恒星熱対流の臨界状態と平均流生成について

竹広 真一

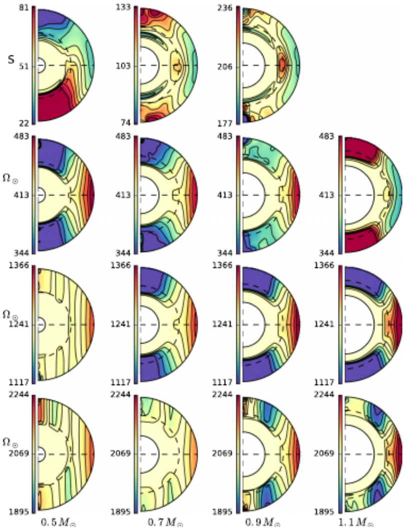
2020 年 10 月 13 日

第 1 回 GFD オンラインセミナー

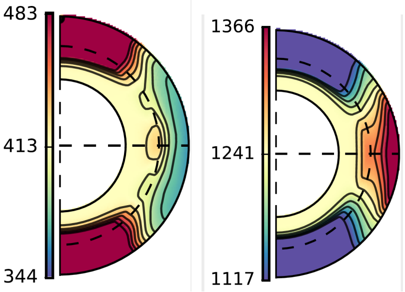
共同研究者：Allan Sacha Brun, 山田 道夫

はじめに

- さまざまな太陽型恒星の熱対流と差分回転の系統的なパラメター研究 (Brun et al. 2017)
- 恒星対流モデル (非弾性回転球殻熱対流+ α) の有限振幅時間積分
- 反太陽型の差分回転の発見 (anti-solar differential rotation)



はじめに

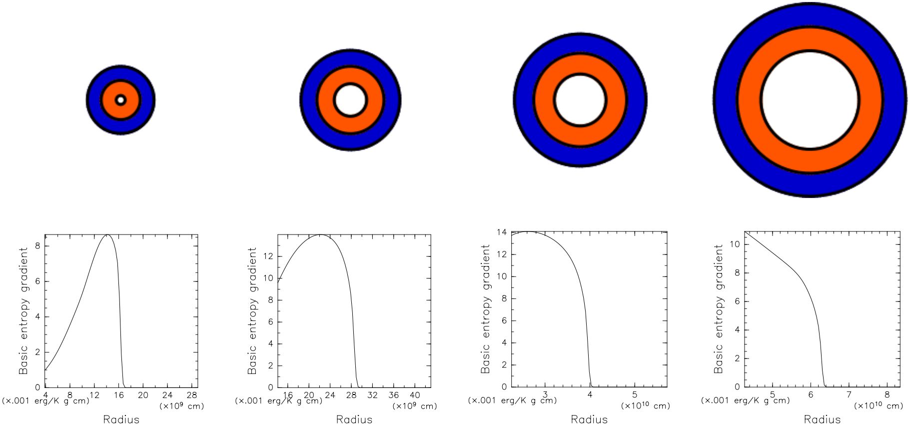


反太陽型 (左) と太陽型 (右) の比較 (Brun et al. 2017)

- 臨界レイリー数と臨界対流構造, 超臨界度?
- 臨界状態近くでの平均帯状流は赤道逆行流となりうるか?
- 平均帯状流の生成維持メカニズムは?

恒星モデル

恒星モデル



M05R1 M07R1 M09R1 M11R1

恒星モデルの基本場エントロピー動径傾度分布.

- 上層：対流層 (不安定/中立成層)
- 下層：放射層 (安定成層)

支配方程式：非弾性方程式系

$$\nabla\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega} + 2\Omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} = -\nabla\Pi + \frac{S}{C_p}\boldsymbol{g}(r) + \frac{1}{\overline{\rho}}\boldsymbol{F}_\nu, \tag{2}$$

$$\Pi = \frac{p}{\overline{\rho}} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2, \quad (\boldsymbol{F}_\nu)_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\overline{\rho}\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right\},$$

$$\overline{\rho}\overline{T}\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)(\overline{S}+S)\right]$$

$$= \nabla\cdot[\kappa_{rad}\overline{\rho}C_p\nabla(\overline{T}+T) + \kappa\overline{\rho}\overline{T}\nabla S + \kappa_0\overline{\rho}\overline{T}\nabla\overline{S}] + \overline{\rho}\epsilon + Q_\nu, \tag{3}$$

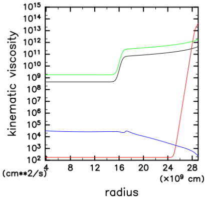
$$Q_\nu = \frac{\overline{\rho}\nu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2.$$

- 恒星の対流状態を模するようチューニングした粘性拡散係数の動径分布
  - 粘性拡散 $\nu(r)$
  - エントロピー拡散 $\kappa(r)$ (水平非一様成分, $n \neq 0$)
  - エントロピー拡散 $(\kappa_0(r)$ (水平一様成分, $n = 0$)
  - 温度拡散 $\kappa_{rad}(r)$ (放射過程)

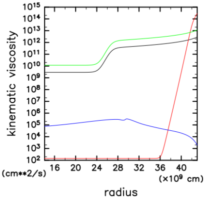
支配方程式：境界条件

- 流れ場：球殻上下端で応力なし条件
- エネルギー：エントロピー傾度が一定

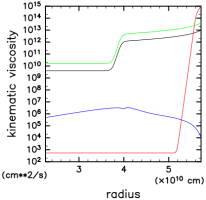
恒星モデルの物性分布



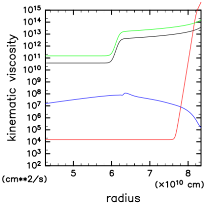
M05R1



M07R1



M09R1



M11R1

恒星モデルの粘性拡散係数 ν (黒), κ (緑), κ_0 (赤), κ_{rad} (青) の動径分布.

臨界対流計算

線形安定性

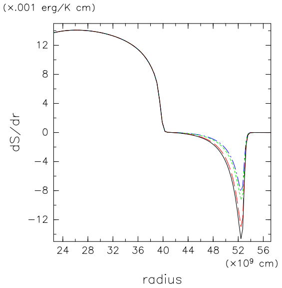
- 有次元のシステムで安定性を計算
  - 普通はシステムを規格化して無次元パラメター空間を調査
  - 規格化が面倒，定式化やプログラムを間違えそう
- 手順
  - 擾乱が exp(σt) に比例と仮定
    $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ は複素成長率
  - 擾乱に対する粘性・拡散係数の振幅を大きくする．分布は元のと相似.
  - 背景場への拡散係数はそのまま.
  - エクマン数を定数とすべく，自転角速度も増加させる

$$\kappa = \kappa^* f, \ \kappa_0 = \kappa_0^* f, \ \kappa_{rad} = \kappa_{rad}^* f, \ \nu = \nu^* f, \ \Omega = \Omega^* f,$$

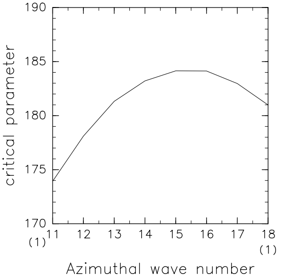
f は係数の増幅率，* はモデルオリジナルの値

基本場

- 拡散係数の増幅係数 f に応じて拡散解 (静止状態) を計算
- ある東西波数 m の擾乱に関する線形化方程式の固有値問題を解いて, 成長率 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ を計算
- f を動かし, 中立 $\sigma_r = 0$ を探す
- 東西波数 m を変えて最大の f を探し臨界状態を定める.



M09 シリーズの拡散解



M11R1 の中立曲線

無次元数

- 無次元数 (レイリー数 Ra, エクマン数 Ek) の評価法

$$Ra = \frac{g^{(c)}}{C_p}\frac{|dS^{(p)}/dr|L^4}{\kappa^{(c)}\nu^{(c)}}, \quad Ek = \frac{\nu^{(c)}}{\Omega L^2}.$$

  - $^{(c)}$: 対流層の中間層での値
  - $^{(p)}$: 分布のピークでの値
  - L : 対流層の厚さ
- プラントル数は $Pr = \nu/\kappa = 0.25$ でどこでも一定.

線形擾乱方程式

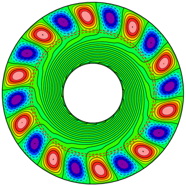
- 線形擾乱方程式

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}') = 0, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + 2\Omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}' = -\nabla\left(\frac{p'}{\overline{\rho}}\right) + \frac{S'}{C_p}\boldsymbol{g}(r) + \frac{1}{\overline{\rho}}\boldsymbol{F}'_\nu, \\
&\quad (\boldsymbol{F}'_\nu)_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\overline{\rho}\nu\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}\right)\right\}, \\
&\overline{\rho}\,\overline{T}\left[\frac{\partial S'}{\partial t} + u'_r\frac{d}{dr}(\overline{S}+S_0)\right] = \nabla\cdot[\kappa_{rad}\overline{\rho}C_p\nabla T' + \kappa\overline{\rho}\,\overline{T}\nabla S'].
\end{aligned}
$$

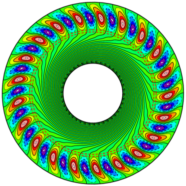
数値計算

- 速度場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルで表現
- スペクトル法：球面調和函数 + チェビシェフ多項式
- 解像度
  - 各方位角波数 m について全波数 m 次から $m + 30$ 次まで計算
  - 動径 128 点, チェビシェフ多項式 128 次まで計算
- LAPACK ルーチンを使って固有値解析

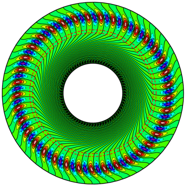
臨界対流 (動径速度)



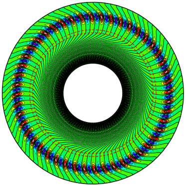
M07S



M07R1



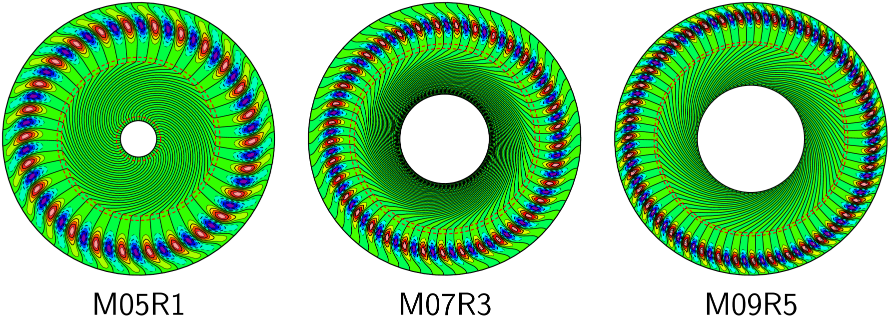
M07R3



M07R5

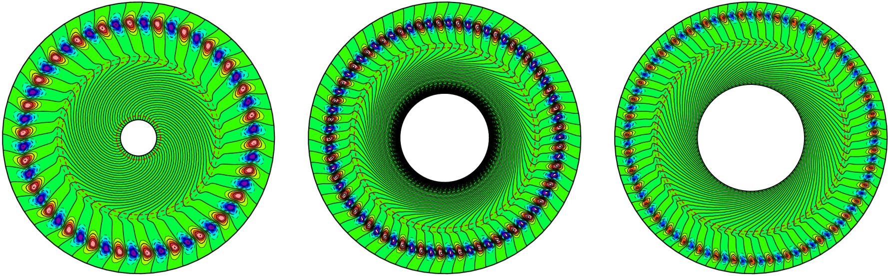
- M07 シリーズの動径速度の赤道断面分布
- 対流が球殻上層で発生
- 下層の螺旋状構造は上層の対流により駆動されている内部重力波

臨界対流 (動径速度)



- エクマン数が 3×10^{-4} あたりの動径速度分布
- 背景場密度コントラスト N_ρ^{cz} は 3.7 から 4.2 まで, 対流層の縦横比 $\beta^{cz} = r_t / r_o$ は 0.59 から 0.71 まで変化.

臨界対流(エントロピー擾乱)



M05R1　M07R3　M09R5

- エクマン数が 3×10^{-4} あたりのエントロピー擾乱分布
- 上層での位相線の傾きが異なる
  - 対流構造は回転順方向に伝播
  - 対流パターンに伴うエントロピーの拡散による構造：対流中心から動径内外両方向に同じ時間遅れで伝わる.

モデルパラメター

- 非線形計算 (Brun et al. 2017) のモデルパラメター

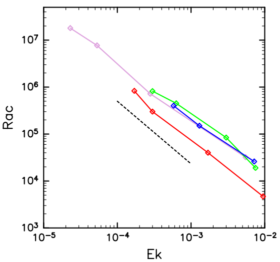
	L	$g^{(c)}$	$dS^{*(p)}/dr$	$\kappa^{*(c)}$	$\nu^{*(c)}$	Ω^*	Ra^*	Ek^*
M05S	1.3e10	1.1e5	1.1e-7	1.2e12	3e11	3.25e-7	2.7e6	5.5e-3
M05R1			1.1e-7	5e11	1.25e11	2.6e-6	1.6e7	2.8e-4
M05R3			2e-7	2.8e11	7e10	7.8e-6	9.2e7	5.3e-5
M05R5			3.1e-7	2e11	5e10	1.3e-5	2.8e8	2.3e-5
M07S	1.3e10	6.5e4	3.5e-7	5e12	1.25e12	7.8e-7	3e5	9.5e-3
M07R1			3.5e-7	3e12	7.5e11	2.6e-6	8.3e5	1.7e-3
M07R3			4.5e-7	1.6e12	4e11	7.8e-6	3.7e6	3e-4
M07R5			4.5e-7	1.5e12	3.75e11	1.3e-5	4.2e6	1.7e-4
M09S	1.6e10	5e4	4e-6	1e13	2.5e12	1.3e-6	1.5e6	7.5e-3
M09R1			4e-6	8e12	2e12	2.6e-6	2.3e6	3e-3
M00R3			3.2e-6	5e12	1.25e12	7.8e-6	4.8e6	6.3e-4
M09R5			3.2e-6	4e12	1e12	1.3e-5	7.5e6	3e-4
M11R1	2e10	2.8e4	3e-5	3e13	7.5e12	2.6e-6	1.7e6	7.2e-3
M11R3			2.1e-5	1.6e13	4e12	7.8e-6	4.2e6	1.3e-3
M11R5			2.1e-5	1.2e13	3e12	1.3e-5	7.5e6	5.8e-4

臨界パラメター

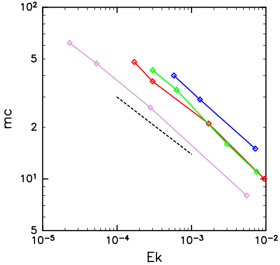
- 臨界パラメター

	m_c	ω_c	f	$dS^{(p)}/dr$	$\kappa^{(c)}$	$\nu^{(c)}$	Ra_c	Ra^*/Ra_c
M05S	8	2.7e-4	1371	1.75e-3	1.4e15	3.5e14	3.2e4	84
M05R1	26	6e-4	753	3.2e-3	4e14	1e14	7.2e5	22
M05R3	47	8.6e-4	558	4.2e-3	1.4e14	3.5e13	7.7e6	12
M05R5	62	1.0e-3	482	5e-3	1e14	2.5e13	1.8e7	16
M07S	10	2.3e-4	495	2e-3	3e15	7.5e14	4.7e3	64
M07R1	21	3.8e-4	372	2.7e-3	1.2e15	3e14	4e4	21
M07R3	37	5.8e-4	284	3.5e-3	5e14	1.25e14	3e5	12
M07R5	48	6.8e-4	247	4e-3	3.2e14	8e13	8.3e5	5.1
M09S	11	3e-4	366	8e-3	4e15	1e15	1.9e4	79
M09R1	16	5.1e-4	321	9e-3	2e15	5e14	8.4e4	27
M09R3	33	7e-4	230	1.2e-2	1e15	2.5e14	4.5e5	11
M09R5	43	8.7e-4	204	1.4e-2	8e14	2e14	8.2e5	9.1
M11R1	15	3e-4	184	1.3e-2	5e15	1.25e15	2.6e4	65
M11R3	29	5.8e-4	141	1.7e-2	2.4e15	6e14	1.5e5	28
M11R5	40	6.5e-4	122	2e-2	1.6e15	4e14	4e5	19

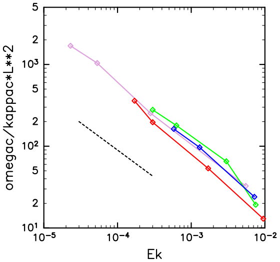
臨界パラメター



レイリー数
$Ra_c \sim Ek^{-4/3}$



方位角波数
$m_c \sim Ek^{-1/3}$



振動数
$\omega_c \sim Ek^{-2/3}$

- 臨界パラメターとエクマン数の関係
  円筒モデルによる古典的な漸近解析のスケーリングに従っている
  $\Leftarrow$ 対流構造が動径方向に局所的だから

弱非線形計算 ～ 平均帯状流

弱非線形解析

- 模式的な支配方程式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = L\boldsymbol{x} + N[\boldsymbol{x}],$$

  $L\boldsymbol{x}$, $N[\boldsymbol{x}]$ はそれぞれ線形および非線形項
- 臨界状態 $\boldsymbol{x_c}$ は $\sigma \boldsymbol{x_c} = L\boldsymbol{x_c}$ から定まる.
- 弱非線形解析は

$$0 = L\boldsymbol{x_2} + N[\boldsymbol{x_c}]$$

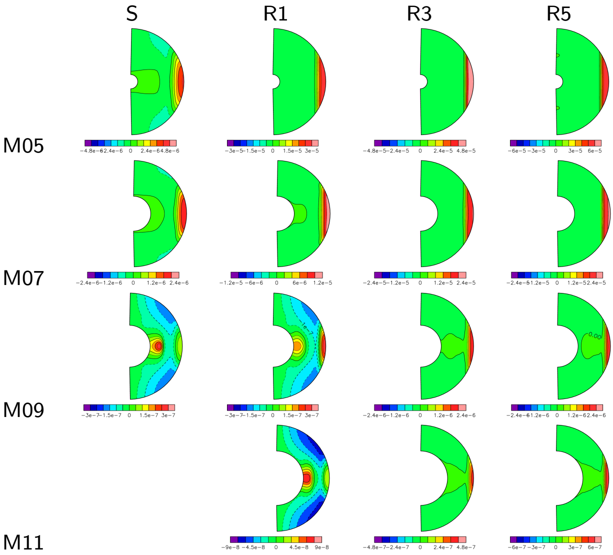
  を解いて, 臨界対流により励起される平均帯状状態 $\boldsymbol{x_2}$ を求める.

弱非線形解析

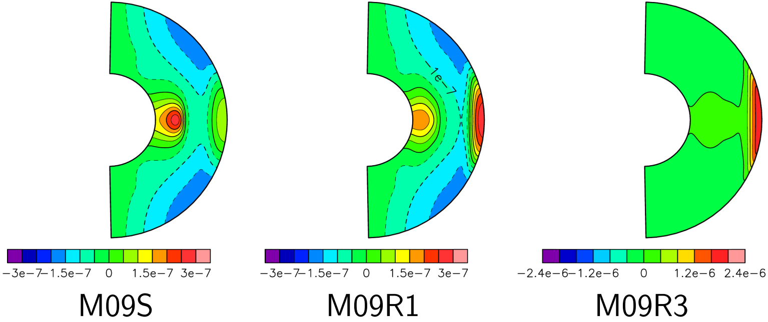
- 2 次の平均帯状流方程式

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot(\overline{\rho}\overline{\boldsymbol{u}^{(2)}}) = 0, \\
&-2\Omega\boldsymbol{k}\times\overline{\boldsymbol{u}^{(2)}} - \nabla\left(\frac{\overline{p^{(2)}}}{\overline{\rho}}\right) + \frac{\overline{S^{(2)}}}{C_p}\boldsymbol{g}(r) + \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\boldsymbol{F}_\nu^{(2)}} \\
&= -\overline{\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{\omega}'} + \nabla\left(\frac{1}{2}\overline{|\boldsymbol{u}'|^2}\right), \\
&-\overline{\rho}\overline{T}(\overline{\boldsymbol{u}^{(2)}}\cdot\nabla)(\overline{S}+S_0) + \nabla\cdot[\kappa_{rad}\overline{\rho}C_p\nabla\overline{T^{(2)}} + \kappa\overline{\rho}\overline{T}\nabla\overline{S^{(2)}}] \\
&= \overline{\rho}\overline{T}\overline{(\boldsymbol{u}'\cdot\nabla)S'} - \overline{Q'_\nu},
\end{aligned}
$$

平均帯状流一覧

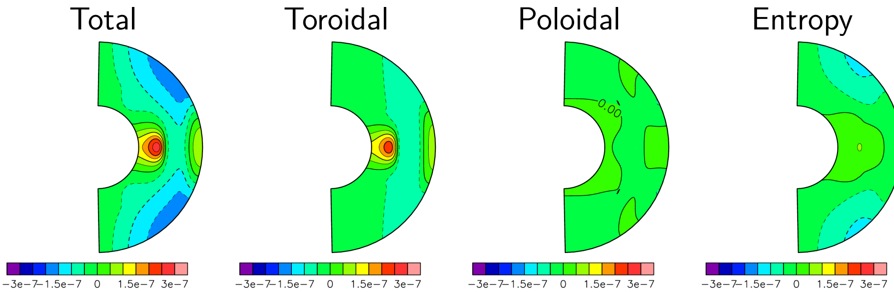


平均帯状流



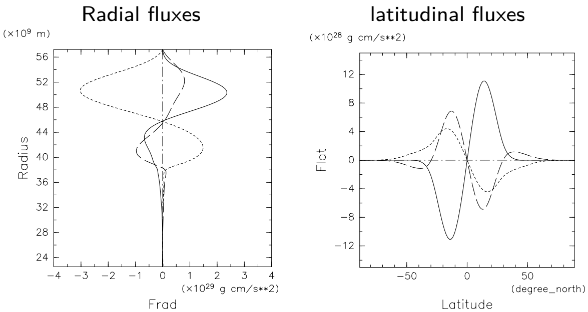
- すべての場合で赤道表面で回転順行流
- 自転が遅い場合には放射層でも帯状流が生成される

平均帯状流 (M09S, 各非線型効果ごと)



- 臨界対流の各非線形効果が引き起こす平均帯状流 (M09S)
- 帯状流流はトロイダルポテンシャル方程式の非線形項により生成 ⇒ レイノルズ応力による直接加速

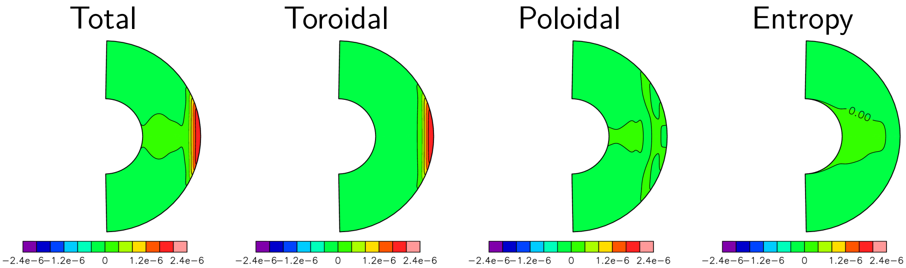
角運動量フラックス (M09S)



M09S での弱非線形解の角運動量フラックス．実線, 破線, 点線はそれぞれレイノルズ応力, 平均子午面循環, 粘性による角運動量フラックス．Solid, broken, dotted indicate 一点破線は全角運動量フラックス．

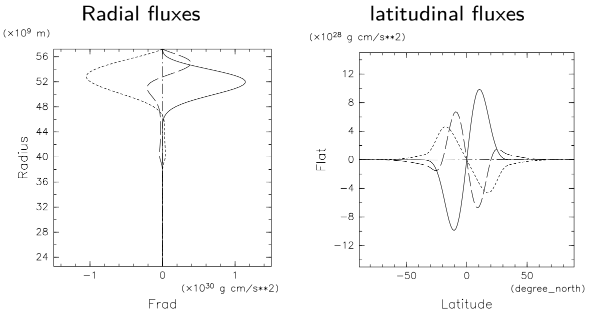
- 放射層はレイノルズ応力により加速
  $\Leftarrow$ (おそらく) 内部重力波による角運動量輸送

平均帯状流 (M09R3, 各非線型効果ごと)



- 臨界対流の各非線形効果が引き起こす平均帯状流 (M09R3)
- 帯状流流はトロイダルポテンシャル方程式の非線形項により生成 ⇒ レイノルズ応力による直接加速

角運動量フラックス (M09R3)



M09R3 での弱非線形解の角運動量フラックス. 実線, 破線, 点線はそれぞれレイノルズ応力, 平均子午面循環, 粘性による角運動量フラックス. Solid, broken, dotted indicate 一点破線は全角運動量フラックス.

- 放射層の角運動量フラックスはない.

まとめ

まとめ

- 恒星モデルの臨界状態と臨界パラメターを求めることができた
- 非線形計算 (Brun et al. 2017) の超臨界度を評価できた.
- 臨界対流により引き起こされる平均帯状流は, 赤道表面においてどの場合も回転順方向であった.
- いくつかの回転が遅い場合において, 放射層で平均帯状流が励起された.

参考文献

- Brun, A. S., Strugarek, A., Varela, J., Matt, S. P., Augustson, K. C., Emeriau, C., DoCao, O. L., Brown, B., Toomre, J., 2017 : On Differential Rotation and Overshooting in Solar-like Stars. Astrophys. J., 836, 192(28pp).
- Takehiro, S., Brun, A. S., Yamada, M., 2020 : Assessment of Critical Convection and Associated Rotation States in Models of Sun-like Stars Including a Stable Layer. Astrophys. J., 893, 83 (15pp).

補遺

内部重力波

- Dispersion relation of internal gravity waves:

$$\omega^2 = \frac{N^2 k_H^2}{K^2}, \ \ K^2 = k_H^2 + k_r^2$$

ω : frequency, N : Brunt Vaisala frequency, K, k_H, k_r : total, horizontal and radial wavenumbers.

- Group velocity in the radial direction:

$$C_{gr} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k_r} = -\frac{N k_H}{K^{3/2}} k_r = -\frac{\omega k_r}{K^2}.$$

- Assume that the waves follow the following eq.

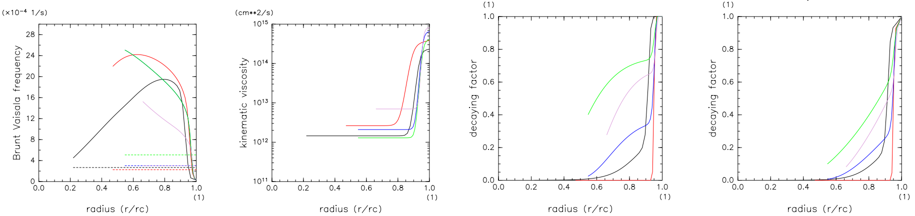
$$C_{gr} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \nu \nabla^2 \phi \sim -\nu K^2 \phi,$$

the solution is expressed as

$$\phi \sim e^{-\tau}, \ \tau = \int_{r_c}^{r} \frac{\nu K^2}{C_{gr}} dr,$$

内部重力波

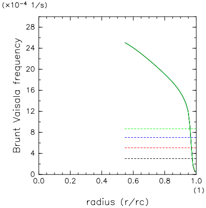
B.V.freq. Viscosity $e^{-\tau}$ (d) $(1/\sqrt{\rho_B})e^{-\tau}$



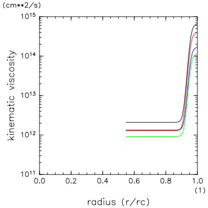
Black, red, blue, green, magenta indicate the cases of M05S, M07S, M09S, M09R1 and M11R1, respectively.

内部重力波

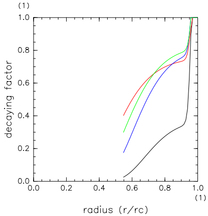
B.V.freq.



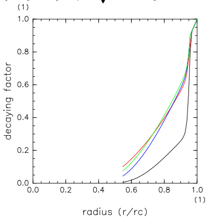
Viscosity



$e^{-\tau}$

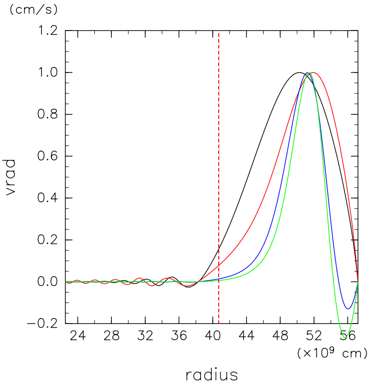


(d) $(1/\sqrt{\rho_B})e^{-\tau}$



Black, red, blue, green indicate the cases of M09S, M09R1, M09R3 and M09R5, respectively.

内部重力波



Structure of Critical convection for M09 series.