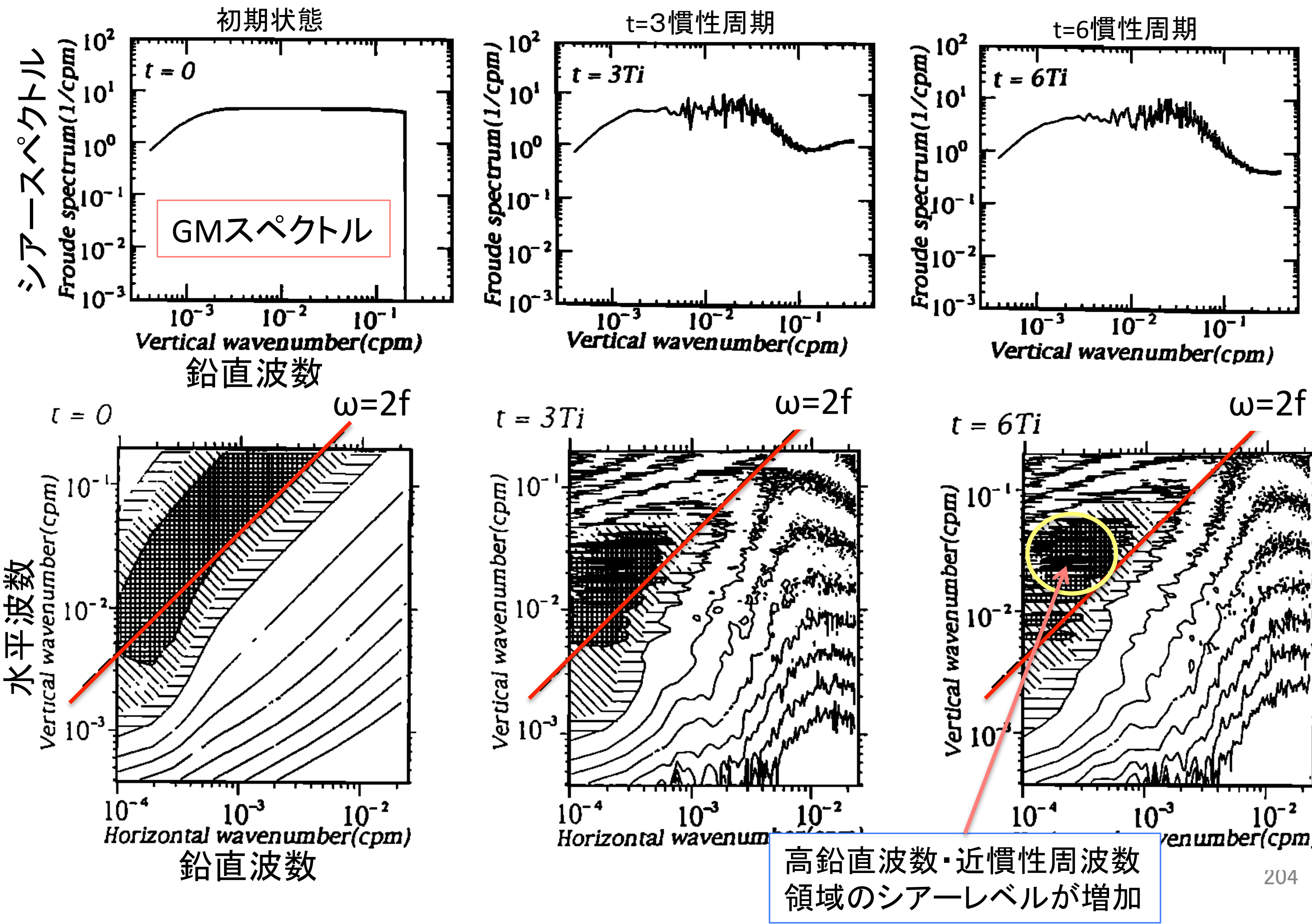


FIG. 4. Interaction time for a 10% spike perturbation to the GM spectrum. Negative values (dashed) indicate that the spike grows.

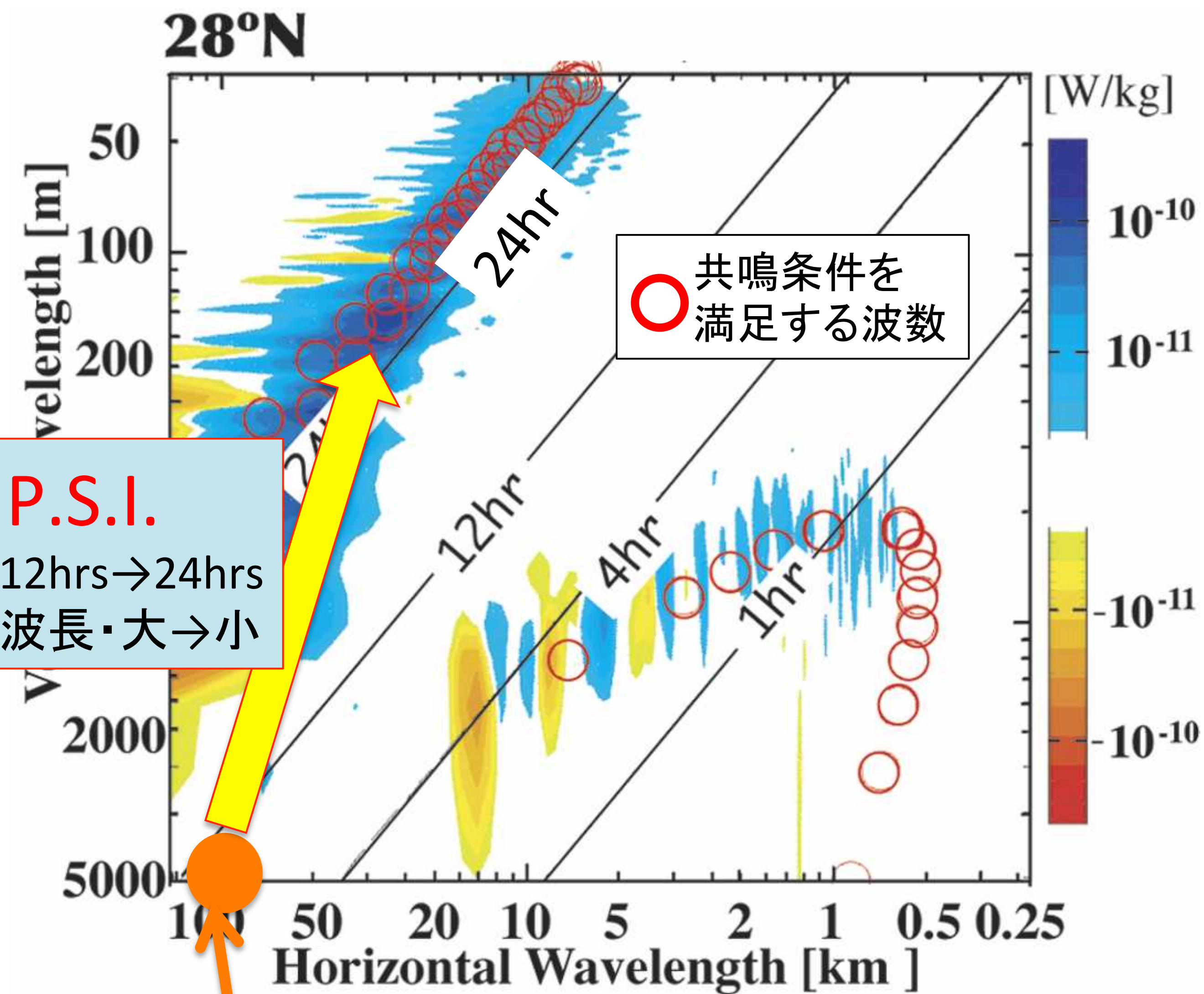
GMスペクトルの時間発展の数値実験

Hibiya et al.(1996)



GMスペクトルのバイスペクトル解析

Furuichi et al.(2005)



半日周期・鉛直第一モード
内部潮汐フォーシング

参考文献

Bryan, F., 1987: Parameter sensitivity of primitive equation ocean general circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **17**, 970–985.

Cairns, J. L., Williams, G. O., 1976: Internal wave observations from a midwater float, *J. Geophys. Res.*, **81**, 1943–1950.

Döös, K., Coward, A., 1997: The Southern Ocean as the major upwelling zone of North Atlantic Deep Water, Int. WOCE Newsl., 27, 3–4.

Eckart, C., 1960: Hydrodynamics of oceans and atmospheres, Pergamon press, 290pp.

Egbert, G. D., Ray, R. D., 2000: Significant dissipation of tidal energy in the deep ocean inferred from satellite altimeter data, *Nature*, **405**, 775–778.

Fofonoff, N. P., 1969: Spectral characteristics of internal waves in the ocean, *Deep Sea Res.*, Suppl.to vol.16, 58–71.

Furuichi, N., Hibiya, T., Niwa, Y., 2005: Bispectral analysis of energy transfer within the two-dimensional oceanic internal wave field, *J. Phys. Oceanogr.*, **35**, 2104–2109.

Furuichi, N., Hibiya, T., Niwa, Y., 2008: Model-predicted distribution of wind-induced internal wave energy in the world's oceans, *J. Geophys. Res.*, **113**, C09034.

Garrett, C., 2003: Oceanography: Mixing with latitude, *Nature*, **422**, 477.

Garrett, C., Munk, W., 1972: Space-time scales of internal waves, *Geophys. Fluid Dyn.*, **3**, 225–264.

Garrett, C., Munk, W., 1975: Space-time scale of internal waves: a progress report, *J. Geophys. Res.*, **80**, 291–297.

Gerkema, T., Zimmerman, J. T. F., 2008: An introduction to internal waves, Lecture notes, Royal NIOZ, Texel.

Gill, A. E., 1982: Atmosphere-ocean dynamics, Academic press, 662pp.

Gill, A. E., 1984: On the behavior of internal waves in the wakes of storms, *J. Phys. Oceanogr.*, **14**, 1129–1151.

Glenn, F., 2004: 12.802 Wave Motions in the Ocean and Atmosphere, Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, http://ocw.mit.edu

Gregg, M. C., 1993: Estimation and Geography of diapycnal mixing in the stratified ocean, In Physical processes in lakes and oceans, edited by J. Imberger, American Geophysical Union, 668pp.

Hibiya, T., Niwa, Y., Nakajima, K., Suginohara, N., 1996: Direct numerical simulation of the roll-off range of internal wave shear spectra in the ocean, *J. Geophys. Res.*, **101**, 14123-14129.

Huang, R. X., 2004: Ocean, energy flows in, in *Encyclopedia of Energy* Vol.4, edited by C.J. Cleveland, Elsevier, 497–509.

Jayne, S. R., St.Laurent, L. C., 2001: Parameterizing tidal dissipation over rough topography, *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 811–814.

Kantha, L. H., Tierney, C. C., 1997: Global baroclinic tides, *Prog. Oceanogr.*, **40**, 163–178.

Kuhlbrodt, T., Griesel, A., Montoya, M., Levermann, A., Hofmann, M., Rahmstorf, S., 2007: On the driving processes of the Atlantic meridional overturning circulation, *Rev. Geophys.*, **45**, RG2001.

Kundu, P. J., 1993: On internal waves generated by travelling wind, *J. Fluid. Mech.*, **254**, 529–559.

Leaman, K. D., Sanford, T. B., 1975: Vertical energy propagation of inertial waves: a vector spectral analysis of velocity profiles, *J. Geophys. Res.*, **80**, 1975–1978.

Ledwell, J. R., Montgomery, E. T., Polzin, K. L., St.Laurent, L. C. , Schmitt, R. W. , Toole, J. M., 2000: Evidence for enhanced mixing over rough topography in the abyssal ocean, *Nature*, **403**, 189–182.

Marshall, J., Speer, K., 2012: Closure of the meridional overturning circulation through Southern Ocean upwelling, *Nature Geoscience*, **5**, 171–180.

Matsumoto, K., Takanezawa, T., Ooe, M., 2000: Ocean tide models developed by assimilating TOPEX/ POSEIDON altimeter data into hydrodynamical model: a global model and a regional model around Japan, *J. Oceanogr.*, **56**, 567–581.

McComas, C. H., 1977: Equilibrium Mechanisms within the Oceanic Internal Wave Field, *J. Phys. Oceanogr.*, **7**, 836–845.

McComas, C. H., Bretherton, F. P., 1977: Resonant interaction of oceanic internal waves, *J. Geophys. Res.*, **82**, 1397–1412.

Mohri, K., Hibiya, T., Iwamae, N., 2010: Revisiting internal wave generation by tide-topography interaction, *J. Geophys. Res.*, **115**, C11001.

Morozov, E. G., 1995: Semidiurnal internal wave global field, *Deep Sea Res.*, Part I, **42**, 135–148.

Mortimer, C. H., 1971: Large scale oscillatory motions and seasonal temperature changes in Lake Michigan and Lake Ontario, Spec.Rep. Univ. of Wis.-Milwaukee, Center for Great Lakes Stud.,12, Parts I and II.

Munk, W., 1966: Abyssal recipes, *Deep Sea Res.*, **13**, 707–730.

Munk, W., 1981: Internal waves and small-scale processes, in Evolution of physical oceanography, edited by B.S. Warren, C. Wunsch, MIT Press, 664pp.

Munk, W., Wunsch, C., 1998: Abyssal recipes II: energetics of tidal and mixing, *Deep Sea Res.*, **45**, 1977-2010.

Müller, P., Holloway, G., Henyey, F., Pomphrey, N., 1986: Nonlinear interactions among internal gravity waves, *Rev. Geophys.*, **24**, 493–536.

Nagasawa, M., Hibiya, T., Niwa, Y., Watanabe, M., Isoda, Y., Takagi, S., Kamei, Y., 2002: Distribution of fine-scale shear in the deep waters of the North Pacific obtained using expendable current profilers, *J. Geophys. Res.*, **107**, 3221.

Neef, L. J., 2004: Triad resonance as a mechanism for internal wave disspation, Geophysical Fluid Dynamics Program Notes, Woods Hole Oceanographic Institution Technical Report, WHOI- 2005-08.

Nikurashin, M., Ferrari, R., 2011: Global energy conversion rate from geostrophic flows into internal lee waves in the deep ocean, *Geophys. Res. Lett.*, **38**, L08610.

Niwa, Y., Hibiya, T., 1997: Nonlinear processes of energy transfer from traveling hurricanes to the deep ocean internal wave field, *J. Geophys. Res.*, **102**, 12469–12477.

Niwa, Y., Hibiya, T., 1999: Response of the deep ocean internal wave field to traveling midlatitude storms as observed in long term current measurements, *J. Geophys. Res.*, **104**, 10981–10989.

Niwa, Y., Hibiya, T., 2001: Numerical study of the spatial distribution of the M2 internal tide in the Pacific Ocean, *J. Geophys. Res.*, **106**, 22441–22449.

Niwa, Y., Hibiya, T., 2004: Three-dimensional numerical simulation of M2 internal tides in the East China Sea, *J. Geophys. Res.*, **109**, C04027.

Niwa, Y., Hibiya, T., 2011: Estimation of baroclinic tide energy available for deep ocean mixing based on three-dimensional global numerical simulations, *J. Oceanogr.*, **67**, 493–502.

Niwa, Y., Hibiya, T., 2014: Generation of baroclinic tide energy in a global three-dimensional numerical model with different spatial grid resolutions, *Ocean Modelling*, **80**, 59–73.

Nycander, J., 2005: Generation of internal waves in the deep ocean by tides, *J. Geophys. Res.*, **110**, C10028.

Oka, A., Niwa, Y., 2013: Pacific deep circulation and ventilation controlled by tidal mixing away from the sea bottom, *Nature Communications*, **4**, 2419.

Osborn, T. R., 1980: Estimates of the local rate of vertical diffusion from dissipation measurements, *J. Phys. Oceanogr.*, **10**, 83–89.

Park, Y. -G., Bryan, K., 2000: Comparison of thermally driven circulation from a depth-coordinate model and an isopycnal model Part I: Scaling-law sensitivity to vertical diffusivity, *J. Phys. Oceanogr.*, **30**, 590–605.

Pedlosky, J., 2003: Waves in the ocean and atmosphere, Springer, 206pp.

Pollard, R. T., Millard Jr., R.C., 1970: Comparison between observed and simulated wind-generated inertial oscillations, *Deep Sea Res.*, **17**, 813–821.

Polzin, K. L., L'vov, Y. V., 2011: Toward regional characterizations of the oceanic internal wavefield, *Rev. Geophys.*, **49**, RG4003.

Polzin, K. L., Toole, J. M., Ledwell, J. R., Schmitt, R. W., 1997: Spatial variability of turbulent mixing in the abyssal ocean, *Science*, **276**, 93–96.

Ray, R. D., Mitchum, G. T., 1996: Surface manifestation of internal tides generated near Hawaii, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 2101–2104.

Rubenstein, D., 1994: A spectral model of wind-forced internal waves, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 819–831.

Sandström, J. W., 1908: Dynamicsche Versuche mit Meerwasser, *Annalen der Hydrographie under Martimen Meteorologie*, **36**, 6–23.

Schwiderski, E. W., 1980: Ocean tides, I, Global ocean tidal equations, *Mar. Geod.*, **3**, 161–217.

Simmons, H. L., Hallberg, R. W., Arbic, B. K., 2004: Internal wave generation in a global baroclinic tide model, *Deep Sea Res.* II, **51**, 3043–3068.

Sjöberg, B., Stigebrandt, A., 1992: Computations of the geographical distribution of the energy flux to mixing processes via internal tides and the associated vertical circulation in the ocean, *Deep Sea Res.*, Part A, **39**, 269–291.

Smyth, W. D., Moum, J. N., Caldwell, D. R., 2001: The efficiency of mixing in turbulent patches: Inferences from direct simulations and microstructure observations, *J. Phys. Oceanogr.*, **31**, 1969–1992.

St.Laurent, L. C., Simmons, H. L., Jayne, S. R., 2002: Estimating tidally driven mixing in the deep ocean, *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 2106.

Sugiyama, Y., Niwa, Y., Hibiya, T., 2009: Numerically reproduced internal wave spectra in the deep ocean, *Geophys. Res. Lett.*, **36**, L07601.

Thorpe, S. A., 1968: On standing internal gravity waves of finete amplitude, *J. Fluid. Mech.*, **32**, 489–528.

Thorpe, S. A., 1975: The excitation, dissipation, and interaction of internal waves in the deep ocean, *J. Geophys. Res.*, **80**, 328–338.

Toggweiler, J. R., Samuels, B., 1995: Effect of Drake Passage on the global thermohaline circulation, *Deep Sea Res.*, Part I, **42**, 477–500.

Tsujino, H., Hasumi, H., Suginohara, N., 2000: Deep Pacific circulation controlled by vertical diffusivity at the lower thermocline depths, *J. Phys. Oceanogr.*, **30**, 2853–2865.

Watanabe, M., Hibiya, T., 2002: Global estimates of the wind-induced energy flux to inertial motions in the surface mixed layer, *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 1239.

Waterhouse, A., MacKinnon, J. A., Nash, J. D., Alford, M. H., Kunze, E., Simmons, H. L., Polzin, K. L., St.Laurent, L. C., Sun, O., Pinkel, R., Talley, L. D., Whalen, C. B., Huussen, T. N., Carter, G. S., Fer, I., Waterman, S., Naveira-Garabato, A., Thurnherr, A. M., Sanford, T., Lee, C., 2014: Global patterns of diapycnal mixing from measurements of the turbulent dissipation rate, *J. Phys. Oceanogr.*, **44**, 1854–1872.

Webb, D. J., Suginohara, N., 2001: The interior circulation of the ocean, in Ocean Circulation and Climate: Observing and Modelling the Global Ocean., edited by G. Siedler, J.Church, J.Gould, Academic Press, 715pp.

Woods, J. D., 1968: Wave-induced shear instability in the summer thermocline, *J. Fluid Mech.*, **32**, 791–800.

丹羽 淑博, 2006: 深層乱流に供給される内部波エネルギーの空間分布に関する数値的研究 (2004 年度日本海洋学会岡田賞受賞記念論文), 海の研究, 15, 395–417.

丹羽 淑博, 日比谷 紀之, 2009: 内部潮汐波のグローバル分布に関する数値シミュレーション, 第２３回数値流体力学シンポジウム講演論文集, D5-3.

光易 恒,1995: 海洋波の物理, 岩波書店, 210pp.

松本 晃治, 2004:やさしい海洋潮汐モデリング, 平成 16 年度東京大学地震研究所共同利用研究集会-地球の「流れ」を見る-衛星重力ミッション論文集.