# 非弾性方程式とブシネスク方程式 — 理想気体用 —

高橋こう子, 小高正嗣, 林祥介

## 2002 年 12 月 17 日

## 目 次

**Abstract**

理想気体用の非弾性方程式とブシネスク (Boussinesq) 方程式の導出について解説する. これらは, 鉛直方向に密度成層している系を記述するための代表的な方程式系であり, 音波が除去されていることに特色がある. 系の平均的な鉛直密度勾配が大きい時に用いられる方程式が非弾性方程式, 系の密度がほぼ一定とみなすことができる場合に用いられる方程式がブシネスク方程式である. ここでは, 系は断熱, 非散逸であり, 流体は理想気体として扱うことができるものとする. また, 簡単のために系の回転も考えない.

# 1 はじめに

密度成層を許した静止状態にある流体を考える. 流体力学の基礎方程式をこの静止状態のまわりで線形化し波動解を求めると, 音波と重力波 (あるいは対流) という二種類の波動 (あるいは運動モード) が存在していることが理解される. しかるに, 気象現象や海洋現象の記述など地球流体力学の現場においては, 音波の存在が本質的ではない場合が少なくない. このような場合, 音波を除去し, 現象において本質的な重力波あるいは対流運動のみを記述できる方程式を持っていると便利である.

方程式において音波を除去しておくことは数値計算においても都合がよい. 波の鉛直波数が水平波数にくらべ十分大きい場合, すなわち, 鉛直波長が水平波長に比べて十分短い場合, 重力波の鉛直位相速度は音波の鉛直位相速度 (ほぼ音速) に比べ非常に小さくなる. 大気や海洋など地球表層の流体現象の記述においては, 水平方向に比べて鉛直方向への場の変化が大きく, したがって, 数値モデルの格子点間隔も水平方向に比べ鉛直方向が圧倒的に細かいことが多い. このような状況下においては, 方程式から音波を除去しておけば, 系の時間積分において時間間隔を大きくとることができ計算が省資源となる.

以下では大気を想定して, 理想流体用の非弾性方程式 (あるいは非弾性近似方程式) とブシネスク方程式 (あるいはブシネスク近似方程式) を導出する.

非弾性近似とは, 簡単に言えば, 連続の式における密度の時間微分項 ($\partial\rho/\partial t$) を無視することによって, 解に音波を含まないようにした近似である.

ブシネスク近似とは, 簡単に言えば, 連続の式を非圧縮としてしまうことにより解に音波を含まないようにした近似である. ただし, 熱力学から与えられる密度の変化は運動方程式の浮力項に残しておくことが特色であり, これにより重力波あるいは対流運動の表現が可能となっている.

最後に, 非弾性方程式系のエネルギー方程式を導出する.

# 2 基礎方程式

## 2.1 元となる方程式系

基礎方程式は運動方程式, 連続の式, 熱力学の式である. 非粘性, 断熱の下ではそれぞれ以下のように表される.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0. \tag{3}$$

$\boldsymbol{v}, p, \rho, \Phi$ は, それぞれ, 速度, 圧力, 密度, ポテンシャルである.

熱力学量は理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT \tag{4}$$

に従うものとする. $R$ は質量あたりの気体定数である.

$\theta$ は温位であり,

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_b}\right)^{-\kappa};\ \kappa = \frac{R}{c_p}, \tag{5}$$

で定義される. $c_p$ は質量あたりの定圧比熱である. また, $p_b$ は適宜定められるべき基準圧力 (定数) である.

## 2.2 エクスナー関数による表現

ここで, 記述の簡便さのために, エクスナー (Exner) 関数とよばれる無次元量

$$\Pi \equiv \left(\frac{p}{p_b}\right)^{\kappa} \tag{6}$$

を導入する.

熱力学量をエクスナー関数 $\Pi$ と温位 $\theta$ とで表現すると

$$p = p_b \Pi^{1/\kappa}, \quad T = \theta\Pi, \quad \rho = \frac{p_b}{R}\frac{\Pi^{1/\kappa\ -1}}{\theta} \tag{7}$$

となる.

したがって, 運動方程式 (1) 右辺の圧力傾度項は,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla p}{\rho} &= \frac{1}{\rho}\frac{p}{\kappa}\frac{\nabla\Pi}{\Pi} \\ &= c_p\theta\,\nabla\Pi. \end{aligned}$$

連続の式 (2) は

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\theta + \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\ln\Pi\right] = \nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

であるが, 熱の式 (3), すなわち, 断熱であることを用いると

$$\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\frac{d}{dt}\ln\Pi = \nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

となる.

以上をまとめると基礎方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -c_p\theta\nabla\Pi - \nabla\Phi, \tag{8}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\frac{d}{dt}\ln\Pi = \nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{9}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{10}$$

となる.

## 2.3 静止状態の分離

全ての変数を静止状態とそこからのずれとに分割し, 変数 $A$ を

$$A = A_s + A'$$

と表現することにする. $A_s$ は静止状態, $A'$ はそこからのずれである.

静止状態では $\boldsymbol{v}_s = 0$ なので, 運動方程式 (8) において静力学平衡の式,

$$0 = -c_p \theta_s \nabla \Pi_s - \nabla \Phi, \tag{11}$$

が得られる[1]. したがって (8) 式右辺は次のように書き換えることができる.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -c_p \theta \nabla \Pi' + \frac{\theta'}{\theta_s} \nabla \Phi.$$

ただし, $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$ であるので「'」を省いた.

連続の式 (9), 熱力学の式 (10) も同様にして静止状態を分離する. まとめると,

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -c_p \theta \nabla \Pi' + \frac{\theta'}{\theta_s} \nabla \Phi, \tag{12}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \frac{d}{dt} \ln \Pi = \nabla \cdot \boldsymbol{v}, \tag{13}$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = -\boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta_s \tag{14}$$

となる.

[1] もとの運動方程式 (1) に帰れば

$$0 = -\frac{1}{\rho_s} \nabla p_s - \nabla \Phi$$

## 2.4　ポテンシャル力が一様な場合

ポテンシャル力が考察する範囲で一様とみなせる場合について考える. 直線直交座標を導入し, $z$ 軸を $\nabla\Phi$ 向きにとる.

$$\nabla\Phi = g\boldsymbol{k}$$

と表現される. ここで, $g$ は定数, $\boldsymbol{k}$ は $z$ 方向の単位ベクトルである.

このとき静力学平衡の式 (11) は,

$$\boxed{0 = -c_p\theta_s\,\nabla\Pi_s - g\boldsymbol{k}, \qquad (15)}$$

あるいは,

$$\nabla_H \Pi_s = 0, \qquad (16)$$

$$c_p\theta_s \frac{\partial\Pi_s}{\partial z} = -g \qquad (17)$$

となる. ただし,

$$\nabla_H = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0\right)$$

である. (16) から $\Pi_s, \theta_s$ は $z$ のみの関数であることがわかる.

静止状態からのずれの部分に対する基礎方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -c_p\theta\,\nabla\Pi' + \frac{\theta'}{\theta_s}g\boldsymbol{k}, \tag{18}$$

$$\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\frac{d}{dt}\ln\Pi = \nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{19}$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = -\frac{N_s^2\theta_s}{g}w \tag{20}$$

となる. 熱力学の式 (14) は浮力振動数 (Brunt-Väisälä 振動数)

$$N_s^2 \equiv \nabla\Phi\cdot\nabla\ln\theta_s = \frac{g}{\theta_s}\frac{\partial\theta_s}{\partial z}, \tag{21}$$

を用いて書き直した.

# 3　スケーリング

それぞれの物理量に対するスケールを以下のように定義する:

| | |
|---|---|
| 時間変化スケール | $\tau$ |
| 水平方向の空間変化スケール | $L$ |
| 鉛直方向の空間変化スケール | $D$ |
| 速度の水平成分のスケール | $U$ |
| 速度の鉛直成分のスケール | $W$ |
| 温位のスケール | $\Theta \equiv \theta_s(z=0)$ |
| 温位の静止場からのずれのスケール | $\Delta\Theta$ |

ただし, $\Delta\Theta$ は静止状態の温位の最大値と最小値の差である. 温位のスケールは地表での値 $\theta_s(z=0)$ で代表できるものとした. また, 断熱系 $(d\theta/dt=0)$ を考えているので $|\theta'|$ の上限は $\Delta\Theta$ で抑えられる.

このようなスケールの下で (17) $\sim$ (20) 式をそれぞれ無次元化する. 無次元量には $*$ をつけて表現することにすると,

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{c_p\Theta}{D}\theta_s^*\frac{\partial \Pi_s}{\partial z^*} - g, && (22)\\
\frac{U}{\tau}\frac{d\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{H}}^*}{dt^*} &= -\frac{c_p\Theta}{L}\theta^*\nabla_H^*\Pi', && (23)\\
\frac{W}{\tau}\frac{dw^*}{dt^*} &= -\frac{c_p\Theta}{D}\theta^*\frac{\partial \Pi'}{\partial z^*} + \frac{\Delta\Theta}{\Theta}\frac{\theta'^*}{\theta_s^*}g, && (24)\\
\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt^*}\ln\Pi &= \frac{U}{L}\nabla_H^*\cdot\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{H}}^* + \frac{W}{D}\frac{\partial w^*}{\partial z^*}, && (25)\\
\frac{\Delta\Theta}{\tau}\frac{d\theta'^*}{dt^*} &= -\frac{N_s^2\Theta W}{g}\theta_s^* w^*. && (26)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt^*} &= \frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{U}{L/\tau}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{H}}^*\cdot\nabla_H^* + \frac{W}{D/\tau}w^*\frac{\partial}{\partial z^*},\\
\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{H}}^* &= (u^*, v^*, 0),\\
\nabla_H^* &= \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}, 0\right)
\end{aligned}
$$

である.

まとめると, 静止状態の基礎方程式は

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla_H^* \Pi_s, && (27)\\
0 &= -\theta_s^* \frac{\partial \Pi_s}{\partial z^*} - \alpha_2, && (28)
\end{aligned}
$$

静止状態からのずれの部分に対する基礎方程式は

$$
\begin{aligned}
\alpha_3\alpha_4 \frac{d\boldsymbol{v_H}^*}{dt^*} &= -\theta^* \nabla_H^* \Pi', && (29)\\
\delta\alpha_3\alpha_5 \frac{dw^*}{dt^*} &= -\theta^* \frac{\partial \Pi'}{\partial z^*} + \alpha_1\alpha_2 \frac{\theta'^*}{\theta_s^*}, && (30)\\
\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \frac{d}{dt^*} \ln \Pi &= \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \nabla_H^* \cdot \boldsymbol{v_H}^* + \frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3} \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, && (31)\\
\alpha_1 \frac{d\theta'^*}{dt^*} &= -\frac{N_s^2 D}{g} \frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3} \theta_s^* w^*, && (32)
\end{aligned}
$$

である.

ただし, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ は

$$
\alpha_1 \equiv \frac{\Delta\Theta}{\Theta}, \quad \alpha_2 \equiv \frac{gD}{c_p\Theta}, \quad \alpha_3^2 \equiv \frac{(L/\tau)^2}{c_p\Theta}, \quad \alpha_4^2 \equiv \frac{U^2}{c_p\Theta}, \quad \alpha_5^2 \equiv \frac{W^2}{c_p\Theta}, \qquad (33)
$$

また,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt^*} &= \frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \boldsymbol{v_H^*} \cdot \nabla_H^* + \frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3} w^* \frac{\partial}{\partial z^*}, && (34)\\
\delta &\equiv \frac{D}{L} && (35)
\end{aligned}
$$

である. $\delta$ はアスペクト比 (aspect ratio) と呼ばれる.

以下の節では簡単のため上付き添字 $*$ を省略して議論する.

# 4 非弾性方程式

## 4.1 非弾性近似のための仮定 (1)

非弾性近似のための重要な仮定は

着目している大気層において, その温位はあまり大きくは変わらない, すなわち,

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\Theta}{\Theta} \ll 1, \tag{36}$$

である.

この仮定は, 考えている鉛直スケール $D$ が $\theta_s$ の変化のスケールに比べて小さい, という具合に言い替えてもよい. 次元を持った量で表現すれば,

$$\begin{aligned} D\left|\frac{\partial\theta_s}{\partial z}\right| &\sim \Delta\Theta, \\ \theta_s &\sim \Theta \end{aligned}$$

であるので

$$D/\frac{\theta_s}{|\frac{\partial\theta_s}{\partial z}|} \sim \alpha_1 \ll 1. \tag{37}$$

ということである. 無次元量で表現すれば

$$1/\frac{\theta_s}{|\frac{\partial\theta_s}{\partial z}|} \sim \alpha_1 \ll 1. \tag{38}$$

となる.

浮力振動数 (21) を用いて表現すれば

$$\frac{N_s^2 D}{g} \sim \alpha_1 \ll 1, \tag{39}$$

となる. $g/N_s^2$ を成層スケールという.

## 4.2　非弾性近似のための仮定 (2)

熱力学の式 (32) において, 時間微分を (34) にしたがって展開し, 各項の大きさを比較する. $\alpha_3 < \alpha_4$ である場合, すなわち, 時間微分に比べて水平移流項が大きい場合には, 左辺第二項と左辺第三項または右辺がつりあわなければならない (水平移流と鉛直移流とがつりあわなければならない) ので

$$\alpha_5 \sim \alpha_4 \delta$$

でなければならないことがわかる. $\alpha_3 > \alpha_4$ である場合, すなわち, 時間微分に比べて水平移流項が小さい場合には, 左辺第三項または右辺は $O(1)$ でなければならない (時間微分と鉛直移流とがつりあわなければならない) ので, (39) を用いれば,

$$\alpha_5 \sim \alpha_3 \delta$$

でなければならないことがわかる. $\alpha_3 \sim \alpha_4$ である場合, すなわち, 時間微分と水平移流項とがおなじ大きさである場合には, 左辺第三項または右辺は, 高々, 左辺第一, 二項と同程度であれば良い. 以上あわせて表現すると

$$\alpha_5 \lesssim \max(\alpha_3,\ \alpha_4) \times \delta, \tag{40}$$

という関係が成り立っていなければならないことがわかる[2].

[2] 厳密に言うと, 熱力学の式 (32) の左辺第三項と右辺のみがつりあう, という場合, すなわち, 静止場の鉛直移流と, 静止場からのずれの鉛直移流とのつりあい, という選択が排除されるという仮定をしている.

このことを念頭において, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$ をおなじ大きさの量として扱うことにし, $\alpha_1$ との間に次のような仮定を置く.

$$\begin{aligned}\alpha_3^2 &= \frac{(L/\tau)^2}{c_p\Theta} \sim \alpha_1, && (41)\\ \alpha_4^2 &= \frac{U^2}{c_p\Theta} \sim \alpha_1, && (42)\\ \alpha_5^2 &= \frac{W^2}{c_p\Theta} \sim \alpha_1. && (43)\end{aligned}$$

また,

$$\delta \lesssim 1. \qquad (44)$$

であるものとする.

なお, $\alpha_2$ に関しては, 本節においては,

$$\alpha_2 = \frac{gD}{c_p\Theta} \lesssim 1 \qquad (45)$$

であるものと仮定する. 書き換えると

$$\alpha_2 = \frac{D}{H}, \quad H \equiv \frac{c_p\Theta}{g}, \qquad (46)$$

$H$ は等温位大気の高さ[3] である. 考える大気層の厚さとしては, おおむね大気の厚さを念頭に置いていることになっている.

[3]地上気温を $\Theta$ とし断熱温度減率 $g/c_p$ とすると, この高度で温度が 0 となる.

上記仮定 (41) ∼ (44) は, 音速を用いて次のようにも表現できる. 理想気体の音速は $c_s^2 = \gamma RT$ であるので, 着目している大気層においておおむね

$$c_s^2 \ \sim \ c_p\Theta$$

か成り立つとすれば, (41) ∼ (44) は, 系に特徴的な時空間変化で定められる速度 (波動的な解なら位相速度), ならびに, 流速が音速に比べ非常に小さい, と主張していることになる. すなわち,

$$\left(\frac{L}{\tau}\right)^2 \ll c_s^2, \quad U^2 \ll c_s^2, \quad W^2 \ll c_s^2.$$

### 4.3 $\alpha_1$ 展開

仮定 (36) の下で, 変数を微小パラメータ $\alpha_1$ で展開する.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v_H} &= \boldsymbol{v_{H}}_0 + \alpha_1 \boldsymbol{v_{H}}_1 + \alpha_1^2 \boldsymbol{v_{H}}_2 + \cdots, && (47)\\
w &= w_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_1^2 w_2 + \cdots, && (48)\\
\Pi &= \Pi_s + \Pi' \\
&= \Pi_{s0} + \alpha_1 \Pi_{s1} + \alpha_1^2 \Pi_{s2} + \cdots \\
&\quad + \Pi'_0 + \alpha_1 \Pi'_1 + \alpha_1^2 \Pi'_2 + \cdots, && (49)\\
\theta &= \theta_s + \alpha_1 \theta' \\
&= 1 + \alpha_1 \theta_{s1} + \alpha_1^2 \theta_{s2} + \cdots \\
&\quad + \alpha_1 \theta'_1 + \alpha_1^2 \theta'_2 + \cdots. && (50)
\end{aligned}
$$

仮定 (36) の元で展開しているので, $\theta$ の主要項は定数 1 であることに注意. 静止大気の $\alpha_1$ の 0 次の表現は等温位大気である.

以下, 以上の表現を方程式 (27) ～ (32) に代入し, $\alpha_1$ の次数で整理していくことにする.

### 4.4 $\alpha_1$ に関する 0 次の式

静力学平衡の式 (28) は次のようになる.

$$(1+\alpha_1\theta_{s1}+\cdots)\frac{\partial}{\partial z}(\Pi_{s0}+\alpha_1\Pi_{s1}+\cdots) = -\alpha_2.$$

$O(\alpha_1^0)$ の項を取り出すと,

$$\frac{\partial \Pi_{s0}}{\partial z} = -\alpha_2,$$

すなわち,

$$\Pi_{s0} = 1-\alpha_2 z. \tag{51}$$

静止大気の $\alpha_1^0$ での表現は等温位大気であるので, 有限高さ $z=1/\alpha_2$ で終る.

(29) ∼ (32) 式から $O(\alpha_1^0)$ の項を取り出して, $\Pi_0'$ を決める. 運動方程式 (29), (30) の変数を $\alpha_1$ で展開すると,

$$\begin{aligned}
\alpha_3\alpha_4\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v_{H}}_0 &+ \alpha_1\boldsymbol{v_{H}}_1+\cdots) \\
&= -\left(1+\alpha_1\theta_{s1}+\cdots+\alpha_1\theta_1'+\alpha_1^2\theta_2'+\cdots\right)\nabla_H(\Pi_0'+\alpha_1\Pi_1'+\cdots), \quad (52)\\
\delta\alpha_3\alpha_5\frac{d}{dt}(w_0 &+ \alpha_1 w_1+\cdots) \\
&= -\left(1+\alpha_1\theta_{s1}+\cdots+\alpha_1\theta_1'+\alpha_1^2\theta_2'+\cdots\right)\frac{\partial}{\partial z}(\Pi_0'+\alpha_1\Pi_1'+\cdots) \\
&\quad +\alpha_1\alpha_2\frac{(\theta_1'+\alpha_1\theta_2'+\cdots)}{(1+\alpha_1\theta_{s1}+\cdots)}. \quad (53)
\end{aligned}$$

ただし

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v_{H}}_0+\alpha_1\boldsymbol{v_{H}}_1+\cdots)\cdot\nabla_H + (w_0+\alpha_1 w_1+\cdots)\frac{\partial}{\partial z}$$

である. したがって, 0 次の項は,

$$\begin{aligned}
0 &= -\nabla_H\Pi_0', \\
0 &= -\frac{\partial}{\partial z}\Pi_0'
\end{aligned}$$

となる[4]. これより $\Pi_0'$ は場所によらないことがわかる.

[4] (29) の左辺は,

$$\begin{aligned}
\alpha_3\alpha_4\frac{d}{dt}\boldsymbol{v_H} &= O(\alpha_3\alpha_4, \alpha_4^2, \alpha_4\alpha_5/\delta) \\
&\le O(\alpha_3\alpha_4, \alpha_4^2, \max(\alpha_3,\alpha_4)\alpha_4) \\
&\ll 1.
\end{aligned}$$

連続の式 (31) は次のように変形してから展開する[5]. (31) 式の左辺は

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\frac{d}{dt}\ln\Pi &= -\frac{1}{\Pi^{1/\kappa\ -1}}\frac{d\Pi^{1/\kappa\ -1}}{dt} \\
&= -\frac{1}{\Pi^{1/\kappa\ -1}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\boldsymbol{v_H}\cdot\nabla_H+\frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3}w\frac{\partial}{\partial z}\right)\Pi^{1/\kappa\ -1}.
\end{aligned}
$$

したがって (31) 式の両辺に $\Pi^{1/\kappa\ -1}$ をかけると,

$$
\frac{\partial}{\partial t}\Pi^{1/\kappa-1} = -\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\nabla\cdot(\Pi^{1/\kappa-1}\boldsymbol{v_H}) - \frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3}\frac{\partial}{\partial z}(\Pi^{1/\kappa-1}w).
$$

変数を $\alpha_1$ で展開すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\Pi_{s0} &+ \alpha_1\Pi_{s1}+\cdots+\Pi'_0+\alpha_1\Pi'_1+\cdots)^{1/\kappa-1} \\
&= -\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\nabla\cdot\left\{(\Pi_{s0}+\alpha_1\Pi_{s1}+\cdots+\Pi'_0+\alpha_1\Pi'_1+\cdots)^{1/\kappa-1}(\boldsymbol{v_{H0}}+\alpha_1\boldsymbol{v_{H1}}+\cdots)\right\} \\
&\quad -\frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\Pi_{s0}+\alpha_1\Pi_{s1}+\cdots+\Pi'_0+\alpha_1\Pi'_1+\cdots)^{1/\kappa-1}(w_0+\alpha_1 w_1+\cdots)\right\}.
\end{aligned}
$$

よって $O(\alpha_1^0)$ の項は,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\Pi_{s0}+\Pi'_0)^{1/\kappa-1} &= -\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\nabla_H\cdot\{(\Pi_{s0}+\Pi'_0)^{1/\kappa-1}\boldsymbol{v}_{H0}\} \\
&\quad -\frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3}\frac{\partial}{\partial z}\{(\Pi_{s0}+\Pi'_0)^{1/\kappa-1}w_0\} \qquad (54)
\end{aligned}
$$

となる.

ここで, (54) 式を全領域で積分する. (54) 式右辺の水平移流項は適当な境界条件 (例えば周期境界) を与えることで消去される. 鉛直移流項は十分上方で $w_0=0$ を仮定すればやはり消去することができる. したがって,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\frac{\partial}{\partial t}(\Pi_{s0}+\Pi'_0)^{1/\kappa-1}\,dV \\
&= \int(1/\kappa-1)(\Pi_{s0}+\Pi'_0)^{1/\kappa-2}\frac{\partial}{\partial t}(\Pi_{s0}+\Pi'_0)\,dV \\
&= \int(1/\kappa-1)(\Pi_{s0}+\Pi'_0)^{1/\kappa-2}\frac{\partial}{\partial t}\Pi'_0\,dV.
\end{aligned}
$$

[5] もともと, 断熱条件を使ってしまっているので, $\Pi^{1/\kappa-1}$ は「密度」である. 次元量で書くと, 連続の式 (31) は

$$
\frac{d}{dt}\Pi^{1/\kappa-1}+\Pi^{1/\kappa-1}\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0
$$

すなわち

$$
\frac{\partial}{\partial t}\Pi^{1/\kappa-1}+\nabla\cdot\left(\Pi^{1/\kappa-1}\boldsymbol{v}\right)=0
$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi'_0 = 0.$$

これから $\Pi'_0$ は定数であることがわかる. $\Pi$ のうち時間によらない成分を $\Pi_s$ としたので, 一般性を失うこと無く

$$\Pi'_0 = 0 \tag{55}$$

とすることができる. (55) 式は非弾性近似を得るための最も重要な関係式である.

結局, $O(\alpha_1^0)$ の連続の式は (54) より,

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\nabla_H \cdot (\Pi_{s0}^{1/\kappa-1}\boldsymbol{v}_{H0}) + \frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3}\frac{\partial}{\partial z}(\Pi_{s0}^{1/\kappa-1}w_0) = 0 \tag{56}$$

となる.

連続の式 (56) を密度で表す. 有次元量の密度 $\rho$ については

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_s(1+\rho') \\ &= (\rho_{s0} + \alpha_1\rho_{s1} + \cdots)(1 + \rho'_0 + \alpha_1\rho'_1 + \cdots),\end{aligned} \tag{57}$$

とおく. ただし $\rho_{s0}, \rho_{s1}, \cdots$ も有次元量である. これを状態方程式 (7) に代入し, $O(\alpha_1^0)$ の項を集めると

$$\rho_{s0}(1+\rho'_0) = \frac{p_b}{R\Theta}\Pi_{s0}^{1/\kappa-1}. \tag{58}$$

これと静止状態に対する密度の表現

$$\rho_{s0} = \frac{p_b}{R\Theta}\Pi_{s0}^{1/\kappa\ -1}$$

とを差し引けば

$$\rho'_0 = 0.$$

となる. したがって $O(\alpha_1^0)$ の密度 $\rho_0$ は

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \rho_{s0} \\ &= \frac{p_b}{R\Theta}\Pi_{s0}^{1/\kappa\ -1} \\ &= \frac{p_b}{R\Theta}(1-\alpha_2 z)^{1/\kappa\ -1}\end{aligned} \tag{59}$$

である. よって, 連続の式は (56) 式の代わりに

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\nabla_H \cdot (\rho_{s0}\boldsymbol{v}_{H0}) + \frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{s0}w_0) = 0 \tag{60}$$

と書くことができる.

### 4.5　$\alpha_1$ に関する 1 次の式

変数を $\alpha_1$ で展開した運動方程式 (52), (53) から $O(\alpha_1^1)$ の項を取り出すと,

$$\begin{aligned}\alpha_3\alpha_4\frac{d\boldsymbol{v_{H0}}}{dt} &= -\alpha_1\nabla_H\Pi_1', &(61)\\ \delta\alpha_3\alpha_5\frac{dw_0}{dt} &= -\alpha_1\frac{\partial\Pi_1'}{\partial z}+\alpha_1\alpha_2\theta_1' &(62)\end{aligned}$$

となる. ただし

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v_{H0}}\cdot\nabla_H+w_0\frac{\partial}{\partial z} \tag{63}$$

である.

熱力学の式 (32) の変数を $\alpha_1$ で展開すると,

$$\alpha_1\frac{d}{dt}\left(\theta_1'+\alpha_1\theta_2'+\cdots\right) = -\frac{N_s^2D}{g}\frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3}\left(1+\alpha_1\theta_{s1}+\cdots\right)\left(w_0+\alpha_1w_1+\cdots\right).$$

(39) 式に注意して, $O(\alpha_1^1)$ の項を取り出すと,

$$\frac{d\theta_1'}{dt} = -\frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3}w_0 \tag{64}$$

となる. ただし $d/dt$ は (63) 式と同じである.

## 4.6 非弾性方程式

仮定 (41), (42), (43) を書き換えると,

$$(L/\tau)^2 \sim U^2 \sim W^2 \sim c_p \Theta \alpha_1, \tag{65}$$

となる[6]. よって, (60) ~ (62), (64) 式から, 理想気体に対する非弾性方程式を得る:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{H0}}{dt} = -\nabla_H \Pi_1', \tag{66}$$

$$\frac{dw_0}{dt} = -\frac{\partial \Pi_1'}{\partial z} + \alpha_2 \theta_1', \tag{67}$$

$$\nabla\cdot(\rho_{s0}\boldsymbol{v}_0) = 0, \tag{68}$$

$$\frac{d\theta_1'}{dt} = -w_0. \tag{69}$$

ただし

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla, \\ \boldsymbol{v_0} &= (u_0, v_0, w_0), \\ \rho_{s0} &= \frac{p_b}{R\Theta}(1-\alpha_2 z)^{1/\kappa - 1} \end{aligned}$$

である.

[6] このとき

$$\begin{aligned} \alpha_3\alpha_4 &= \frac{(L/\tau)U}{c_p\Theta} \\ &\sim \alpha_1, \\ \delta\alpha_3\alpha_5 &= \frac{(D/\tau)U}{c_p\Theta} \\ &\sim \alpha_1, \\ \frac{\alpha_4}{\alpha_3} &= \frac{U}{L/\tau} \\ &\sim 1, \\ \frac{\alpha_5}{\delta\alpha_3} &= \frac{U}{D/\tau} \\ &\sim 1 \end{aligned}$$

である.

次元を戻すと,

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -c_p\Theta\nabla\Pi' + \frac{\theta'}{\Theta}g\boldsymbol{k}, \tag{70}$$

$$\nabla\cdot(\rho_{s0}\boldsymbol{v}) = 0, \tag{71}$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = -\frac{N_s^2\Theta}{g}w, \tag{72}$$

となる.

もし (65) 式中の $\sim$ が成り立たないときには, 得られた非弾性方程式の中でどの項が生き残るかという問題になる.

# 5　ブシネスク方程式系

## 5.1　ブシネスク近似のための仮定

非弾性方程式に対して, さらに次のような仮定が成り立つとするといわゆるブシネスク (Boussinesq) 方程式が得られる:

運動は浅い, すなわち考えている鉛直スケールが等温位大気の高さに比べ小さい ($D \ll H \equiv c_p\Theta/g$).

$$\alpha_2 \equiv \frac{gD}{c_p\Theta} \ll 1. \tag{73}$$

## 5.2 $\alpha_2$ 展開

仮定 (73) の下で, 非弾性方程式 (66) $\sim$ (69) の変数を $\alpha_2$ で以下のように展開する:

$$\boldsymbol{v}_{H0} = \boldsymbol{v}_{H00} + \alpha_2 \boldsymbol{v}_{H01} + \alpha_2^2 \boldsymbol{v}_{H02} + \cdots, \tag{74}$$

$$w_0 = w_{00} + \alpha_2 w_{01} + \alpha_2^2 w_{02} + \cdots, \tag{75}$$

$$\theta'_1 = \theta'_{10} + \alpha_2 \theta'_{11} + \alpha_2^2 \theta'_{12} + \cdots, \tag{76}$$

$$\Pi'_1 = \Pi'_{10} + \alpha_2 \Pi'_{11} + \alpha_2^2 \Pi'_{12} + \cdots, \tag{77}$$

$$\rho_{s0} = \rho_{s00} + \alpha_2 \rho_{s01} + \alpha_2^2 \rho_{s02} + \cdots. \tag{78}$$

ただし密度 $\rho_{s0}, \rho_{s00}, \rho_{s01}, \cdots$ は有次元量である.

### 5.3　$\alpha_2$ に関する 0 次と 1 次の式

状態方程式 (59) の変数を $\alpha_2$ で展開すると,

$$\rho_{s00} + \alpha_2 \rho_{s01} + \cdots = \frac{p_b}{R\Theta} (1 - \alpha_2)^{1/\kappa \ -1} .$$

$O(\alpha_2^0)$ の項を取り出すと,

$$\begin{aligned} \rho_{s00} &= \frac{p_b}{R\Theta} \\ &= \text{一定} \end{aligned}$$

であることがわかる.

非弾性方程式の連続の式 (68) の変数も同様に展開すると,

$$\nabla \cdot \{ (\rho_{s00} + \alpha_2 \rho_{s01} + \cdots) (\boldsymbol{v}_{00} + \alpha_2 \boldsymbol{v}_{01} + \cdots) \} = 0.$$

ただし $\boldsymbol{v_{00}} = (u_{00}, v_{00}, w_{00})$, $\boldsymbol{v_{01}} = (u_{01}, v_{01}, w_{01})$, $\cdots$ である. よって $O(\alpha_2^0)$ の連続の式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_{00} = 0$$

となる.

$O(\alpha_2^1)$ の式を求めるには, 非弾性方程式の運動方程式 (66), (67) と熱力学の式 (69) について $O(\alpha_2^1)$ の項を集めればよい.

## 5.4 ブシネスク方程式

まとめると, 理想気体に対するブシネスク方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{v}_{H00}}{dt} &= -\nabla_H \Pi'_{10}, &(79)\\
\frac{dw_{00}}{dt} &= -\frac{\partial \Pi'_{10}}{\partial z} + \theta'_{10}, &(80)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{\mathbf{00}} &= 0, &(81)\\
\frac{d\theta'_{10}}{dt} &= -w_{00}. &(82)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{00}\cdot\nabla
$$

である.

次元を戻すと

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= -c_p\Theta\nabla\Pi' + \frac{\theta'}{\Theta}g\boldsymbol{k}, &(83)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0, &(84)\\
\frac{d\theta'}{dt} &= -\frac{N_s^2\Theta}{g}w &(85)
\end{aligned}
$$

となる.

# 6　非弾性方程式のエネルギー方程式

ここでは非弾性方程式のエネルギー方程式を導出する．導出に先立ち有次元の非弾性方程式 (70)∼(72) の各式を成分表示する．$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -c_p \Theta \frac{\partial \Pi'}{\partial x_i} + \frac{\theta'}{\Theta} g \delta_{i3}, && (86)\\
\frac{\partial \rho_0 v_i}{\partial x_i} &= 0, && (87)\\
\frac{\partial \theta'}{\partial t} + v_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} &= -\frac{N_s^2 \Theta}{g} v_3. && (88)
\end{aligned}
$$

ここで $i = 1, 2, 3$, $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである．以下では添字については和の規約に従うものとする．

単位体積あたりの運動エネルギー方程式は (86) 式に $\rho_0 u_i$ をかけることで得られる:

$$
\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{1}{2} \rho_0 (v_i)^2 = -c_p \Theta \frac{\partial (\rho_0 \Pi' v_i)}{\partial x_i} + \rho_0 \frac{\theta'}{\Theta} g v_3. \tag{89}
$$

途中の変形で (87) 式を利用した．

単位体積あたりの熱エネルギーの式は (88) 式に $\rho_0 c_p \Pi_0$ をかけることで得られる．浮力振動数の定義 (21) より，

$$
\Pi_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \rho_0 c_p (\theta' + \Theta) = 0.
$$

$\Pi_0 \Theta = T_0$, $\Pi_0 \theta' = T'$ から，

$$
\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \rho_0 c_p (T' + T_0) = \rho_0 c_p (\theta' + \Theta) v_3 \frac{\partial \Pi_0}{\partial x_3}.
$$

よって, 静力学平衡の式 (51) の次元を戻した式と (55) 式から，

$$
\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \rho_0 c_p (T' + T_0) + \rho_0 g v_3 \quad = \quad -\rho_0 \frac{\theta'}{\Theta} g v_3 \tag{90}
$$

となる．

単位体積あたりの全エネルギーの式は (89) と (90) との和をとることで得られる:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\rho_0\left[\frac{1}{2}(v_i)^2+c_p(T'+T_0)\right]+\rho_0 g v_3=-c_p\Theta\frac{\partial(\rho_0\Pi' v_i)}{\partial x_i}. \tag{91}$$

$\Theta$ がほぼ鉛直に一様であるとみなせる場合は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\rho_0\left[\frac{1}{2}(v_i)^2+c_pT'\right]=-c_p\frac{\partial(\rho_0\Theta\Pi' v_i)}{\partial x_i} \tag{92}$$

となる.

元となる基礎方程式を線型化して導出したエネルギー方程式には $p'^2$ ($p'$ は圧力の微小変動) の項が含まれる. この項は弾性エネルギーとよばれる. ここで得られたエネルギー方程式 (91) には $p'^2$ の項が含まれていない. そのため (66) $\sim$ (69) の方程式系または (70)$\sim$ (72) を非弾性方程式とよんでいるのである.

# 7 参考文献

小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会.

小倉義光, 1997: メソ気象の基礎理論. 東京大学出版会.

Ogura, Y. and N. A. Phillips, 1962: Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 173-179.

佐藤正樹, 1987: ブシネスク近似. 東京大学理学部地球物理学科気象学研究室セミナーノート.

# 8　謝辞

本稿は 1987 年に東京大学地球物理学科気象学研究室にて行われたセミナーにおけるセミナーノートがもととなっている. 原作版は佐藤正樹によるセミナーノート (1987/04/17) である. 小高正嗣, 林祥介によって地球流体電脳倶楽部版理論マニュアル「非弾性方程式とブシネスク近似」として書き直された. さらに高橋こう子, 林祥介によって地球流体電脳倶楽部版理論マニュアル「非弾性方程式とブシネスク方程式」として書き直された. 構成とデバッグに協力してくれたセミナー参加者のすべてにも感謝しなければならない.