

4. アンサンブルカルマンフィルタ

線形最小分散推定(1)

最小分散推定

分散を最小にする値は平均値である。実際、 \mathbf{W} を任意の正定値対称行列として

$$\begin{aligned} V(\hat{\mathbf{x}}) &:= \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) p(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \\ \frac{\partial V}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= -2 \int \mathbf{W} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) p(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = 2 \mathbf{W} \left(\hat{\mathbf{x}} - \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \right) = \mathbf{0} \\ \therefore \hat{\mathbf{x}} &= \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \end{aligned}$$

線形最小分散推定

予測値 \mathbf{x}_k^f の精度が高く、確率密度関数がガウス分布に近ければ、観測データ \mathbf{y}_k による予測値の修正は、 $\mathbf{y}_k - H_k(\mathbf{x}_k^f)$ について線形で近似できる。

$$\mathbf{x}_k^a = \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - H_k(\mathbf{x}_k^f) \right)$$

この仮定の下で、解析誤差分散を最小にする値を解析値とする。

線形最小分散推定(2)

解析誤差

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}_k^a &= \Delta \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k \left(\Delta \mathbf{y}_k - \Delta H_k^f \right) \\ \Delta \mathbf{x}_k^a &:= \mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_k, & \Delta \mathbf{x}_k^f &:= \mathbf{x}_k^f - \mathbf{x}_k \\ \Delta \mathbf{y}_k &:= \mathbf{y}_k - H_k(\mathbf{x}_k), & \Delta H_k^f &:= H_k(\mathbf{x}_k^f) - H_k(\mathbf{x}_k)\end{aligned}$$

解析誤差共分散行列

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k^a &:= \left\langle \Delta \mathbf{x}_k^a \left(\Delta \mathbf{x}_k^a \right)^T \right\rangle \\ &= \mathbf{P}_k^{xx} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right) \mathbf{K}_k^T - \mathbf{P}_k^{xH} \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k^{Hx} \\ \mathbf{R}_k &:= \left\langle \Delta \mathbf{y}_k \left(\Delta \mathbf{y}_k \right)^T \right\rangle \\ \mathbf{P}_k^{xx} &:= \left\langle \Delta \mathbf{x}_k^f \left(\Delta \mathbf{x}_k^f \right)^T \right\rangle, & \mathbf{P}_k^{HH} &:= \left\langle \Delta H_k^f \left(\Delta H_k^f \right)^T \right\rangle \\ \mathbf{P}_k^{xH} &:= \left\langle \Delta \mathbf{x}_k^f \left(\Delta H_k^f \right)^T \right\rangle = \left(\mathbf{P}_k^{Hx} \right)^T\end{aligned}$$

予測誤差と観測誤差の間には相関がないとしている。

線形最小分散推定(3)

解析誤差分散を最小にする \mathbf{K}_k を求めるために、 \mathbf{K}_k に関する第1変分をとると

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{P}_k^a &= \delta \mathbf{K}_k \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right) \delta \mathbf{K}_k^T \\ &\quad - \mathbf{P}_k^{xH} \delta \mathbf{K}_k^T - \delta \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k^{Hx} \\ &= \delta \mathbf{K}_k \left[\left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right) \mathbf{K}_k^T - \mathbf{P}_k^{Hx} \right] + \left[\mathbf{K}_k \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right) - \mathbf{P}_k^{xH} \right] \delta \mathbf{K}_k^T\end{aligned}$$

これが0になる条件から

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{xH} \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right)^{-1}$$

このときの解析値と解析誤差共分散行列は

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^a &= \mathbf{x}_k^f + \mathbf{P}_k^{xH} \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right)^{-1} \left(\mathbf{y}_k - H_k(\mathbf{x}_k^f) \right) \\ \mathbf{P}_k^a &= \mathbf{P}_k^{xx} - \mathbf{P}_k^{xH} \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right)^{-1} \left(\mathbf{P}_k^{xH} \right)^T\end{aligned}$$

第2式の右辺第2項の行列は非負定値行列なので、解析誤差分散は一般に予測誤差分散より小さい。

問題 1

(水蒸気の鉛直分布の推定)

問題設定

- 数値モデルは鉛直1次元で、状態変数は各層の比湿 $\{q_i\}$ 。
- 鉛直積算水蒸気量の観測データが1個。
- 予測誤差共分散行列は対角行列。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad H(\mathbf{x}) = \frac{\Delta p}{g} \sum_{i=1}^n q_i \quad (\Delta p : \text{モデルの鉛直層の間隔})$$
$$\mathbf{P}^{xx} = \begin{pmatrix} (\sigma_1^f)^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\sigma_n^f)^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = (\sigma^o)^2$$

拡張カルマンフィルタ(1)

数値モデルと観測演算子の非線形性が弱ければ、線形システムに対して提案されたカルマンフィルタを、線形最小分散推定に基づいて自然に拡張できる。

離散時間の数値モデル

$$\mathbf{x}_k = M_k(\mathbf{x}_{k-1})$$

現実システムの時間発展 ($\boldsymbol{\varepsilon}_k$: 白色ガウス過程)

$$\mathbf{x}_k = M_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_k \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_l^T \rangle = \mathbf{Q}_k \delta_{kl}$$

状態変数の予測値

$$\mathbf{x}_k^f = M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a)$$

拡張カルマンフィルタ(2)

共分散行列の予測値

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k^{xx} &= \left\langle \left(\mathbf{x}_k^f - \mathbf{x}_k \right) \left(\mathbf{x}_k^f - \mathbf{x}_k \right)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle \left(M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a) - M_k(\mathbf{x}_{k-1}) - \boldsymbol{\varepsilon}_k \right) \left(M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a) - M_k(\mathbf{x}_{k-1}) - \boldsymbol{\varepsilon}_k \right)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle \left(M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a) - M_k(\mathbf{x}_{k-1}) \right) \left(M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a) - M_k(\mathbf{x}_{k-1}) \right)^\top \right\rangle + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

数値モデルの非線形性が弱ければ

$$\mathbf{P}_k^{xx} \approx \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_k^\top + \mathbf{Q}_k$$

同様に、観測演算子の非線形性が弱ければ

$$\mathbf{P}_k^{xH} \approx \mathbf{P}_k^{xx} \mathbf{H}_k^\top, \quad \mathbf{P}_k^{HH} \approx \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^{xx} \mathbf{H}_k^\top$$

ただし

$$\left(\mathbf{M}_k \right)_{ij} := \left. \frac{\partial \left(M_k(\mathbf{x}) \right)_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{k-1}^a} \quad \left(\mathbf{H}_k \right)_{ij} := \left. \frac{\partial \left(H_k(\mathbf{x}) \right)_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k^f}$$

拡張カルマンフィルタ(3)

そこで \mathbf{P}_k^{xx} を \mathbf{P}_k^f と表記し、近似記号を等号で置き換えると、次のような**拡張カルマンフィルタ**(extended Kalman filter)が得られる。

$$\mathbf{x}_k^f = M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a)$$

$$\mathbf{P}_k^f = \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_k^T + \mathbf{Q}_k$$

$$\mathbf{x}_k^a = \mathbf{x}_k^f + \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \right)^{-1} \left(\mathbf{y}_k - H_k(\mathbf{x}_k^f) \right)$$

$$\mathbf{P}_k^a = \mathbf{P}_k^f - \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \right)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k := \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \right)^{-1}$$

を用いて表すと

$$\mathbf{x}_k^a = \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - H_k(\mathbf{x}_k^f) \right)$$

$$\mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^f$$

一部を除いて線形近似がなされていることに注意。

遷移確率(1)

Fokker-Planck方程式の随伴(adjoint)演算子

$$L^*[p] := -\frac{\partial p}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial p}{\partial \xi_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{GQG}^\top)_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$$

Fokker-Planck方程式の遅延Green関数

$$L^*[G(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)] = -\delta(\mathbf{x} - \xi)\delta(t - \tau)$$
$$G(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = 0 \quad (t < \tau)$$

Fokker-Planck方程式の初期値問題の解

$$p(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x}, t; \xi, 0) p(\xi, 0) d^n \xi$$

したがって、遅延Green関数は遷移確率密度関数を与える。

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = G(\mathbf{x}_k, t_k; \mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1})$$

遅延確率密度関数は、次の**Chapman-Kolmogorov方程式**を満たす。

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-2}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{x}_{k-2}) d^n \mathbf{x}_{k-1}$$

遷移確率(2)

遷移確率密度関数を用いると、事後確率密度関数を事前確率密度関数で表すことができる(Fokker-Planck方程式の時間積分値)。

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_{k-1}$$

離散時間システム

$$\mathbf{x}_k = M_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

では、 $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ が共分散行列 \mathbf{Q}_k の白色ガウス過程であることから

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{Q}_k|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - M_k(\mathbf{x}_{k-1}))^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - M_k(\mathbf{x}_{k-1})) \right] \end{aligned}$$

同時確率

拡張カルマンフィルタの導出における期待値の計算は、状態変数と観測データの両方についてなされていることから、同時確率密度関数 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1})$ が用いられている。

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1})$$

これにBayesの定理

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1})}{\int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k}$$

を代入すると

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1})$$

ただし、以下の等式を用いた。

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) = \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k$$

確率密度関数による検討(1)

時刻 t_k における事前確率密度関数の平均値

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_k := \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k$$

を、遷移確率を用いて時刻 t_{k-1} における事後確率密度関数で表すと

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_k &= \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_{k-1} d^n \mathbf{x}_k \\ \therefore \hat{\bar{\mathbf{x}}}_k &= \int M_k(\mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_{k-1} \end{aligned}$$

数値モデルの非線形性が弱ければ

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_k \approx M_k(\bar{\mathbf{x}}_{k-1})$$

ただし、 $\bar{\mathbf{x}}_{k-1}$ は t_{k-1} における事後確率密度関数の平均値である。

$$\bar{\mathbf{x}}_{k-1} := \int \mathbf{x}_{k-1} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_{k-1}$$

上の2式は、拡張カルマンフィルタにおける次の式と対応している。

$$\mathbf{x}_k^f = M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a)$$

確率密度関数による検討(2)

時刻 t_k における事前確率密度関数の共分散行列

$$\hat{\mathbf{P}}_k := \int (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k$$

を、遷移確率を用いて時刻 t_{k-1} における事後確率密度関数で表すと

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \int (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_{k-1} d^n \mathbf{x}_k$$

$$\therefore \hat{\mathbf{P}}_k = \int (M_k(\mathbf{x}_{k-1}) - \hat{\mathbf{x}}_k) (M_k(\mathbf{x}_{k-1}) - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{Q}_k$$

この式は、線形最小分散推定や拡張カルマンフィルタにおける次の式と対応している。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^f &= \left\langle \left(M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a) - M_k(\mathbf{x}_{k-1}) \right) \left(M_k(\mathbf{x}_{k-1}^a) - M_k(\mathbf{x}_{k-1}) \right)^\top \right\rangle + \mathbf{Q}_k \\ &\approx \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_k^\top + \mathbf{Q}_k \end{aligned}$$

確率密度関数による検討(3)

拡張カルマンフィルタの予測誤差共分散行列

$$\mathbf{P}_k^f = \int (\mathbf{x}_k^f - \mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_k^f - \mathbf{x}_k)^\top p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k d^m \mathbf{y}_k$$

仮に、予測値 \mathbf{x}_k^f が事前確率密度関数の平均値 $\hat{\mathbf{x}}_k$ に等しいとすると

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^f &= \int (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k d^m \mathbf{y}_k \\ &= \int (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{P}}_k \end{aligned}$$

拡張カルマンフィルタの解析誤差共分散行列

$$\mathbf{P}_k^a = \int (\mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_k)^\top p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k d^m \mathbf{y}_k$$

仮に、予測値 \mathbf{x}_k^a が事後確率密度関数の平均値 $\bar{\mathbf{x}}_k$ に等しいとすると

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^a &= \int (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k d^m \mathbf{y}_k \\ &= \int \mathbf{P}_k p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^m \mathbf{y}_k \end{aligned}$$

確率密度関数による検討(4)

以上のことから、拡張カルマンフィルタの解析値などについて、次の対応関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^f &\Leftrightarrow \hat{\bar{\mathbf{x}}}_k \\ \mathbf{x}_k^a &\Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{P}_k^f &\Leftrightarrow \hat{\mathbf{P}}_k \\ \mathbf{P}_k^a &\Leftrightarrow \int \mathbf{P}_k p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^m \mathbf{y}_k\end{aligned}$$

線形性とガウス分布を仮定すれば、この対応関係は等式関係になる。その場合には、 \mathbf{P}_k は観測データ \mathbf{y}_k に依存しないので

$$\mathbf{P}_k^a = \mathbf{P}_k$$

が成り立つ。

同じ条件のもとでは、上で求めた拡張カルマンフィルタは離散時間の線形システムに対するカルマンフィルタになり、最適性が保証される。

大規模モデルに対する問題点

数値モデルの自由度を n とすると

- 予測・解析共分散行列の成分数: $\frac{1}{2}n(n+1)$
- 予測誤差共分散行列の計算

$$\mathbf{P}_k^f = \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_k^T + \mathbf{Q}_k$$

に必要な時間積分の回数: $2n$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_k \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_k^T &= \mathbf{M}_k \left(\mathbf{M}_k \mathbf{P}_{k-1}^a \right)^T \\ &= \mathbf{M}_k \left[\mathbf{M}_k (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \right]^T \\ &= \mathbf{M}_k (\mathbf{M}_k \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{M}_k \mathbf{p}_n)^T && (n \text{ 回}) \\ &= \mathbf{M}_k (\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_n) \\ &= (\mathbf{M}_k \mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{M}_k \mathbf{p}'_n) && (n \text{ 回})\end{aligned}$$

$\mathbf{M}_k \mathbf{p}$ は、 \mathbf{p} を初期値にして、線形モデルを時刻 t_{k-1} から時刻 t_k まで時間積分することを表す。

カルマンフィルタの縮減近似

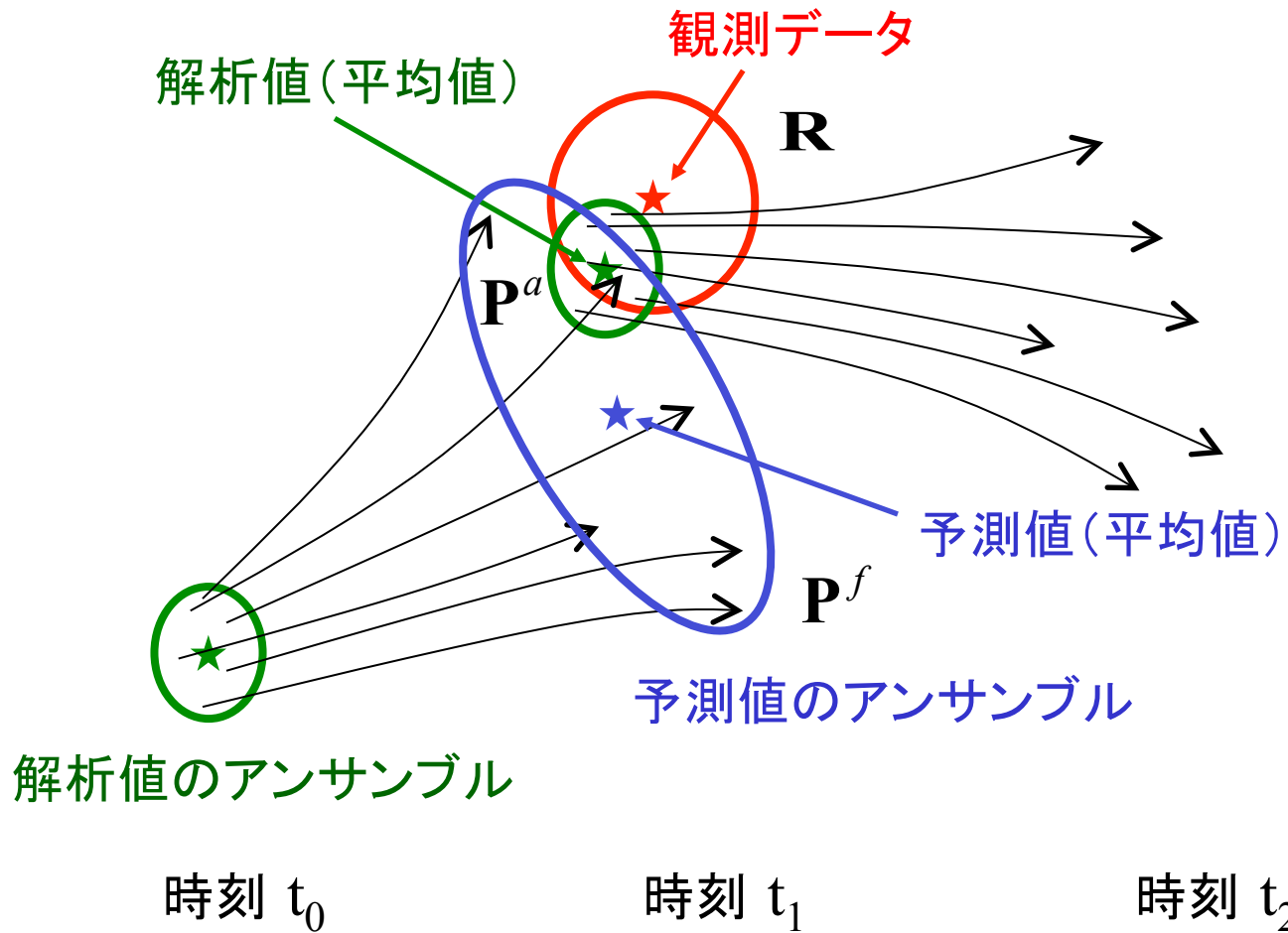
拡張カルマンフィルタ(一部以外は線形計算)の縮減近似

- Reduced order Kalman filter (Fukumori, 1995)
計算格子をモデル格子より粗くする。
- Reduced rank square root filter (Verlaan and Heemink, 1995)
固有ベクトルの上位モードのみを計算する。
- Singular evolutive extended Kalman filter (Pham et al, 1998)
特異値の上位モードのみを計算する。
- Partitioned Kalman filter (Fukumori, 2001)
計算領域を分割する。

アンサンブルカルマンフィルタ(非線形計算)

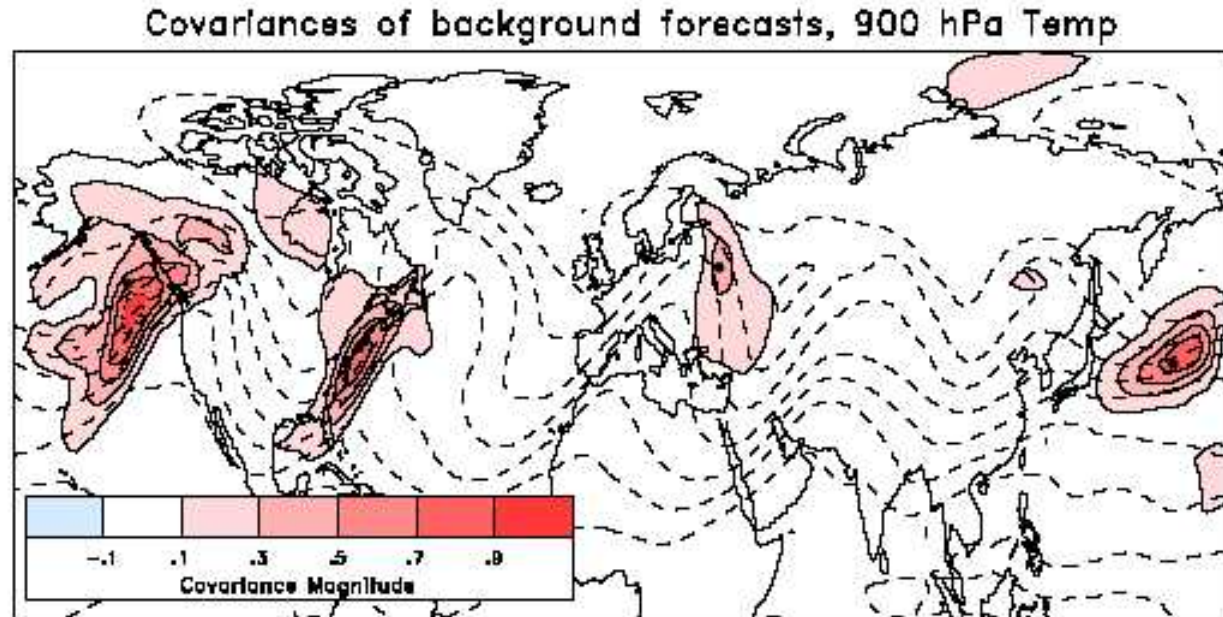
- Perturbed observation method
- Transform method (EAKF, EnSRF, LETKF)

アンサンブルカルマンフィルタ(1)



(三好建正氏作成の図を一部改変)

アンサンブルカルマンフィルタ(2)



EnKFによる予報誤差共分散行列の計算例。100個のメンバー数で計算した共分散行列のうち、900hPa気温について4つの地点(黒丸)の近傍の形状を示す。波線は900hPa気温の第一推定値(予測値)を表し、等値線の間隔は5K。

アンサンブルカルマンフィルタ(3)

時刻 t_k における予測値のアンサンブルを $\{\mathbf{x}_k^{f(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{f(N)}\}$ とし、予測値の平均値と予測誤差共分散行列をアンサンブルで近似計算する。

$$\mathbf{x}_k^f \approx \overline{\mathbf{x}_k^f} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{f(i)}$$
$$\mathbf{P}_k^f \approx \overline{\mathbf{P}_k^f} := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{x}_k^{f(i)} - \overline{\mathbf{x}_k^f} \right) \left(\mathbf{x}_k^{f(i)} - \overline{\mathbf{x}_k^f} \right)^\top$$

これらはそれぞれ次の式に対応している。

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \int \left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \right) \left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \right)^\top p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) d^n \mathbf{x}_k$$

$\{\mathbf{x}_k^{f(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{f(N)}\}$ は、時刻 t_{k-1} における解析値のアンサンブル $\{\mathbf{x}_{k-1}^{a(1)}, \dots, \mathbf{x}_{k-1}^{a(N)}\}$ から次のように計算される。

$$\mathbf{x}_k^{f(i)} = M_k \left(\mathbf{x}_{k-1}^{a(i)} \right) + \boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)} \quad (i = 1, \dots, N)$$

アンサンブルカルマンフィルタ(4)

時刻 t_k における解析値

$$\mathbf{x}_k^a \approx \overline{\mathbf{x}}_k^a = \overline{\mathbf{x}}_k^f + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - \overline{H_k(\mathbf{x}_k^f)} \right)$$

$$\overline{\mathbf{x}}_k^a := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{a(i)}, \quad \overline{H_k(\mathbf{x}_k^f)} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_k(\mathbf{x}_k^{f(i)})$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k = \overline{\mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \left(\mathbf{R}_k + \overline{\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \right)^{-1}$$

$$\overline{\mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{x}_k^{f(i)} - \overline{\mathbf{x}}_k^f \right) \left(H_k(\mathbf{x}_k^{f(i)}) - \overline{H_k(\mathbf{x}_k^f)} \right)^T$$

$$\overline{\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(H_k(\mathbf{x}_k^{f(i)}) - \overline{H_k(\mathbf{x}_k^f)} \right) \left(H_k(\mathbf{x}_k^{f(i)}) - \overline{H_k(\mathbf{x}_k^f)} \right)^T$$

これは線形最小分散推定における次式を近似計算したもの。

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{xH} \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right)^{-1}$$

摂動観測法(1)

Evensen (1994), Burgers et al (1998)

観測値に摂動を加えることによって N 個の標本からなる観測値のアンサンブルをつくる。

$$\mathbf{y}_k^{(i)} = \mathbf{y}_k + \mathbf{L}_k \boldsymbol{\xi}_k^{(i)} \quad (i = 1, \dots, N)$$

$\boldsymbol{\xi}_k^{(i)}$: 平均0、共分散 \mathbf{I} の正規乱数。

\mathbf{L}_k : 観測誤差共分散行列 \mathbf{R}_k のCholesky分解行列(下三角行列)

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{L}_k^T \quad (\text{Cholesky分解})$$

解析値のアンサンブル

$$\mathbf{x}_k^{a(i)} = \mathbf{x}_k^{f(i)} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k^{(i)} - H_k(\mathbf{x}_k^{f(i)}) \right) \quad (i = 1, \dots, N)$$

これを平均すると、 $\mathbf{y}_k^{(i)}$ の平均値が \mathbf{y}_k と等しければ次式を得る。

$$\overline{\mathbf{x}_k^a} = \overline{\mathbf{x}_k^f} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - \overline{H_k(\mathbf{x}_k^f)} \right)$$

摂動観測法(2)

解析誤差共分散行列

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_k^a &\approx \overline{\mathbf{P}_k^a} := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{x}_k^{a(i)} - \overline{\mathbf{x}_k^a} \right) \left(\mathbf{x}_k^{a(i)} - \overline{\mathbf{x}_k^a} \right)^T \\
 &= \overline{\mathbf{P}_k^f} - \overline{\mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T} - \mathbf{K}_k \left(\overline{\mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \right)^T + \overline{\mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T} + \overline{\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T} \\
 &\quad + \mathbf{K}_k \left(\overline{\Delta \mathbf{y}_k (\Delta \mathbf{y}_k)^T} - \mathbf{R}_k \right) \mathbf{K}_k^T + \overline{\Delta \mathbf{x}_k^f (\Delta \mathbf{y}_k)^T} \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \overline{\Delta \mathbf{y}_k (\Delta \mathbf{x}_k^f)^T} \\
 &\quad - \mathbf{K}_k \left(\overline{\Delta H_k^f (\Delta \mathbf{y}_k)^T} + \overline{\Delta \mathbf{y}_k (\Delta H_k^f)^T} \right) \mathbf{K}_k^T
 \end{aligned}$$

標本数が十分大きければ、下線部の項は無視できるので、その場合に
を最小にするカルマンゲインを求めると次式を得る。

$$\mathbf{K}_k = \overline{\mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \left(\mathbf{R}_k + \overline{\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \right)^{-1}$$

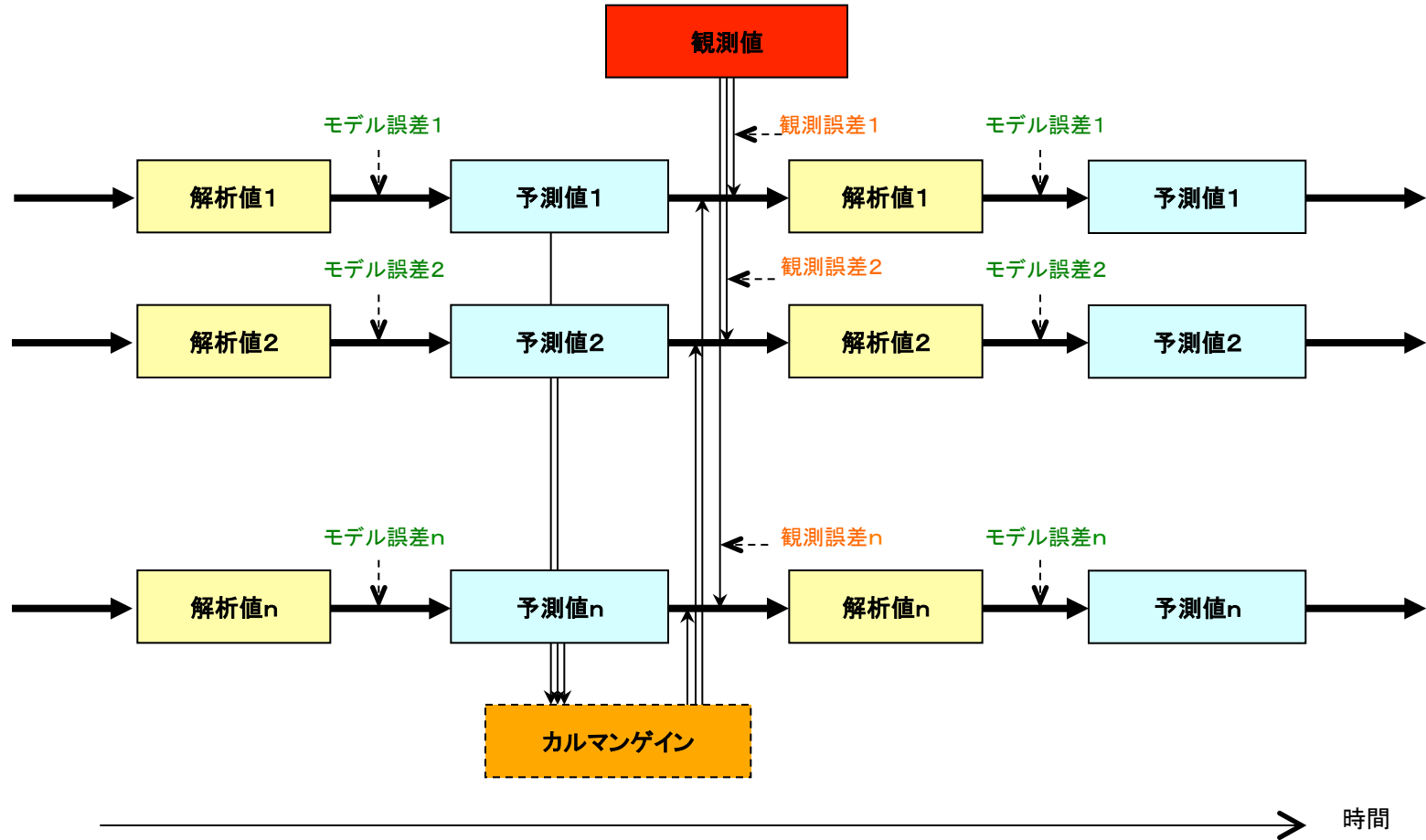
そのときの解析誤差共分散行列は

$$\overline{\mathbf{P}_k^a} = \overline{\mathbf{P}_k^f} - \overline{\mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \left(\mathbf{R}_k + \overline{\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \right)^{-1} \left(\overline{\mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \right)^T$$

これは線形最小分散推定における次式を近似計算したものの。

$$\mathbf{P}_k^a = \mathbf{P}_k^{xx} - \mathbf{P}_k^{xH} \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{P}_k^{HH} \right)^{-1} \left(\mathbf{P}_k^{xH} \right)^T$$

摂動観測法(3)



摂動観測 (perturbed observation) 法によるアンサンブルカルマンフィルタの模式図

摂動観測法(4)

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k = \overline{\mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \left(\mathbf{R}_k + \overline{\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \right)^{-1}$$

における逆行列計算の負荷を減らすために、右図のように観測データを小さなグループに分割し、グループごとに逐次処理する。互いに十分離れたグループの同化は、並列的に計算できる。

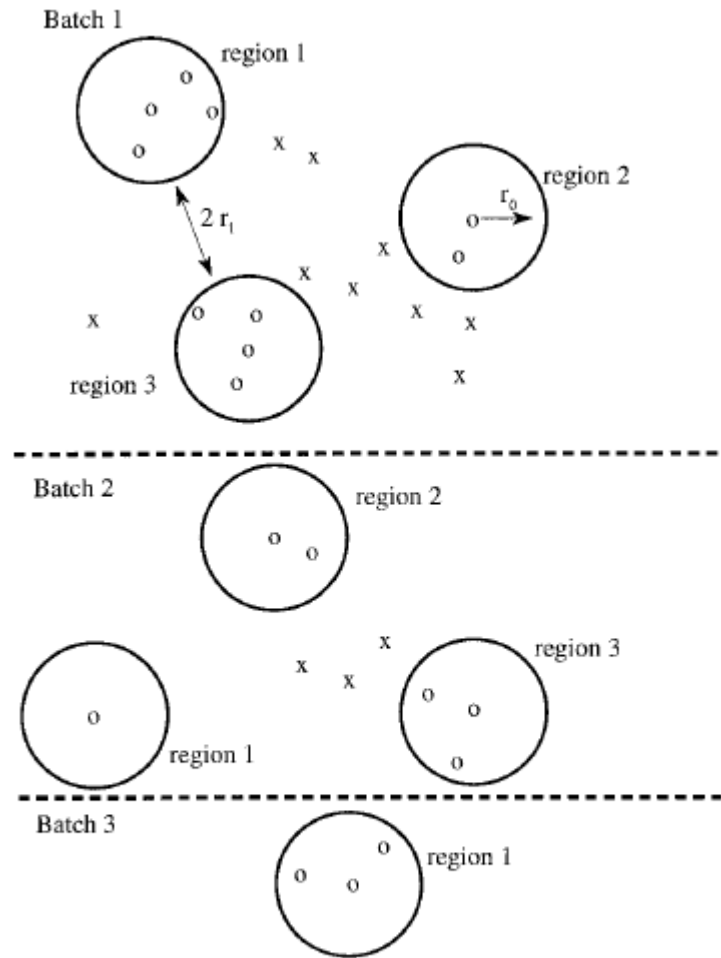


FIG. 1. Schematic illustration of the strategy used to form batches of observations. At each assimilation step, the circles denote the observations to be assimilated at this step, while the x's denote observations that have not yet been assimilated.

変換法(1)

解析値のアンサンブルを予測値のアンサンブルから構成する。

$$\mathbf{X}_k^f := \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left(\mathbf{x}_k^{f(1)} - \overline{\mathbf{x}}_k^f, \dots, \mathbf{x}_k^{f(N)} - \overline{\mathbf{x}}_k^f \right)$$
$$\mathbf{X}_k^a := \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left(\mathbf{x}_k^{a(1)} - \overline{\mathbf{x}}_k^a, \dots, \mathbf{x}_k^{a(N)} - \overline{\mathbf{x}}_k^a \right)$$

このとき次式がなりたつ。

$$\overline{\mathbf{P}}_k^f = \mathbf{X}_k^f \left(\mathbf{X}_k^f \right)^T, \quad \overline{\mathbf{P}}_k^a = \mathbf{X}_k^a \left(\mathbf{X}_k^a \right)^T$$

\mathbf{T}_k : 変換行列

$$\mathbf{X}_k^a = \mathbf{X}_k^f \mathbf{T}_k$$

解析値の偏差のアンサンブルを、予測値の偏差のアンサンブルの線形結合で表している。

変換法(2)

- ① 変換行列 \mathbf{T}_k を、解析誤差共分散行列の式を満たすように決める。

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{P}}_k^a &= \overline{\mathbf{P}}_k^f - \overline{\mathbf{P}}_k^f \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \overline{\mathbf{P}}_k^f \mathbf{H}_k^T \right)^{-1} \mathbf{H}_k^T \overline{\mathbf{P}}_k^f \\ \therefore \mathbf{X}_k^f \mathbf{T}_k \mathbf{T}_k^T (\mathbf{X}_k^f)^T \\ &= \mathbf{X}_k^f \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \right)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right] (\mathbf{X}_k^f)^T\end{aligned}$$

次の式が満たされればよい。

$$\mathbf{T}_k \mathbf{T}_k^T = \mathbf{I} - \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \right)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f$$

- ② すべての成分が1であるベクトルを $\mathbf{1}$ とすると、定義より

$$\mathbf{X}_k^f \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_k^a \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

したがって、変換行列は $\mathbf{1}$ を固有ベクトルに持たなければならない。

$$\mathbf{T}_k \mathbf{1} \propto \mathbf{1}$$

- ③ 観測データがなければ、 \mathbf{X}_k^a が \mathbf{X}_k^f のままになることを要請する。

逐次アンサンブル平方根フィルタ

Ensemble square root filter (EnSRF): Whitaker and Hamill (2002)

観測データが互いに独立として、1個ずつ同化する。その場合には \mathbf{R}_k などはスカラーになるので

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{I} - \beta_k \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^\top \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f$$

$$\beta_k := \left[\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^\top + \sqrt{\mathbf{R}_k \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^\top \right)} \right]$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{X}_k^f \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^\top \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^\top \right)^{-1}$$

$\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f$ の計算には次の近似式を用いる。

$$\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \approx \frac{1}{N-1} \left(H_k \left(\mathbf{x}_k^{f(1)} \right) - \overline{H_k \left(\mathbf{x}_k^f \right)}, \dots, H_k \left(\mathbf{x}_k^{f(N)} \right) - \overline{H_k \left(\mathbf{x}_k^f \right)} \right)$$

局所アンサンブル変換カルマンフィルタ

Local ensemble transform Kalman filter (LETKF): Hunt et al (2007)

各格子点ごとの解析値の計算を独立に実行できるので、並列計算に向く。Sherman-Morrison-Woodburyの公式から得られる次式を利用する。

$$\mathbf{I} - \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \right)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f = \left[\mathbf{I} + \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right]^{-1}$$

変換行列

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{D}_k^{-1/2} \mathbf{U}_k^T$$

$$\mathbf{I} + \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f = \mathbf{U}_k \mathbf{D}_k \mathbf{U}_k^T \quad (\text{固有値分解})$$

\mathbf{D}_k : 固有値を対角要素とする対角行列。

\mathbf{U}_k : 正規化された固有ベクトルを列要素とする直交行列。

カルマンゲインは

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^a \mathbf{H}_k \mathbf{R}_k$$

を利用して、次のように計算する。

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{X}_k^f \mathbf{U}_k \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^f \right)^T \mathbf{R}_k^{-1}$$

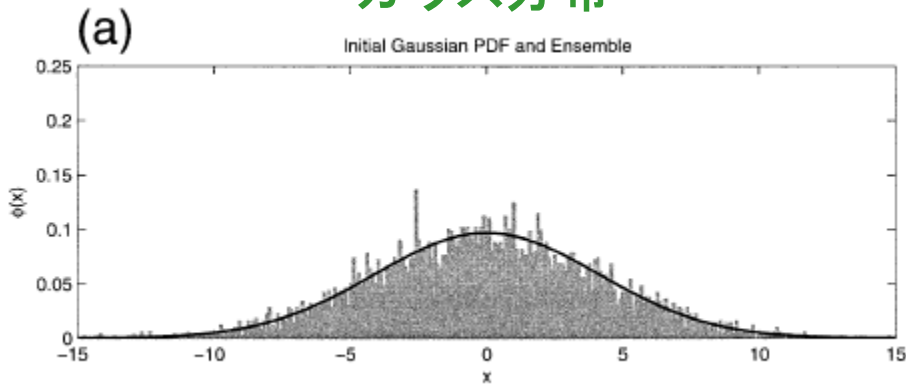
摂動観測法と変換法の比較(1)

摂動観測法: 観測データに摂動を加えるので、それによるサンプリングエラーによって精度が低下する。

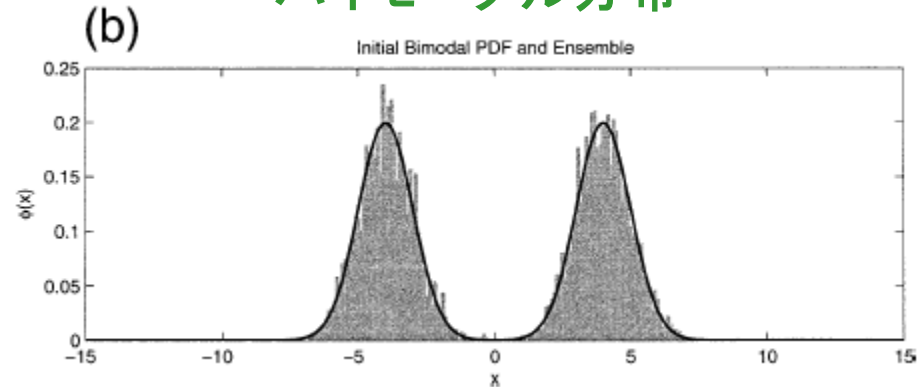
変換法: 解析値のアンサンブルを予測値のアンサンブルから構成するので、非線形性や非ガウス分布に対して安定性に欠ける傾向がある。

比較計算例(状態変数: 1個、アンサンブルメンバー: 5,000個)

ガウス分布



バイモーダル分布



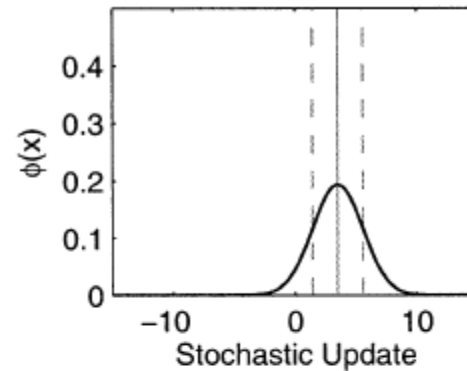
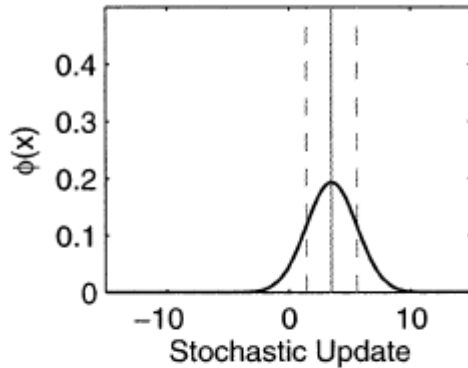
予測値の確率密度関数(実線:理論値、ヒストグラム:計算値)

摂動観測法と変換法の比較(2)

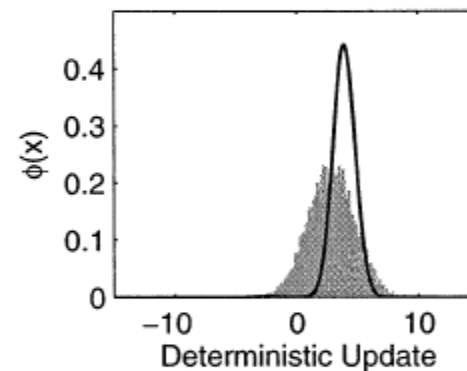
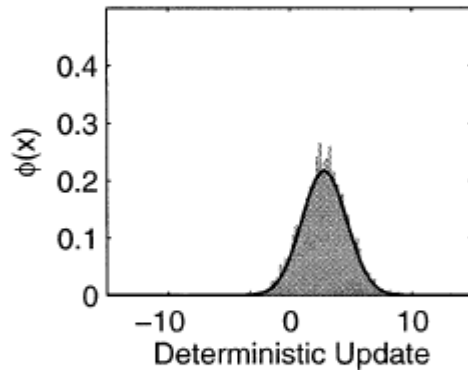
ガウス分布
 y^o with $R = (\sigma/2)^2$

バイモーダル分布
 y^o with $R = (\sigma/2)^2$

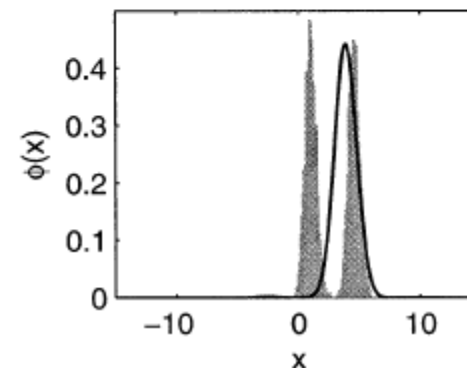
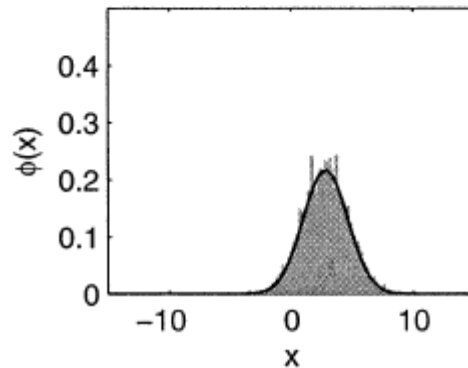
観測値



摂動観測法による解析値



変換法による解析値
 (EnSRF)



摂動観測法と変換法の比較(3)

摂動観測法

(20 ensemble members)

変換法(EAKF)

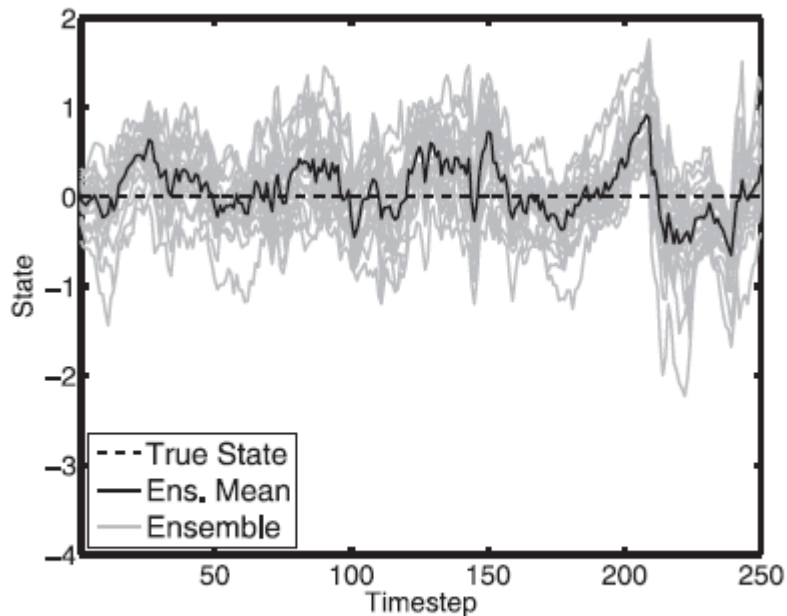


FIG. 5. As in Fig. 3, but for an assimilation with a perturbed observation ensemble Kalman filter.

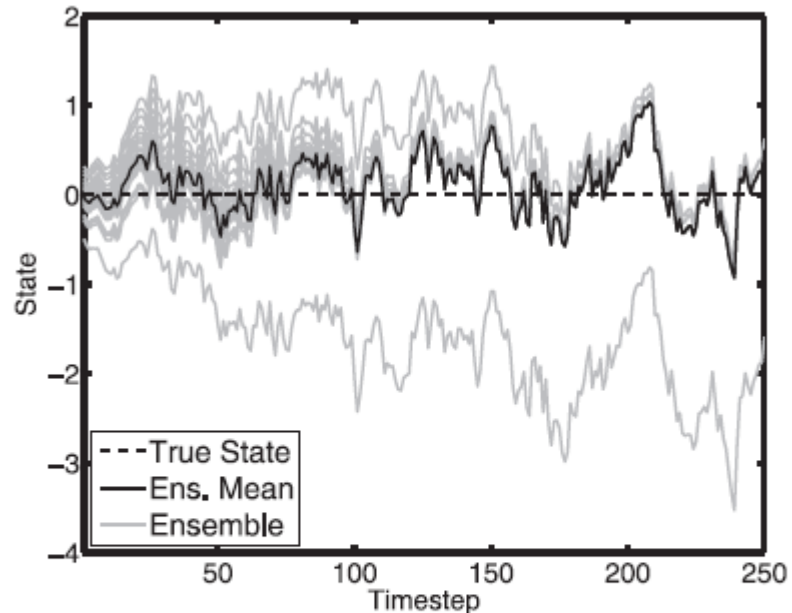


FIG. 3. Initial evolution of 20 ensemble members (light solid lines), the ensemble mean (dark solid line), and the truth (dashed line, constant value of 0) for an ensemble adjustment Kalman filter applied to the single variable model with the nonlinearity parameter $\alpha = 0.8$.

Anderson (2010)

4次元アンサンブルカルマンフィルタ(1)

時刻 t_0 における解析値と解析誤差共分散行列が得られているとして、時刻 t_1 から時刻 t_K までの同化ウィンドウ内の観測データを一括処理して、その期間内の状態変数を推定する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^a \\ \vdots \\ \mathbf{x}_K^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^f \\ \vdots \\ \mathbf{x}_K^f \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 - H_1(\mathbf{x}_1^f) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_K - H_K(\mathbf{x}_K^f) \end{pmatrix}$$

カルマンゲイン

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{P}}^f \tilde{\mathbf{H}}^T (\tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{P}}^f \tilde{\mathbf{H}}^T)^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^f := \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}^f & \cdots & \mathbf{P}_{1K}^f \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{P}_{K1}^f & \cdots & \mathbf{P}_{KK}^f \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} := \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{H}_K \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{R}} := \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{R}_K \end{pmatrix}$$

異なる時刻の予測値の間の誤差共分散行列 \mathbf{P}_{kl}^f は、予測値のアンサンブルから近似計算できる(サンプリングエラーへの対策が必要)。

4次元アンサンブルカルマンフィルタ(2)

変換法では、同化ウィンドウ内の予測値の偏差の時間発展が線形的とみなせるならば、共通の変換行列 \mathbf{T} を使える。

$$\tilde{\mathbf{X}}^a = \tilde{\mathbf{X}}^f \mathbf{T}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}^f := \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^f \\ \vdots \\ \mathbf{X}_K^f \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}}^a := \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^a \\ \vdots \\ \mathbf{X}_K^a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_k^{\{f,a\}} := \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left(\mathbf{x}_k^{\{f,a\}(1)} - \overline{\mathbf{x}_k^{\{f,a\}}}, \dots, \mathbf{x}_k^{\{f,a\}(N)} - \overline{\mathbf{x}_k^{\{f,a\}}} \right) \quad (k = 1, \dots, K)$$

特に、**局所アンサンブル変換カルマンフィルタ**では

$$\mathbf{T} = \mathbf{U} \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{U}^T$$

$$\mathbf{I} + \left(\tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{X}}^f \right)^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{X}}^f = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T$$

(固有値分解)

予測誤差共分散のサンプリングエラー

予測誤差相関係数のメンバー数による違い

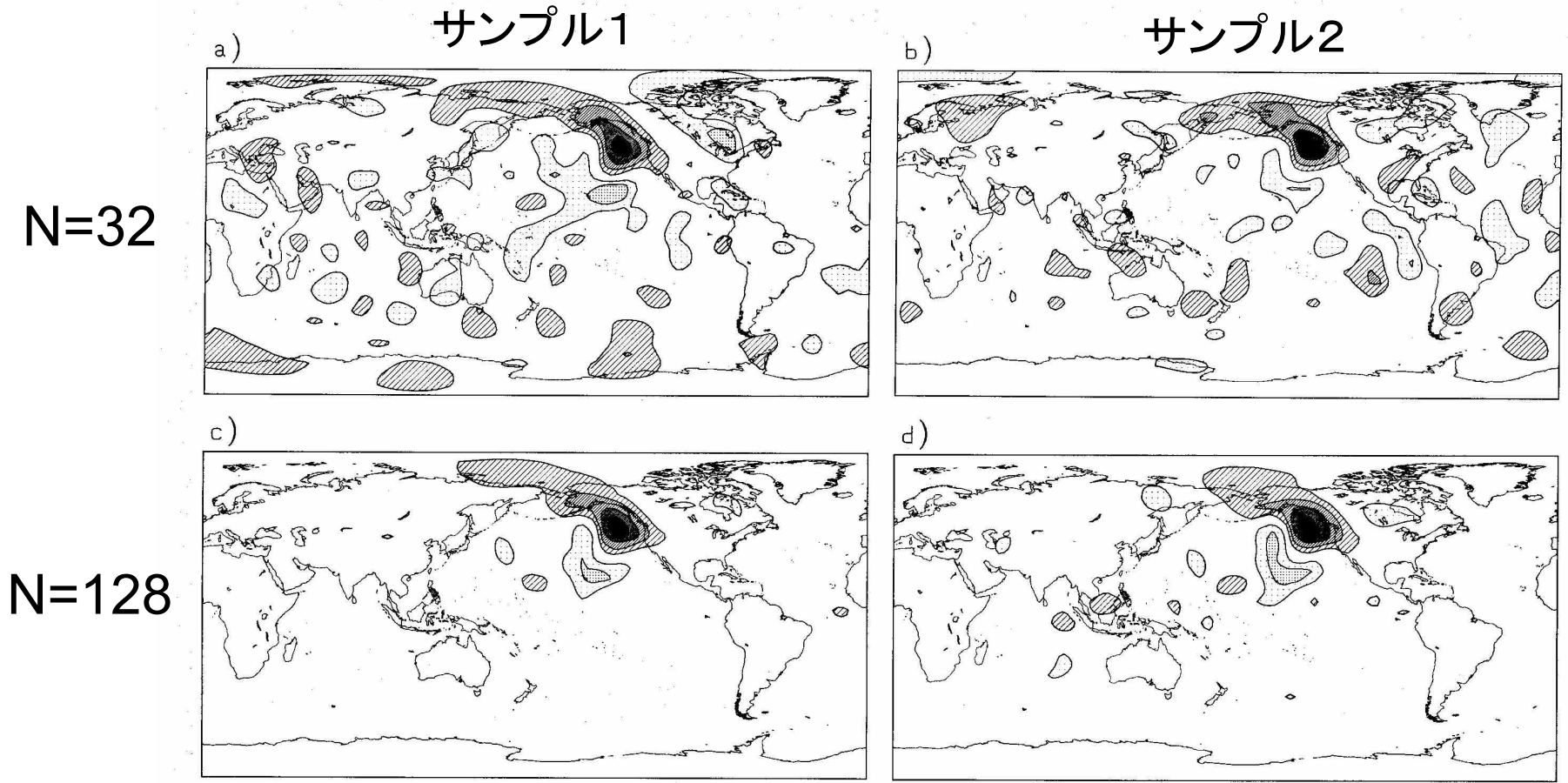


FIG. 6. Global correlation fields with respect to a point off the west coast of North America at 0000 UTC day 31. Panels (a) and (b) show the 50-kPa correlation fields for ensembles 1 and 2 when $N = 32$ and $r_{\max} = 20^\circ$. Panels (c) and (d) show the corresponding fields when $N = 128$ and $r_{\max} = 35^\circ$. The contours are at ± 0.25 , ± 0.50 , ± 0.75 , and ± 0.90 . Shading with dotted (hatched) patterns indicates negative (positive) correlations. The intensity of the shading increases as the magnitude of the correlation increases. Regions with correlations between -0.25 and $+0.25$ are not shaded.

(Houtekamer and Mitchell, 1998)

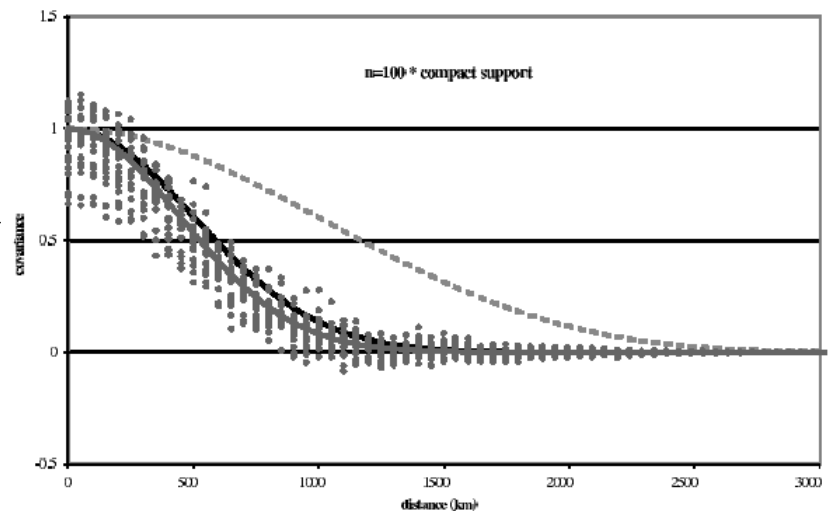
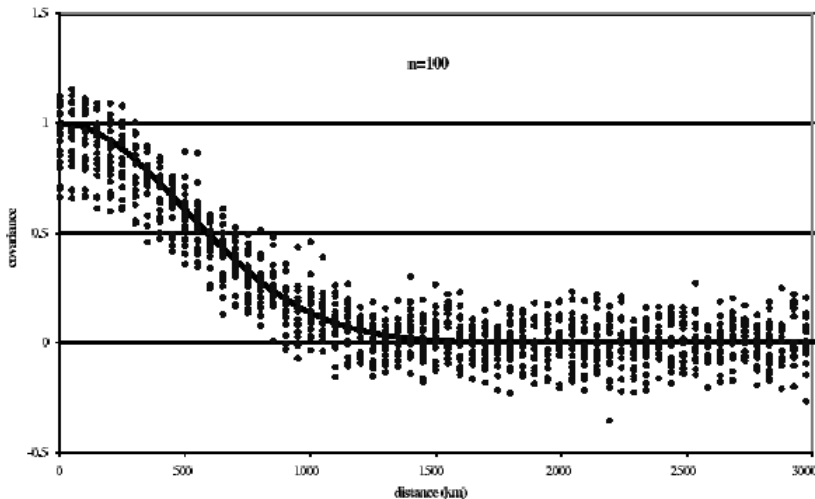
共分散局所化(1)

Covariance localization

誤差共分散行列のサンプリングエラーを抑えるために、有限の距離の範囲内で0の値を持つ適当な相関行列と誤差共分散行列のSchur積をとる。

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})_{ij} := \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ij}$$

(Schur積)



共分散行列のサンプリングエラーと共分散局所化の効果。左: 共分散行列を2点間の距離(横軸)のみの関数として、その理論値を実線で、100メンバーのアンサンブルによる計算値を黒い点で示す。右: 共分散局所化に用いる相関行列を灰色の破線、共分散局所化前後の理論値を黒と灰色の実線、局所化後のアンサンブルによる計算値を灰色の点で示す。

Lorenc (2003)

共分散局所化(2)

Schur 積定理

非負定値対称行列 \mathbf{A}, \mathbf{B} のSchur 積 $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ は非負定値である。

証明

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \cdots + \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^T \quad (m = \text{rank } \mathbf{A})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T \quad (n = \text{rank } \mathbf{B})$$

$$\therefore \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \circ \sum_{l=1}^n \mathbf{v}_l \mathbf{v}_l^T = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (\mathbf{u}_k \circ \mathbf{v}_l) (\mathbf{u}_k \circ \mathbf{v}_l)^T$$

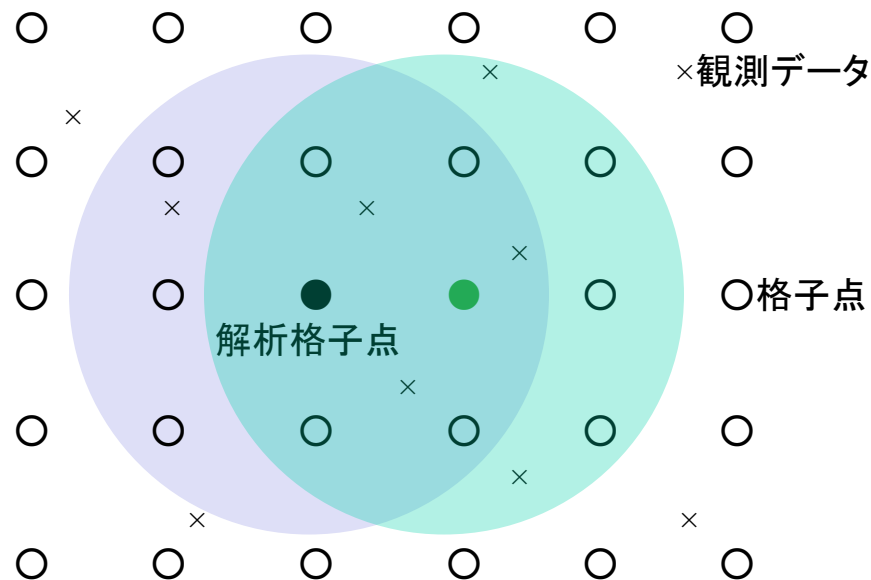
最右辺は非負定値行列の和だから、 $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ は非負定値行列である。

したがって、共分散局所化のための相関行列を \mathbf{C} とすると、 $\mathbf{C} \circ \overline{\mathbf{P}_k^f}$ も共分散行列であることが保証される。実際には、相関行列 $\mathbf{C}', \mathbf{C}''$ によって、カルマンゲインを次のように修正する。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \overline{\mathbf{P}_k^f} \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{R}_k + \overline{\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \right)^{-1} \\ &\rightarrow \mathbf{C}' \circ \overline{\mathbf{P}_k^f} \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{C}'' \circ \overline{\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T} \right)^{-1} \end{aligned}$$

共分散局所化(3)

- ・ **局所アンサンブル変換カルマンフィルタ**では、各格子点ごとの解析値の計算において、ある有限の範囲にある観測データだけを同化することによって、共分散局所化を取り入れている。
- ・ さらに、格子点ごとに計算された解析値が空間的に滑らかになるように、解析する格子点から離れるにつれて、観測データの誤差標準偏差を大きく設定する方法と併用する。



解析誤差のサンプリングエラー(1)

フィルタの発散 (filter divergence)

何らかの原因で解析誤差分散が過小評価されると、次の解析時刻における予測誤差分散が過小評価され、その結果、その時刻の解析値に占める予測値の重みが大きくなる。データ同化サイクルにおいてこの過程が繰り返されると、観測データの持つ情報が次第に解析値に反映されなくなる。

観測演算子を線形として、解析誤差共分散行列のサンプリングエラーの期待値を見積もる。

- ・ 正確な値: $\mathbf{P}^f, \mathbf{K}, \mathbf{P}^a$
- ・ N メンバーのアンサンブルから見積もった値: $\mathbf{P}_N^f, \mathbf{K}_N, \mathbf{P}_N^a$
- ・ \mathbf{P}_N^f のサンプリングエラー: \mathbf{E}_N

$$\mathbf{P}_N^f = \mathbf{P}^f + \mathbf{E}_N$$

$$\|\mathbf{E}_N\| \ll \|\mathbf{P}^f\|, \quad \langle \mathbf{E}_N \rangle = \mathbf{0}$$

解析誤差のサンプリングエラー(2)

カルマンゲイン

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{K}_N = \mathbf{P}_N^f \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}_N^f \mathbf{H}^T)^{-1}$$

$$= (\mathbf{P}^f + \mathbf{E}_N) \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T)^{-1}$$

$$= (\mathbf{P}^f + \mathbf{E}_N) \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1})^{-1}$$

$$= \left[\mathbf{K} + \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \right]$$

$$\times \left[\mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} + \left(\mathbf{H} \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \right)^2 - \dots \right]$$

$$= \mathbf{K} + (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \left[\mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \right]$$

$$+ O(\|\mathbf{E}_N\|^3)$$

解析誤差のサンプリングエラー(3)

解析誤差共分散行列

$$\mathbf{P}^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}^f$$

$$\mathbf{P}_N^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_N\mathbf{H})\mathbf{P}_N^f$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \left[\mathbf{I} - \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1}) \mathbf{H} \right] \\ &\times (\mathbf{P}^f + \mathbf{E}_N) + O(\|\mathbf{E}_N\|^3) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \left[\mathbf{I} - \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} + (\mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H})^2 \right] \mathbf{P}^f \\ &+ (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \left[\mathbf{I} - \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \right] \mathbf{E}_N + O(\|\mathbf{E}_N\|^3) \end{aligned}$$

サンプリングエラーについて期待値をとると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_N^a \rangle &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \left[\mathbf{I} + \left\langle (\mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H})^2 \right\rangle \right] \mathbf{P}^f \\ &\quad - (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \left\langle \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_N \right\rangle + O(\|\mathbf{E}_N\|^3) \end{aligned}$$

解析誤差のサンプリングエラー(4)

結局

$$\langle \mathbf{P}_N^a \rangle = \mathbf{P}^a - \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \left\langle \mathbf{E}_N \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_N \right\rangle (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})^T}_{\text{Sampling Error}} + O(\|\mathbf{E}_N\|^3)$$

右辺第2項の行列は非負定値行列なので、予測誤差共分散行列のサンプリングエラーによって、解析誤差分散が一般に過小評価される。

数値モデルが2格子点からなり、初めの格子点の状態変数が観測される場合を考える。

$$\mathbf{H} = (1 \quad 0), \quad \mathbf{R} = (\sigma_1^o)^2, \quad \mathbf{P}^f = \begin{pmatrix} (\sigma_1^f)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma_2^f)^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_N = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}$$

このとき

$$\langle \mathbf{P}_N^a \rangle = \mathbf{P}^a - \begin{pmatrix} \frac{(\sigma_1^o)^4 e_1^2}{\left[(\sigma_1^f)^2 + (\sigma_1^o)^2 \right]} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\|\mathbf{E}_N\|^3)$$

解析誤差分散の過小評価は観測データのある格子点で生じる。

共分散膨張

Covariance Inflation

解析誤差分散の過小評価を防ぐために、予測誤差分散を人工的に大きくする。

- Multiplicative inflation

$$\mathbf{X}_k^f \rightarrow (1 + \Delta)\mathbf{X}_k^f \quad (\Delta > 0)$$

- Additive inflation

$\boldsymbol{\eta}_{k-1}^{(i)}$ をランダムな摂動として

$$\mathbf{X}_{k-1}^a \rightarrow \mathbf{X}_{k-1}^a + \left(\boldsymbol{\eta}_{k-1}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{k-1}^{(N)} \right)$$

$$\therefore \mathbf{X}_k^f = \mathbf{M}_k \mathbf{X}_{k-1}^a + \left(\mathbf{M}_k \boldsymbol{\eta}_{k-1}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}_k \boldsymbol{\eta}_{k-1}^{(N)} \right)$$

力学的バランスを保つために、予測値に摂動を直接的には加えない。