

惑星大気スーパーローテーションの力学に関する研究 自転軸対称な理論モデルの構築と数値実験

榎村 (山本) 博基 (ISAS/JAXA)

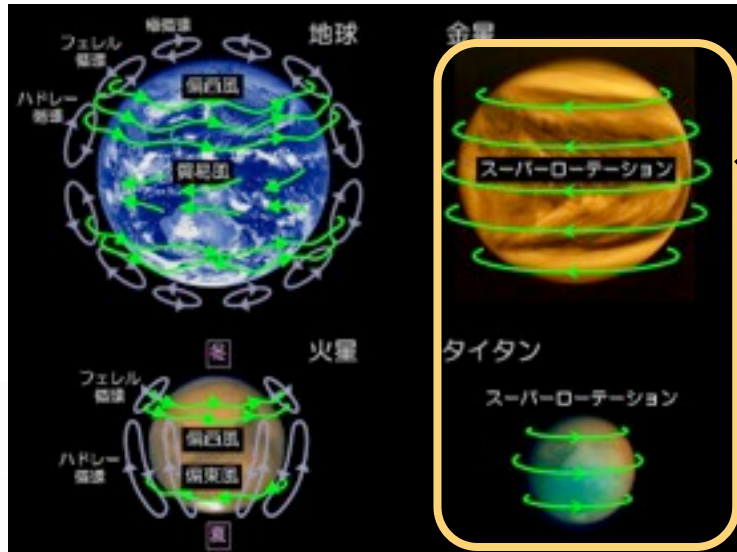
要旨

- 惑星大気大循環の1形態である，自転を追い越す向き的高速東西風「**スーパーローテーション**」の力学を，理想化された自転軸対称な大気の基本方程式系をもとに，理論的・数値的に研究した。
- **理論モデルを構築**することで，スーパーローテーションの「強度」と「力学的平衡状態」のパラメータ依存性を見積もり，広いパラメータ範囲で，その妥当性を**数値実験**で確かめた。
- また，自転軸対称な系で，スーパーローテーションが生成・維持されるために必要な「水平渦拡散*」に対する依存性を調べ，地球型ハドレー循環の理論モデル「ヘルド・ホウモデル」との関係性を明らかにした。

*非軸対称擾乱による運動量輸送

本研究の流れ

現実世界 (とても複雑)



単純化

理想化された自転軸対称な
大気の基本方程式系
(でもまだ複雑)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi &= \nu_H D_H(u) + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_H D_H(v) + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= g \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\theta - \theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

離散化

単純化

数値モデル
数値計算

理論モデル
連立4元代数方程式

$$\begin{aligned} R_{vB} &= \pi^2 E_V S, \\ R_{vT} &= \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right), \\ \frac{R_{vT} + R_{vB}}{2} &= \frac{1}{\tau \Omega} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right), \\ S^2 + 2S &= 2\beta R_T - 20E_H (R_{vT} + R_{vB}). \end{aligned}$$

数値解

検証

解析解 = 理論的見積もり

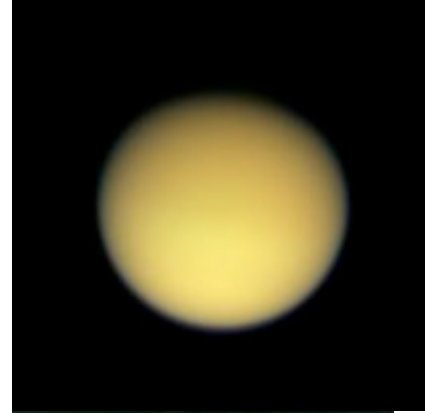


本論文 (D論) の構成

- 第1章 はじめに
- 第2章 基礎方程式系
- 第3章 スーパーローテーション強度の理論的見積もり
- 第4章 力学的平衡状態にもとづく解の分類と
そのパラメータ依存性
- 第5章 解の水平エクマン数依存性
- 第6章 議論
- 第7章 本研究のまとめ
- 付録A 数値モデルの構築
- 付録B 図集

第1章 はじめに

観測事実 | 地球・金星・タイタン



	地球	タイタン
赤道半径 (a)	6378 km	2575 km
自転周期 ($T = 2\pi/\Omega$)	0.997 地球日	15.9 地球日
赤道自転速度 ($a\Omega$)	465 m/s	11.8 m/s

観測事実 | 東西風速の鉛直分布

金星

$$a\Omega \sim 1.81 \text{ m/s}$$

↑約55倍

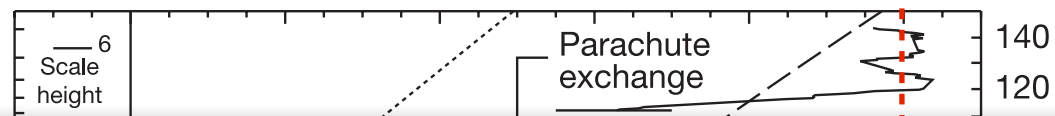
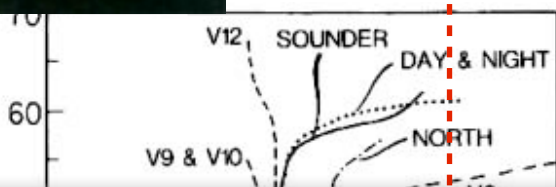
$$U \sim 100 \text{ m/s}$$

タイタン

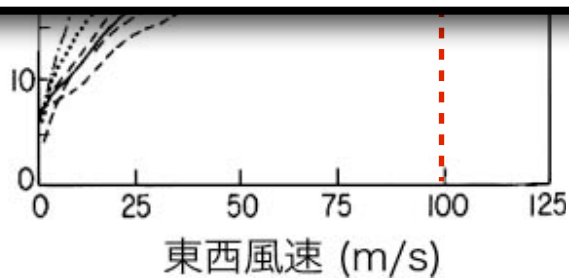
$$a\Omega \sim 11.8 \text{ m/s}$$

↑約9倍

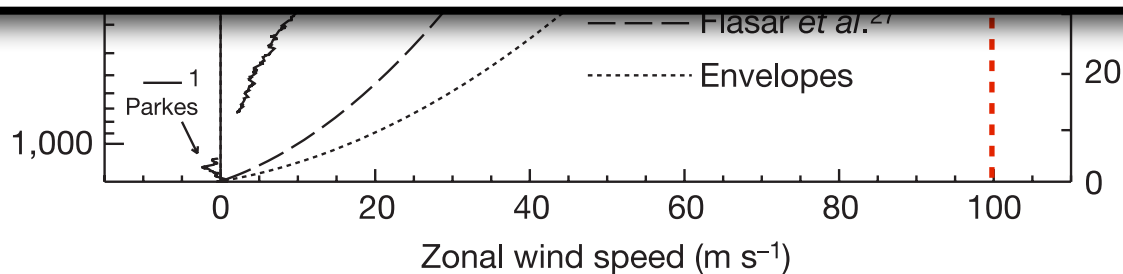
$$U \sim 100 \text{ m/s}$$



自転を追い越す向きの惑星規模の高速東西風
「スーパーローテーション」



Schubert (1983)



Bird et al. (2005)

自転を追い越す向きの惑星規模の高速東西風 「スーパーローテーション」

➔ 地表面との摩擦・鉛直粘性で大気は減速されるはず...

スーパーローテーションのメカニズム

II

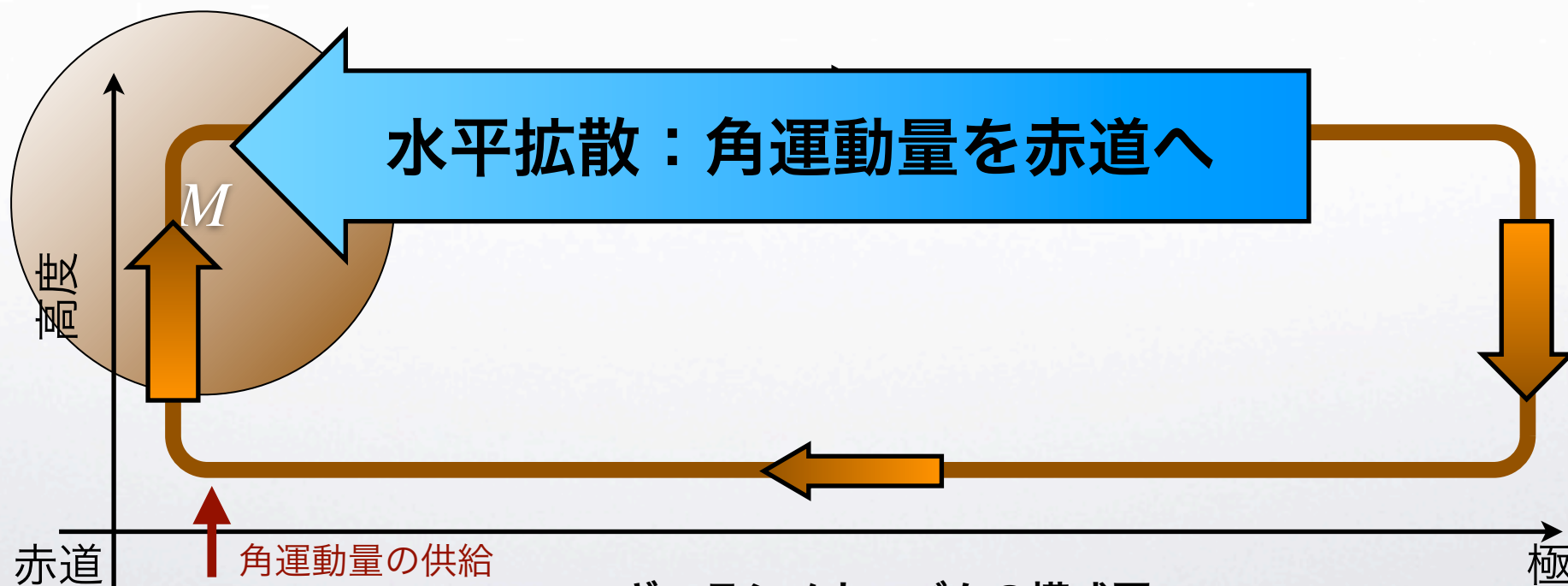
惑星気象学の重要な課題

メカニズムに対する仮説

- 夜昼間対流に着目する仮説 (e.g., Schubert & Whitehead, 1969)
- 重力波に着目する仮説 (e.g., Fels & Linzen, 1974)
- 子午面循環に着目する仮説 (e.g., Gierasch, 1975)

子午面循環に着目する仮説

- Gierasch (1975) が提案 | ギーラシメカニズム
 - 自転軸対称・赤道対称な系
 - 赤道から極まで達する1セルの子午面循環
 - 無限大の **水平拡散**★ (常に剛体回転 = 等角速度)



ギーラシメカニズムの模式図

★非軸対称擾乱による角運動量の赤道向き輸送を水平拡散の形で導入している。順圧不安定が、このような擾乱の役割を担うことが示されている (Rossow & Williams, 1979 など)

Gierasch は、実際にこのようなメカニズムが働くには

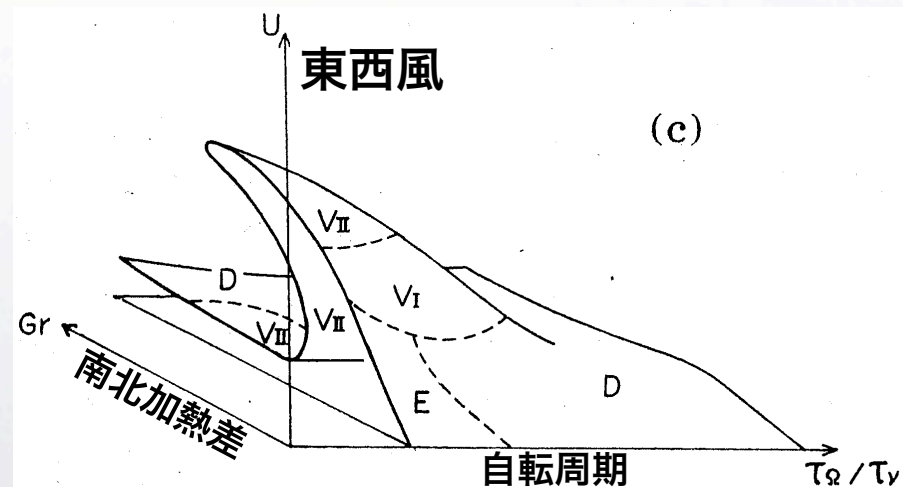
$$\text{水平拡散の緩和時間} \ll \begin{cases} \text{子午面循環の循環時間} \\ \text{鉛直拡散の緩和時間} \end{cases}$$

が、必要だと主張。

Matsuda (1980, 1982) は低自由度スペクトルモデル★を用いて、
水平拡散が 無限大の場合 と 有限の場合 の

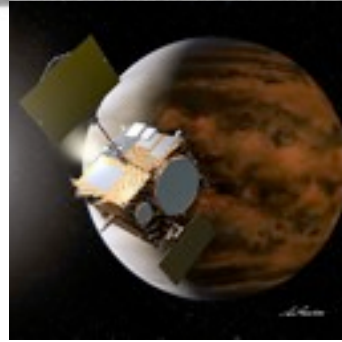
- (1) 東西風のパラメータ依存性
- (2) 解の支配的なモーメントバランス
- (3) 多重安定平衡解の存在範囲

を調べた。



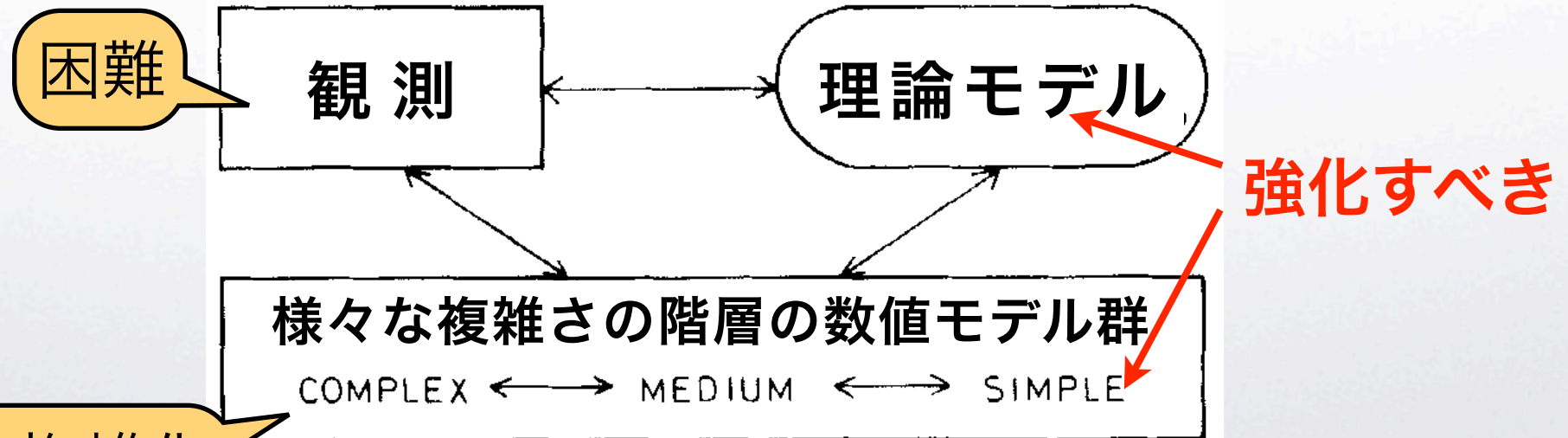
★自転軸対称ブシネスク流体プリミティブ方程式系2層モデルの速度場と温度場を少数の基本モードに展開して、モード間の相互作用を陽に非線形項として表現したモード方程式

問題意識 | なぜメカニズムが未解明なのか？



- 観測データの不足
 - 2010年5月に打ち上げられた金星探査機「あかつき」は、同年12月の金星軌道投入に失敗
- ➔ 近年の金星大気大循環モデル（複雑な数値モデル）の開発が進んでいる
 - しかし、計算結果に説得力のある解釈を与えられないでいる

気象学研究の理想的な姿



Hoskins (1983)

本研究の目的

スーパーローテーションのメカニズムとして現在でも有力な仮説の1つである**ギーラシメカニズム**に対する理解を深める

松田の研究では

- 子午面循環による温度場の変化を無視していた
- モード間の相互作用を陽に扱っていたため、代数的に複雑である
- 十分な自由度の数値モデルを用いた、理論的見積もりの検証がない

本研究では

南北温度差を**内部変数**として扱う

惑星大気大循環を特徴づける無次元量の**連立代数方程式**を導き、パラメータ依存性や力学的平衡状態を求め（理論的手法）

数値実験で理論的見積もりを検証する（数値的手法）

空間自由度に関して

本研究の理論的手法

<

松田の手法

<<

本研究の数値的手法

次章以降の内容

- 第2章 理想化された大気の基本方程式系を記述する
- 第3章 連立代数方程式を導くことで理論モデルを構築し、その解からスーパーローテーション強度を見積もる
- 第4章 力学的平衡状態をもとに解を分類し、そのパラメータ依存性を調べる
- 第5章 水平拡散を弱めたときの解の平衡状態を調べる
- 第6章 本研究の近似や仮定、結果の応用について議論
- 第7章 本研究のまとめ

第 2 章 基礎方程式系

基礎方程式系の近似や仮定

以下の近似や仮定で理想化された球面上の大気の基本方程式系を用いる

- プリミティブ運動方程式
 - 静力学平衡近似・浅い大気の近似・伝統的な近似
- ブシネスク近似 - 浮力項以外では密度変化を無視する
- 乾燥大気 - 凝結成分を考慮しない
- 地形なし - 地表面の起伏は考慮しない
- 赤道対称なニュートン加熱・冷却
 - ある放射対流平衡温位場からの温位差に比例する加熱・冷却
- 自転軸対称仮定 - 東西方向に一様
- 運動量の強い水平拡散
 - 非自転軸対称な擾乱による運動量の南北輸送の効果を水平拡散の形で取り入れる

自転軸対称な乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系

$$\text{東西} : \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = \underbrace{\nu_H D_H(u)}_{\text{水平拡散}} + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\text{南北} : \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \underbrace{\nu_H D_H(v)}_{\text{水平拡散}} + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\text{静力学平衡式} : \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta - \Theta_0}{\Theta_0}$$

$$\text{熱力学方程式} : \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\theta - \theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$\text{連続の式} : \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

u : 東西風, v : 南北風, w : 鉛直風, θ : 温位, $\Phi = p'/\rho_0$, p' : 圧力擾乱, ρ_0 : 基準密度,
 ϕ : 緯度, z : 高度, a : 惑星半径, Ω : 自転角速度, g : 重力加速度, ν_H : 水平拡散係数,
 ν_V : 鉛直拡散係数, κ_V : 鉛直熱拡散係数, θ_e : ニュートン加熱・冷却の基準温位,
 τ : ニュートン加熱・冷却の緩和時定数, $D_H(u), D_H(v)$: 水平拡散項, Θ_0 : 基準温位

水平拡散項・放射対流平衡温位場

水平拡散項：

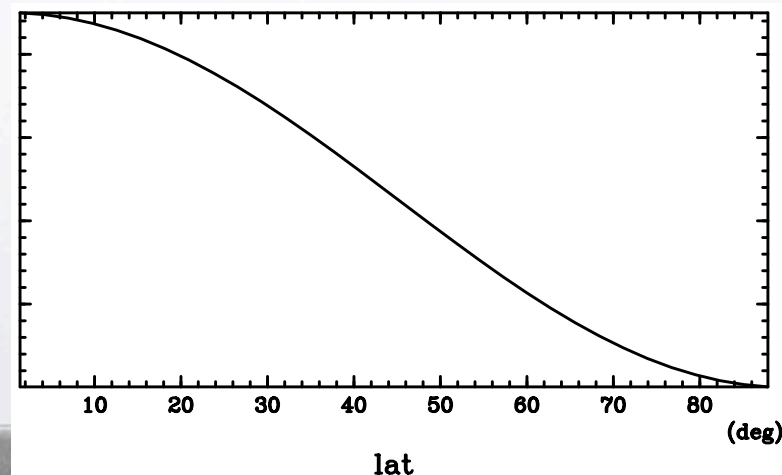
Becker (2001)

$$D_H(u) \equiv \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{u}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{2u}{a^2}$$

$$D_H(v) \equiv \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{v}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) \right] + \frac{2v}{a^2}.$$

放射対流平衡温位場： $\theta_e \equiv \Theta_0 \left[1 - \Delta_H \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \right]$ ， Δ_H ：南北温位差/ Θ_0

中立： $\frac{\partial \theta_e}{\partial z} = 0$



境界条件

上端境界条件：自由滑り，質量の流出入なし，断熱

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{上端} : z = H)$$

下端境界条件：粘着，質量の流出入なし，断熱

$$u = v = w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{下端} : z = 0)$$

側方境界条件：質量・運動量の流出入なし，断熱

$$v = \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial w}{\partial \phi} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \left(\text{赤道} : \phi = 0, \text{極} : \phi = \frac{\pi}{2} \right)$$

第3章

スーパーローテーション強度の理論的見積もり

3.1 理論モデルの構築

3.2 理論モデルの解析

3.3 数値実験

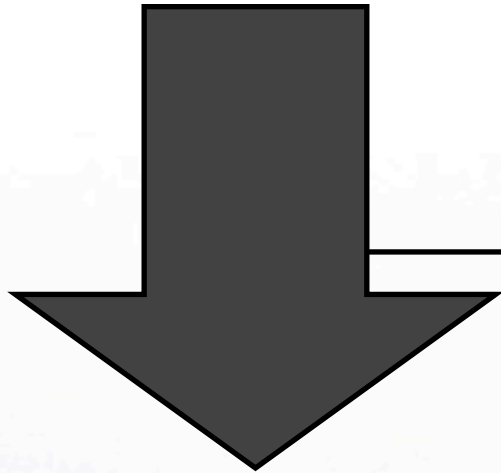
3.4 考察 | 松田の研究との比較

3.1 理論モデルの構築

理想化された大気の
基礎方程式系

偏微分方程式系

- ✓ 物理量は時空間の関数： $u(\phi, z, t)$
- ✓ 無限自由度系



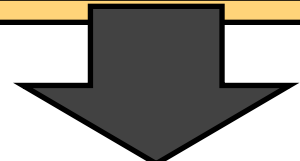
- 定常状態を仮定： $\partial/\partial t = 0$
- 物理量の空間依存性を仮定 (後述)
- 空間積分 / 大きさの関係式

理論モデル： 惑星大気大循環を特徴づける
4つの無次元量に関する代数方程式系

- ✓ 低自由度系
- ✓ パラメータ依存性が分かり易い
- ✓ 代数的に取り扱い易い
- ✓ 解が容易に求まる

3.1 理論モデルの構築

理論モデル： 惑星大気大循環を特徴づける
4つの無次元量に関する代数方程式系



スーパーローテーション強度： $S \equiv \frac{U}{a\Omega}$ ← 大気上端の東西風の強さ
← 赤道上の自転速度

地表付近の代表的な南北風の強さ V_B を
用いて表したロスビー数： $R_{vB} \equiv \frac{V_B}{a\Omega}$

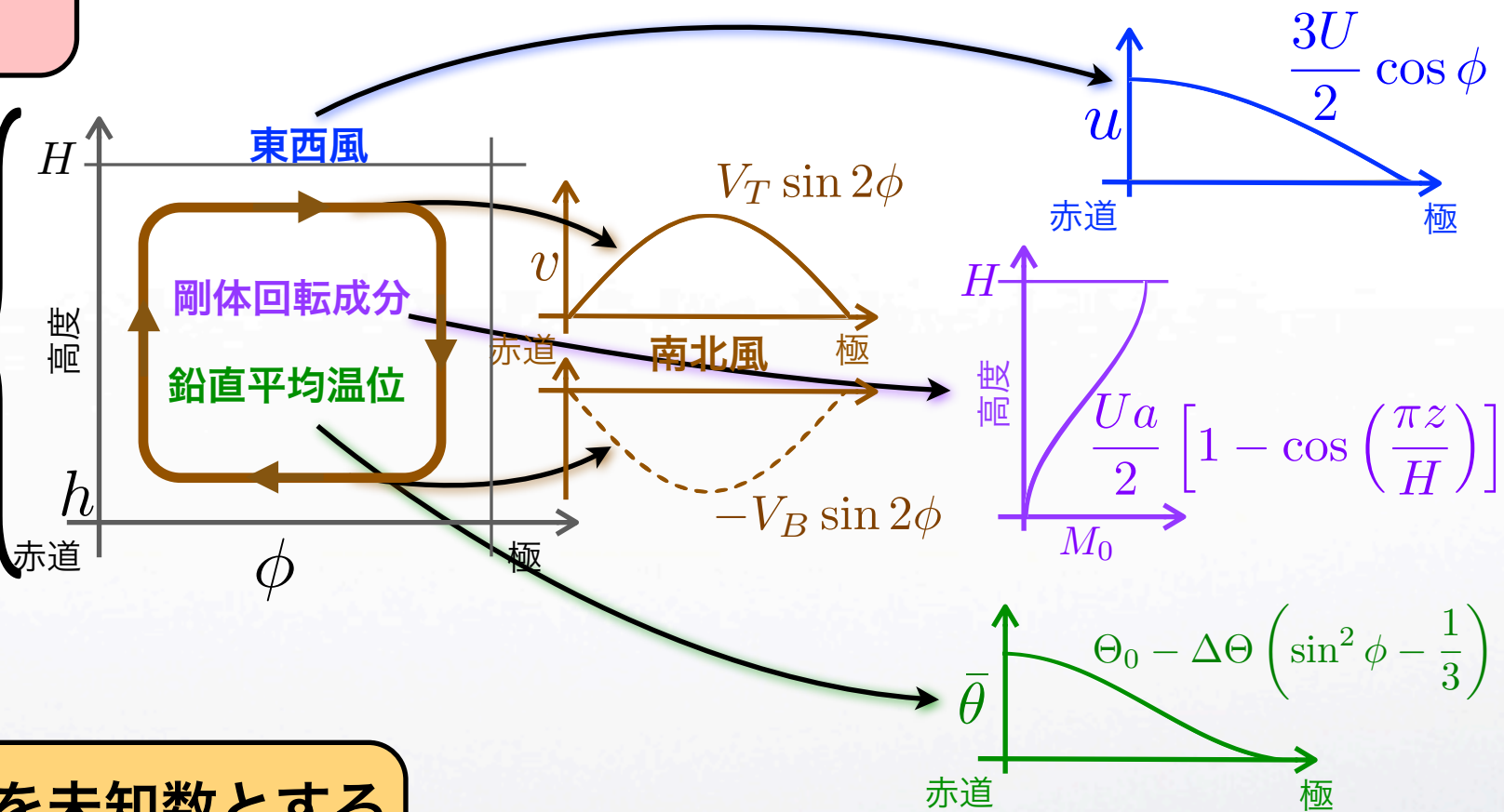
大気上端の代表的な南北風の強さ V_T を
用いて表したロスビー数： $R_{vT} \equiv \frac{V_T}{a\Omega}$

鉛直平均温位の極・赤道温位差 $\Delta\Theta$ の θ_e の
極・赤道温位差 $\Theta_0\Delta_H$ に対する割合： $\beta \equiv \frac{\Delta\Theta}{\Theta_0\Delta_H}$

3.1 理論モデルの構築

理想化された大気の
基礎方程式系

定常状態
空間依存性
空間積分 / 大きさの関係式



S, R_{vB}, R_{vT}, β を未知数とする
連立4元代数方程式

3.1 理論モデルの構築

東西運動方程式

熱力学方程式

南北運動方程式

地表付近

緯度積分

大気上端

鉛直平均

大気上端
|
地表付近

$$\frac{8}{15} a\Omega V_B \approx \nu_V \frac{U a \pi^2}{2H^2}$$

$$\frac{1}{aH \cos \phi} \int_0^H \frac{\partial}{\partial \phi} (v \theta \cos \phi) dz \approx -\frac{(\Theta_0 \Delta_H - \Delta \Theta)}{\tau} \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right)$$

無次元化

$$-\frac{8}{15} \left(\frac{3}{2} U + a\Omega \right) V_T \approx -\nu_V \frac{U a \pi^2}{2H^2}$$

大きさの関係式

無次元化

$$\begin{aligned} & \frac{v(H)}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} \Big|_{z=H} - \frac{v(h)}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} \Big|_{z=h} + \frac{[u(H)^2 - u(h)^2] \tan \phi}{a} + 2\Omega [u(H) - u(h)] \sin \phi \\ &= -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \Big|_{z=H} - \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \Big|_{z=h} \right) + \nu_H \{ D_H [v(H)] - D_H [v(h)] \} \\ & \quad + \nu_V \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=H} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=h} \right) \end{aligned}$$

$$R_{vB} \approx \pi^2 E_V S$$

無次元化

$$R_{vT} \approx \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right)$$

$$\frac{R_{vT} + R_{vB}}{2} \sim \frac{1}{\tau \Omega} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)$$

大きさの関係式

無次元化

$$S^2 + 2S \sim 2\beta R_T - 20E_H (R_{vT} + R_{vB})$$

E_V : 鉛直エクマン数, E_H : 水平エクマン数, R_T : 外部熱ロスビー数
 $\equiv \nu_V / (H^2 \Omega)$ $\equiv \nu_H / (a^2 \Omega)$ $\equiv gH \Delta_H / (a^2 \Omega^2)$

3.1 理論モデルの構築

S, R_{vB}, R_{vT}, β を未知数とする連立4元代数方程式

$$R_{vB} = \pi^2 E_V S$$

$$R_{vT} = \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right)$$

$$\frac{R_{vT} + R_{vB}}{2} = \frac{1}{\tau\Omega} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)$$

$$S^2 + 2S = 2\beta R_T - 20 E_H (R_{vT} + R_{vB})$$

R_{vB}, R_{vT}, β を消去

○ 外部パラメータ

S の5次方程式

$$\left[S^2 + 2S + BS \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right] \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right] = 2R_T$$

$$A \equiv \pi^2 \tau \Omega E_V \quad B \equiv 20 \pi^2 E_H E_V$$

3.1 理論モデルの構築

S の 5 次方程式

$$\left[S^2 + 2S + BS \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right] \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right] = 2R_T$$

正の解：スーパーローテーション強度の理論的見積もり

↑ 正の解は必ずひとつだけ存在する

3つの外部パラメータ

$$A \equiv \pi^2 \tau \Omega E_V = \pi^2 \frac{\tau \leftarrow \text{ニュートン加熱・冷却の緩和時間}}{H^2 / \nu_V \leftarrow \text{鉛直拡散の緩和時間}}$$

$$B \equiv 20\pi^2 E_H E_V = 5 \left(\frac{2\pi / \Omega \leftarrow \text{自転周期}}{\sqrt{(a^2 / \nu_H)(H^2 / \nu_V)} \leftarrow \text{水平拡散と鉛直拡散の緩和時間の幾何平均}} \right)^2$$

$$R_T \equiv \frac{gH\Delta_H}{a^2\Omega^2} : \text{外部熱ロスビー数*}$$

*自転効果に対する南北加熱差の大きさを表す無次元数。分子 ($gH\Delta_H$) よりも分母 ($a^2\Omega^2$) の方が惑星ごとの違いが大きいと考えられるため、自転効果の目安として使われる。 R_T が大きいほど自転効果が小さい。

3.2 理論モデルの解析 | 3次方程式化

Sの5次方程式

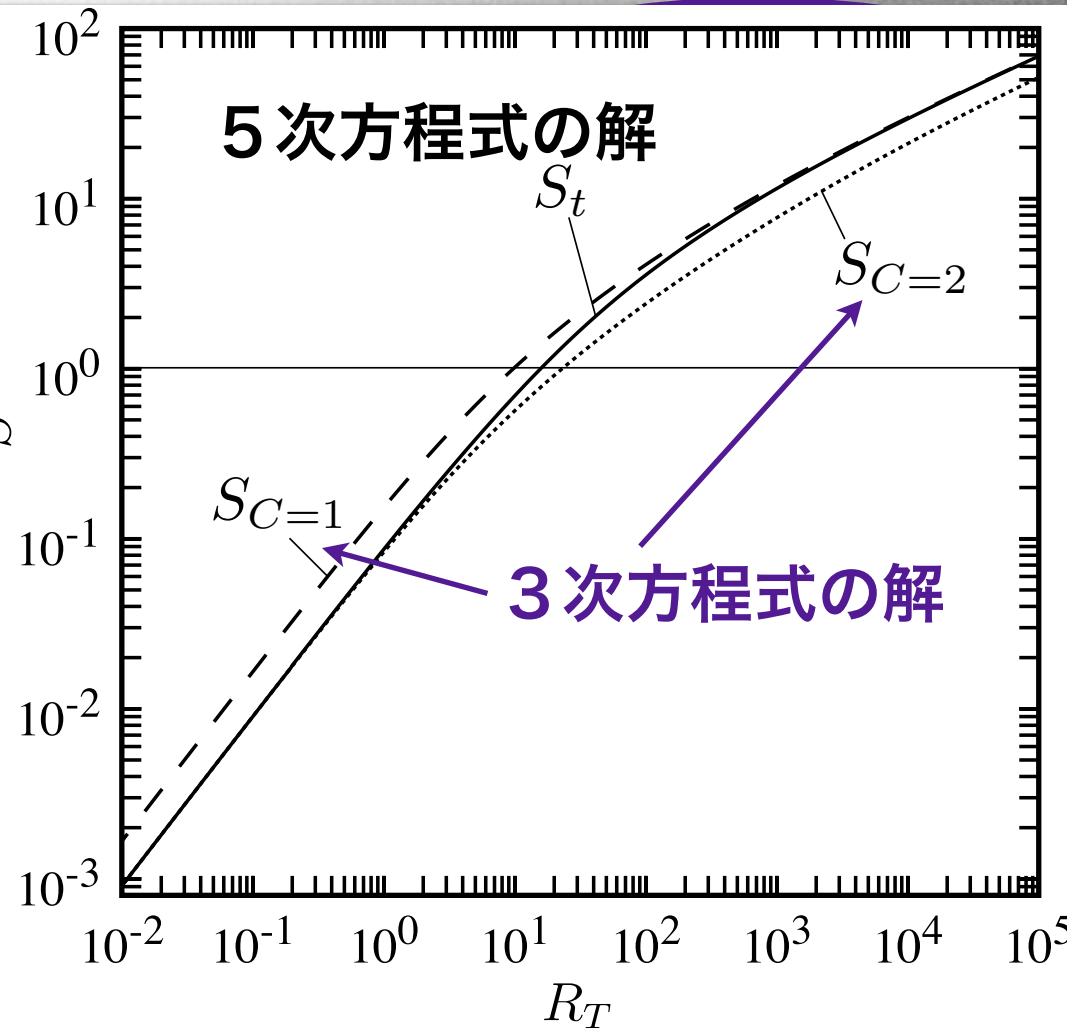
$$\left[S^2 + 2S + BS \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right] \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right]$$

$1 < \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \approx C$ (定数)

$$(S^2 + 2S + BCS) \left(\frac{ACS}{2} + 1 \right) \approx 2i$$

Sの3次方程式

$$\frac{AC}{2} S^3 + \left(1 + AC + \frac{ABC^2}{2} \right) S^2 + (2 + BC)S \approx 2R_T$$



1変数に降く！
(カルダノ公式)

3.2 理論モデルの解析 | さらなる簡単化

S の 3 次方程式

$$\frac{AC}{2} S^3 + \left(1 + AC + \frac{ABC^2}{2}\right) S^2 + (2 + BC) S \approx 2R_T$$

カルダノの公式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = \frac{1}{6a} \left(-2b + p \sqrt[3]{4(-27a^2d + 9abc - 2b^3 + 3a\sqrt{3(27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2)})} \right. \\ \left. + q \sqrt[3]{4(-27a^2d + 9abc - 2b^3 - 3a\sqrt{3(27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2)})} \right)$$

ただし、 $(p, q) = (1, 1), (\omega, \omega^2), (\omega^2, \omega)$

3.2 理論モデルの解析 | さらなる簡単化

$$S_1 \equiv \frac{2R_T}{2 + BC} \quad S_2 \equiv \sqrt{\frac{2R_T}{1 + AC + 0.5ABC^2}}, \quad S_3 \equiv \left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$R_{T1} \equiv \frac{(2 + BC)^2}{2(1 + AC + 0.5ABC^2)}, \quad R_{T2} \equiv \frac{2(1 + AC + 0.5ABC^2)^3}{A^2C^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \ll 1 \rightarrow (2 + BC) \approx 2 \\ A \gg AB \Rightarrow \begin{cases} A \ll 1 \rightarrow 1 + AC + 0.5ABC^2 \approx \begin{cases} 1 \cdots \cdots (a) \\ AC \cdots \cdots (b) \end{cases} \\ A \gg 1 \rightarrow 1 + AC + 0.5ABC^2 \approx \begin{cases} 1 \cdots \cdots (c) \\ 0.5ABC^2 \cdots \cdots (d) \end{cases} \end{cases} \\ B \gg 1 \rightarrow (2 + BC) \approx BC \\ A \ll AB \Rightarrow \begin{cases} AB \ll 1 \rightarrow 1 + AC + 0.5ABC^2 \approx \begin{cases} 1 \cdots \cdots (c) \\ 0.5ABC^2 \cdots \cdots (d) \end{cases} \\ AB \gg 1 \rightarrow 1 + AC + 0.5ABC^2 \approx \begin{cases} 1 \cdots \cdots (c) \\ 0.5ABC^2 \cdots \cdots (d) \end{cases} \end{cases} \end{array} \right.$$

3.2 理論モデルの解析 | さらなる簡単化

			S_1	S_2	S_3	R_{T1}	R_{T2}
(a)	$B \ll 1$	$A \ll 1$	R_T	$\sqrt{2R_T}$	$\left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}}$	2	$\frac{2}{A^2C^2}$
(b)		$A \gg 1$		$\sqrt{\frac{2R_T}{AC}}$		$\frac{2}{AC}$	$2AC$
(c)	$B \gg 1$	$AB \ll 1$	$\frac{2R_T}{BC}$	$\sqrt{2R_T}$		$\frac{B^2C^2}{2}$	$\frac{2}{A^2C^2}$
(d)		$AB \ll 1$		$\sqrt{\frac{2R_T}{ABC^2}}$		$\frac{B}{A}$	$\frac{AB^3C^4}{4}$

6種類の近似式



6種類の力学的平衡状態?

3.2 理論モデルの解析 | 力学的平衡状態

3次方程式は... $(S^2 + 2S + BCS) \left(\frac{ACS}{2} + 1 \right) \approx 2R_T$

南北運動方程式の形



$$S^2 + 2S + BCS \approx 2R_T \beta$$

↑ ↑ ↑ ↑
 メトリック項 コリオリ項 水平拡散項 気圧傾度力項

左辺の3項のどれかが卓越し、**気圧傾度力項**とつり合う場合は...

- ($S, B, 1$) の大小関係で
- $\left\{ \begin{array}{l} S \gg 1, S \gg B \rightarrow \text{メ vs 圧} : \text{旋衡風平衡 [C]} \\ S \ll 1, B \ll 1 \rightarrow \text{コ vs 圧} : \text{地衡風平衡 [G]} \\ B \gg S, B \gg 1 \rightarrow \text{拡 vs 圧} : \text{水平拡散平衡 [H]} \end{array} \right.$
- (Sが最大) (1が最大) (Bが最大)

$$\frac{ACS}{2} + 1 = \frac{1}{\beta}$$

3.2 理論モデルの解析 | 力学的平衡状態

$$S^2 + 2S + BCS \approx 2R_T \beta = \left(\frac{ACS}{2} + 1 \right)^{-1} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta_0 \Delta_H}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AS \ll 1 \rightarrow \beta \approx 1 \rightarrow \Delta\Theta \approx \Theta_0 \Delta_H \cdots [1] \\ \hspace{15em} \text{熱の移流が無視できる} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AS \gg 1 \rightarrow \beta \ll 1 \rightarrow \Delta\Theta \ll \Theta_0 \Delta_H \cdots [0] \\ \hspace{15em} \text{熱の移流が無視できない} \end{array} \right.$$

結局、力学的平衡状態の種類は

[C, G, H] × [1, 0] の6種類

$$\max[S, B, 1] = \begin{cases} S \\ 1 \\ B \end{cases} \times AS \begin{cases} \ll 1 \\ \gg 1 \end{cases}$$

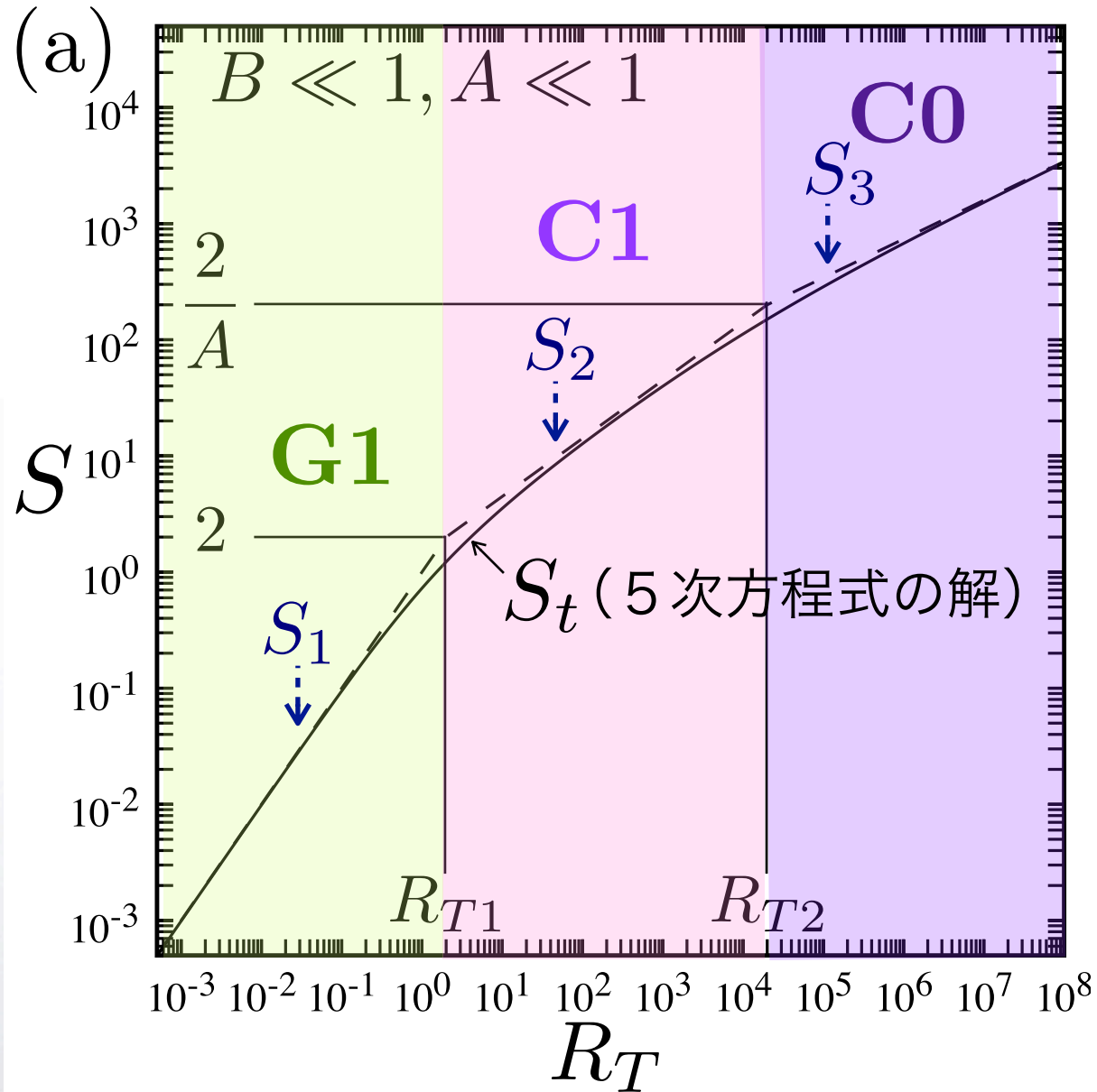
3.2 理論モデルの解析 | 力学的平衡状態



			S_1	$S(R_{T1})$	S_2	$S(R_{T2})$	S_3
(a)	$B \ll 1$	$A \ll 1$	G1 R_T		C1 $\sqrt{2R_T}$		C0 $\left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}}$
(b)		$A \gg 1$			G0 $\sqrt{\frac{2R_T}{AC}}$		
(c)	$B \gg 1$	$AB \ll 1$	H1 $\frac{2R_T}{BC}$		C1 $\sqrt{2R_T}$		
(d)		$AB \ll 1$			H0 $\sqrt{\frac{2R_T}{ABC^2}}$		

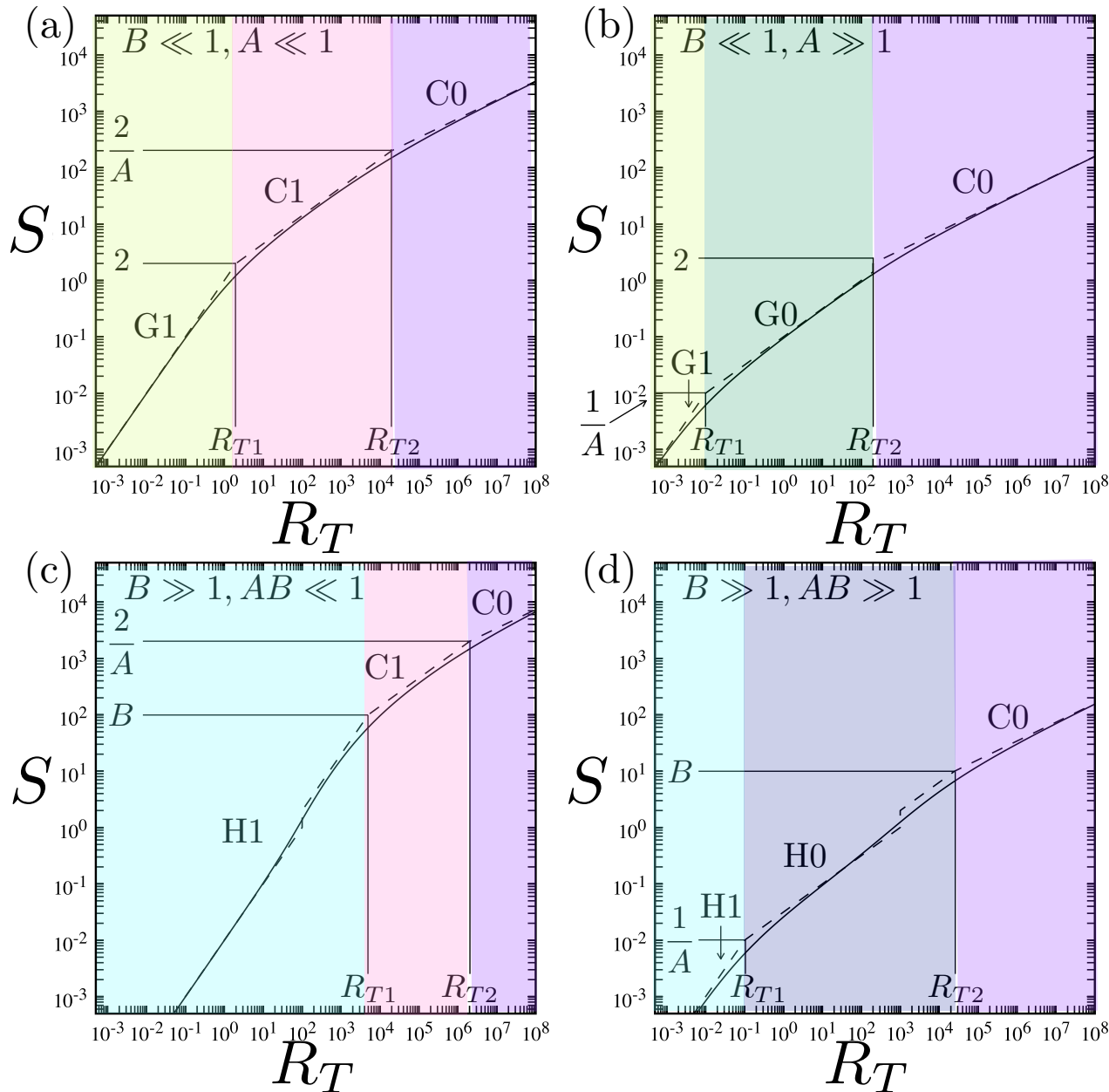
$$\max(S, 1, B) = \left\{ \begin{array}{l} S \text{ 旋衡風平衡} : C \\ 1 \text{ 地衡風平衡} : G \\ B \text{ 水平拡散平衡} : H \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} 1 : \text{熱の移流が無視できる} \quad S \ll 1/A \\ 0 : \text{熱の移流が無視できない} \quad S \gg 1/A \end{array} \right.$$

3.2 理論モデルの解析 | 力学的平衡状態



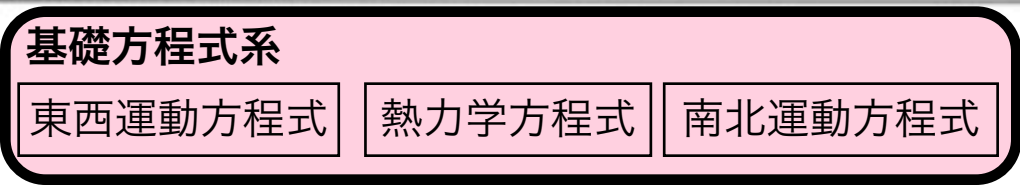
(a) $A = 10^{-2}, B = 10^{-2}$

3.2 理論モデルの解析 | 力学的平衡状態



(a) $A = 10^{-2}, B = 10^{-2}$, (b) $A = 10^2, B = 10^{-2}$, (c) $A = 10^{-3}, B = 10^2$, (d) $A = 10^2, B = 10$

ここまでのまとめ



↓ 簡単化

連立4元代数方程式

$$R_{vB} = \pi^2 E_V S,$$

$$R_{vT} = \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right),$$

$$\frac{R_{vT} + R_{vB}}{2} = \frac{1}{\tau\Omega} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right),$$

$$S^2 + 2S = 2\beta R_T - 20E_H(R_{vT} + R_{vB}).$$

R_{vB}, R_{vT}, β を消去

5次方程式

$$\left\{ S^2 + 2S + BS \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right\} \left\{ \frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right\} = 2R_T,$$

$\left(\frac{2+S}{1+S} \right) = C$ 定数

3次方程式

$$\frac{A}{2} S^3 + \left(1 + AC + \frac{ABC^2}{2} \right) S^2 + (2 + BC)S = 2R_T$$

→ カルダノ公式で代数的に解ける

数値解

理論的見積もり

どれくらい合ってる？

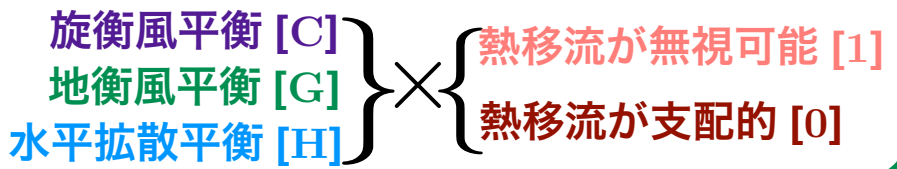
近似解

$$S \approx \begin{cases} S_1 & \text{for } R_T \leq R_{T1} \\ S_2 & \text{for } R_{T1} < R_T \leq R_{T2}, \\ S_3 & \text{for } R_{T2} < R_T \end{cases}$$

4つの場合の近似式

	B	A (AB)	S ₁	S ₂	S ₃	R _{T1}	R _{T2}	
B ≪ 1,	B ≪ 1	A ≪ 1	R _T [G1]	√(2R _T) [C1]	(4R _T /AC) ^{1/3} [C0]	2	2 / A ² C ²	
		A ≫ 1		√(2R _T /AC) [G0]			2 / AC	2AC
B ≫ 1,	B ≫ 1	AB ≪ 1	2R _T /BC [H1]	√(2R _T) [C1]			B ² C ² / 2	2 / A ² C ²
		AB ≫ 1	√(AR _T /ABC ²) [H0]	B / A			AB ³ C ⁴ / 4	

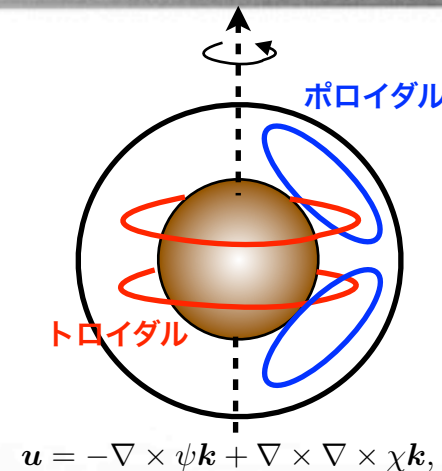
6種類の力学的平衡状態



$$A = \pi^2 \tau \Omega E_V, \quad B = 20\pi^2 E_H E_V$$

3.3 数値実験 | 数値モデル

- トロイダル・ポロイダル展開を利用
- 離散化
 - 水平：スペクトル法（切断波数 85）
 - 鉛直：中央差分法（層数 50）
 - 時間：古典的な 4 次のルンゲ・クッタ法 ($\Delta t = 6-5400$ s)
- 初期条件
 - 等温位静止大気
 - パラメータ領域で近傍のスーパーローテーション解
- 時間発展計算：定常 または 統計的平衡状態 になるまで



3.3 数値実験 | 実験設定

	A	B		
(a)	$\pi^2 \times 10^{-2}$	$2\pi^2 \times 10^{-2}$	(a)	$A \ll 1$
(b)	π^2	$2\pi^2 \times 10^{-2}$	(b)	$A \gg 1$
(c)	$\pi^2 \times 10^{-3}$	$2\pi^2$	(c)	$AB \ll 1$
(d)	$\pi^2 \times 10^{-1}$	$2\pi^2$	(d)	$AB \ll 1$

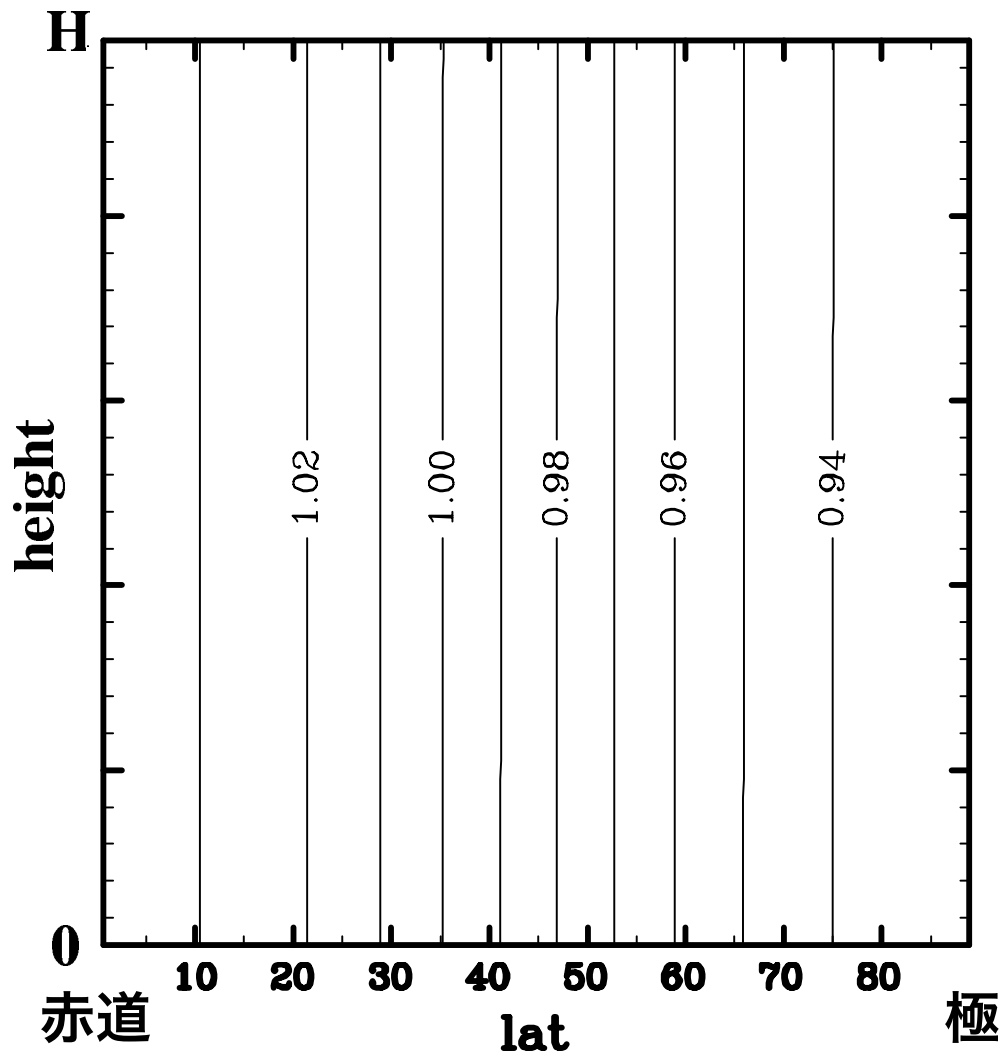
(a)-(d) の4通りのパラメータに対して **対応**

$R_T = 10^n$ ($n = -2, -1, 0, \dots, 5$) を計算

その他の無次元パラメータは固定 $\begin{cases} P_{rV} = \nu_V / \kappa_V = 1 \\ \Delta_H = 0.1 \end{cases}$

$$A = \pi^2 \tau \Omega E_V, B = 20 \pi^2 E_H E_V$$

3.3 数値実験 | 数値解の素朴な記述



素朴な物理量 (無次元)

等値線間隔

✓ 東西風 $\frac{u}{a\Omega}$

最大値の1/10

✓ 子午面流線関数

$$\frac{\Psi}{aH\Omega}$$

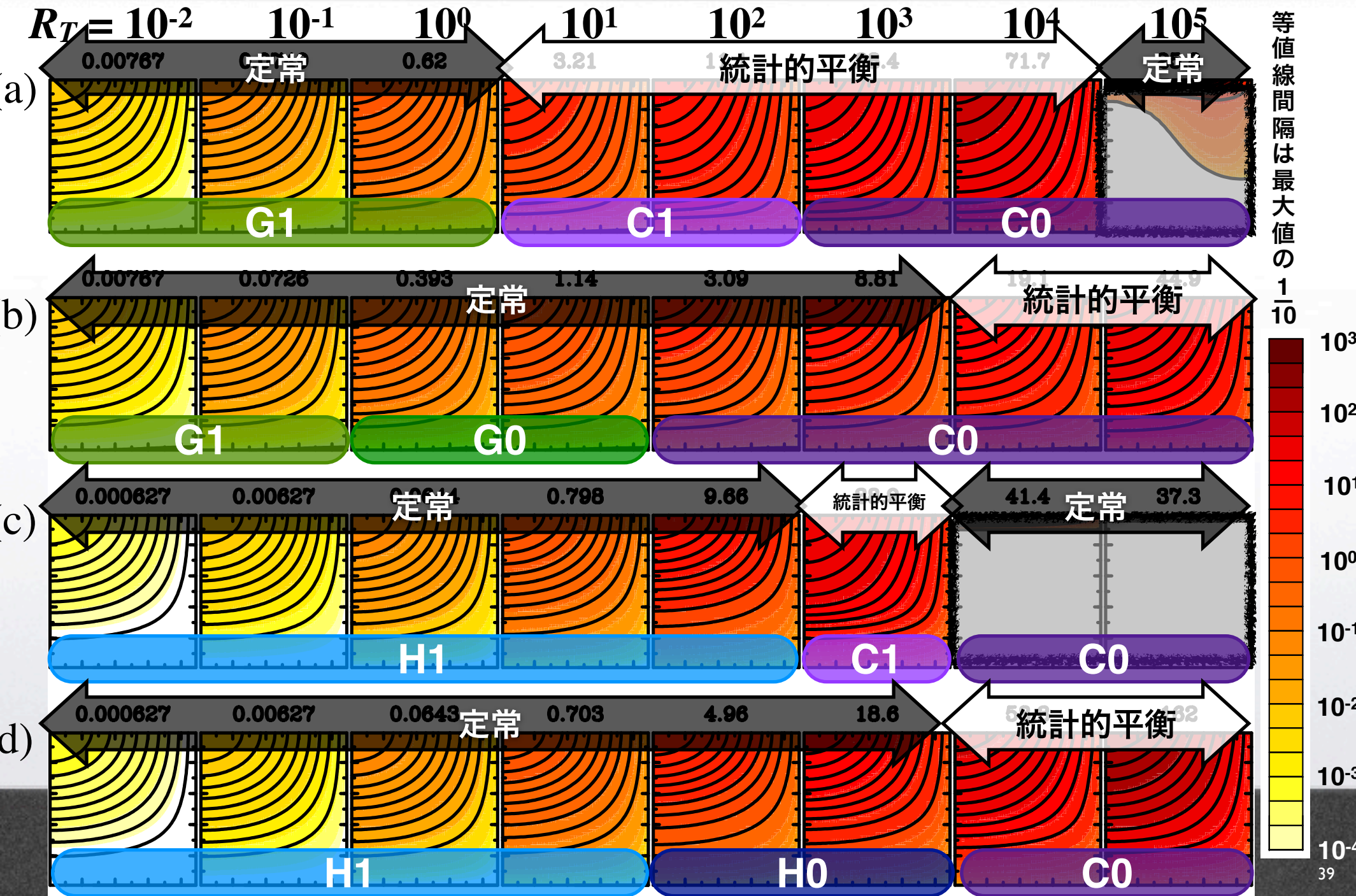
最大値の1/10

✓ 温位 $\frac{\theta}{\Theta_0}$

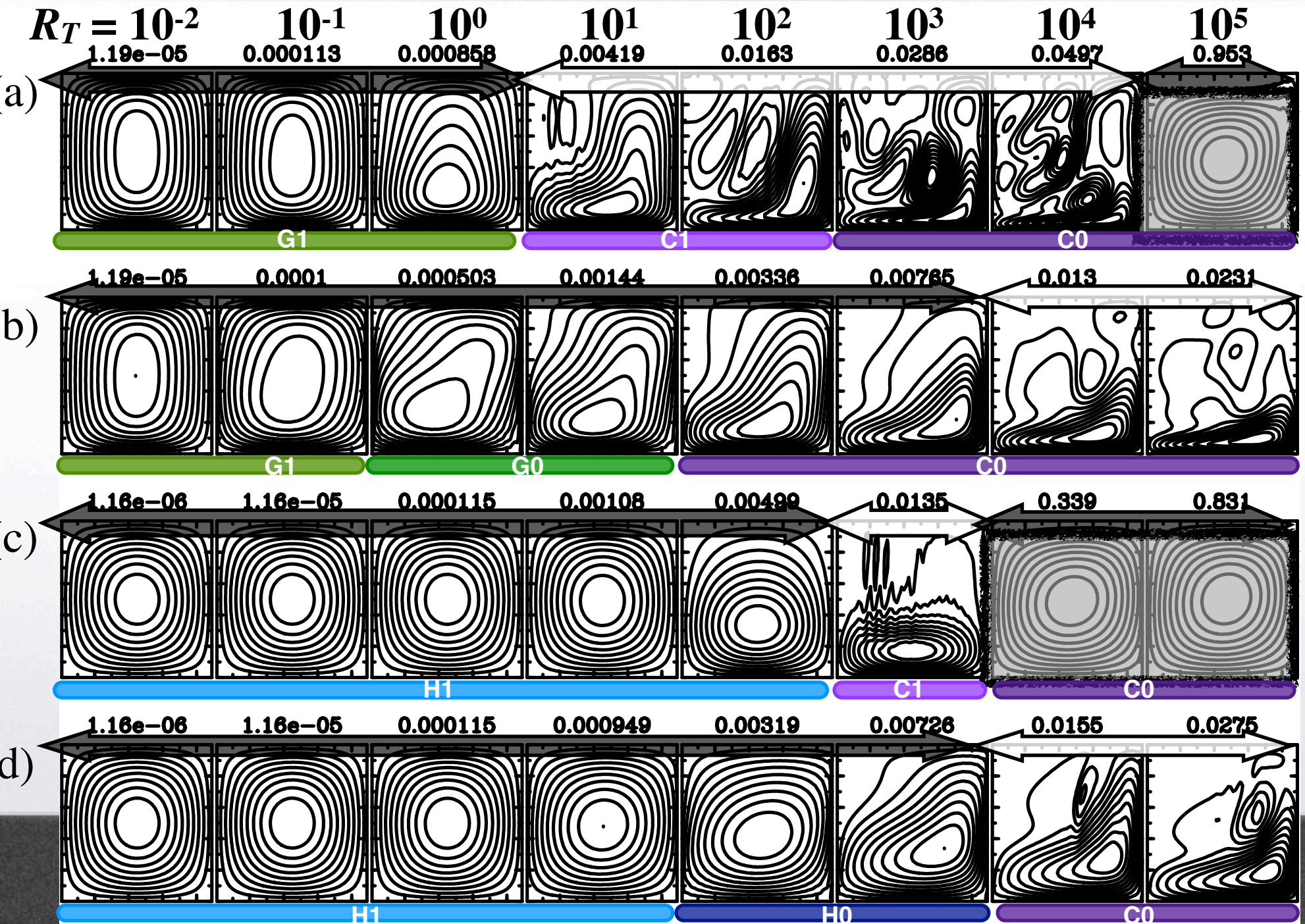
0.01

$$\left(v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, w = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \Psi \cos \phi \right)$$

無次元東西風

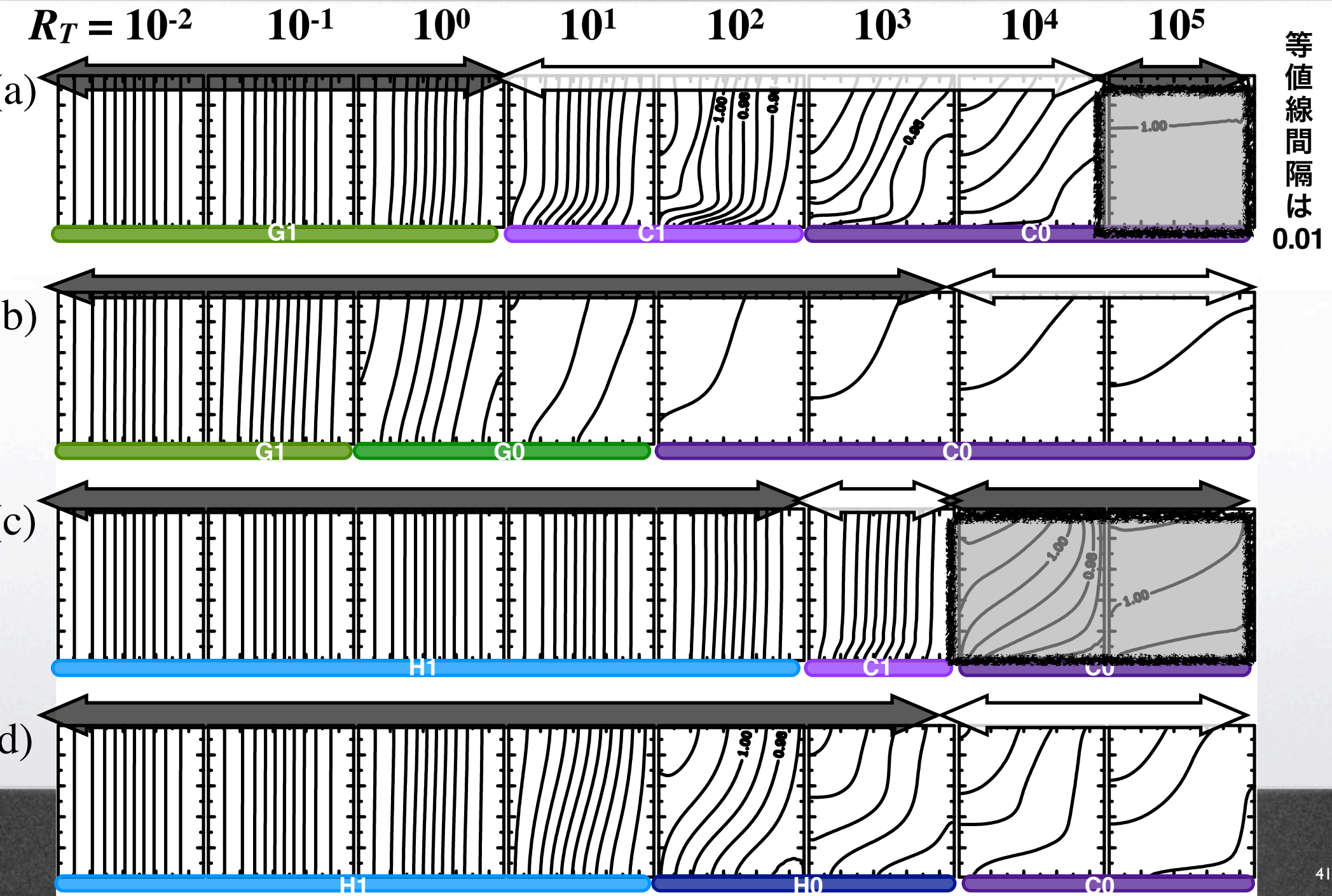


無次元流線関数



等値線間隔は最大値の $\frac{1}{10}$

無次元温度

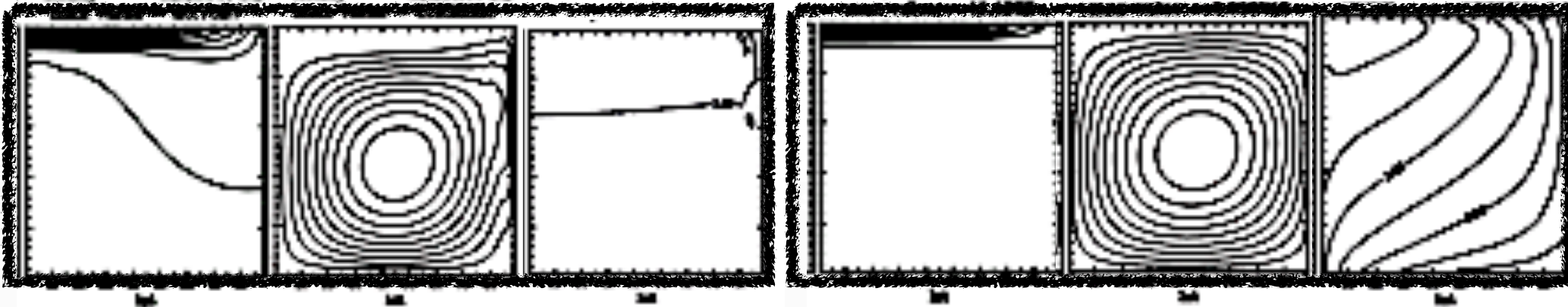


3.3 数値実験 | 多重安定平衡状態

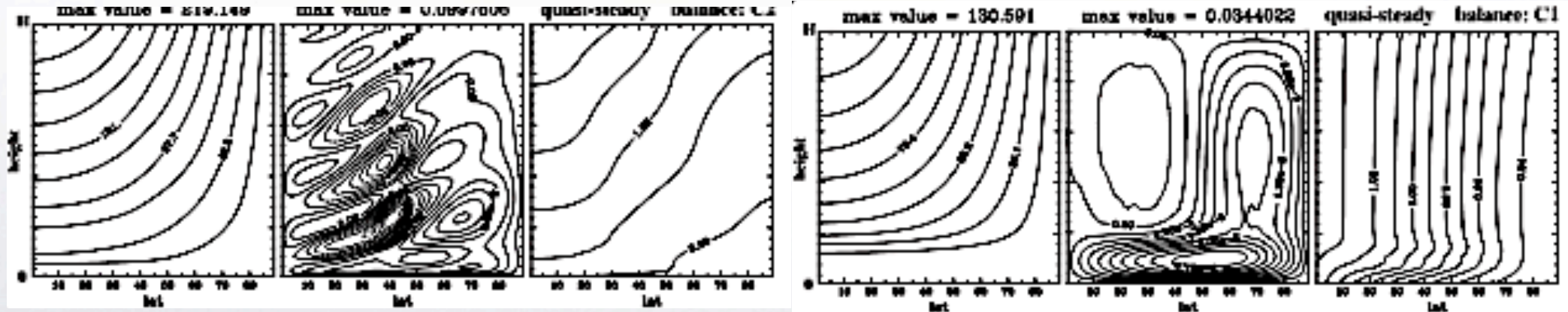
(a) $R_T = 10^5$

(c) $R_T = 10^4$

等温位静止大気から



近傍パラメータのスーパーローテーション解から



東西風

流線関数

温位

東西風

流線関数

温位

3.2 数値実験 | 理論的見積もりとの比較

スーパーローテーション強度

$$S_n = \frac{U}{a\Omega} \leftarrow \text{最上層の緯度平均東西風}$$

最上層の南北風でスケールしたロスビー数

$$R_{vTn} = \frac{V_T}{a\Omega} \leftarrow \text{最上層の緯度平均南北風}$$

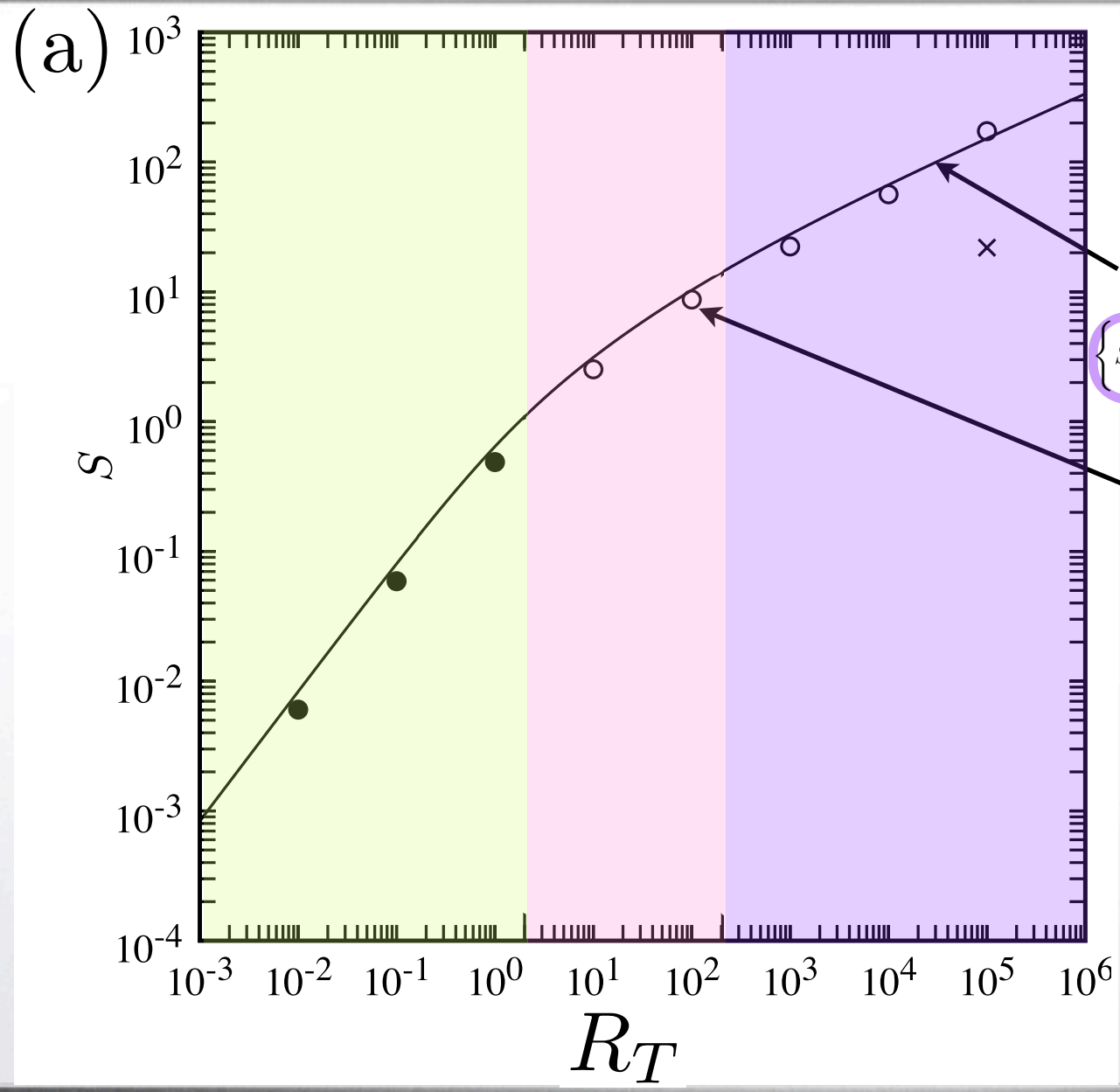
最下層の南北風でスケールしたロスビー数

$$R_{vBn} = \frac{V_B}{a\Omega} \leftarrow \text{最下層の緯度平均南北風}$$

鉛直平均した極・赤道間温位差の放射対流平衡温位の差に対する割合

$$\beta_n = \frac{\Delta\Theta}{\Theta_0\Delta_H} \leftarrow \text{鉛直平均した極・赤道間温位差}$$

スーパーローテーション強度 (S)

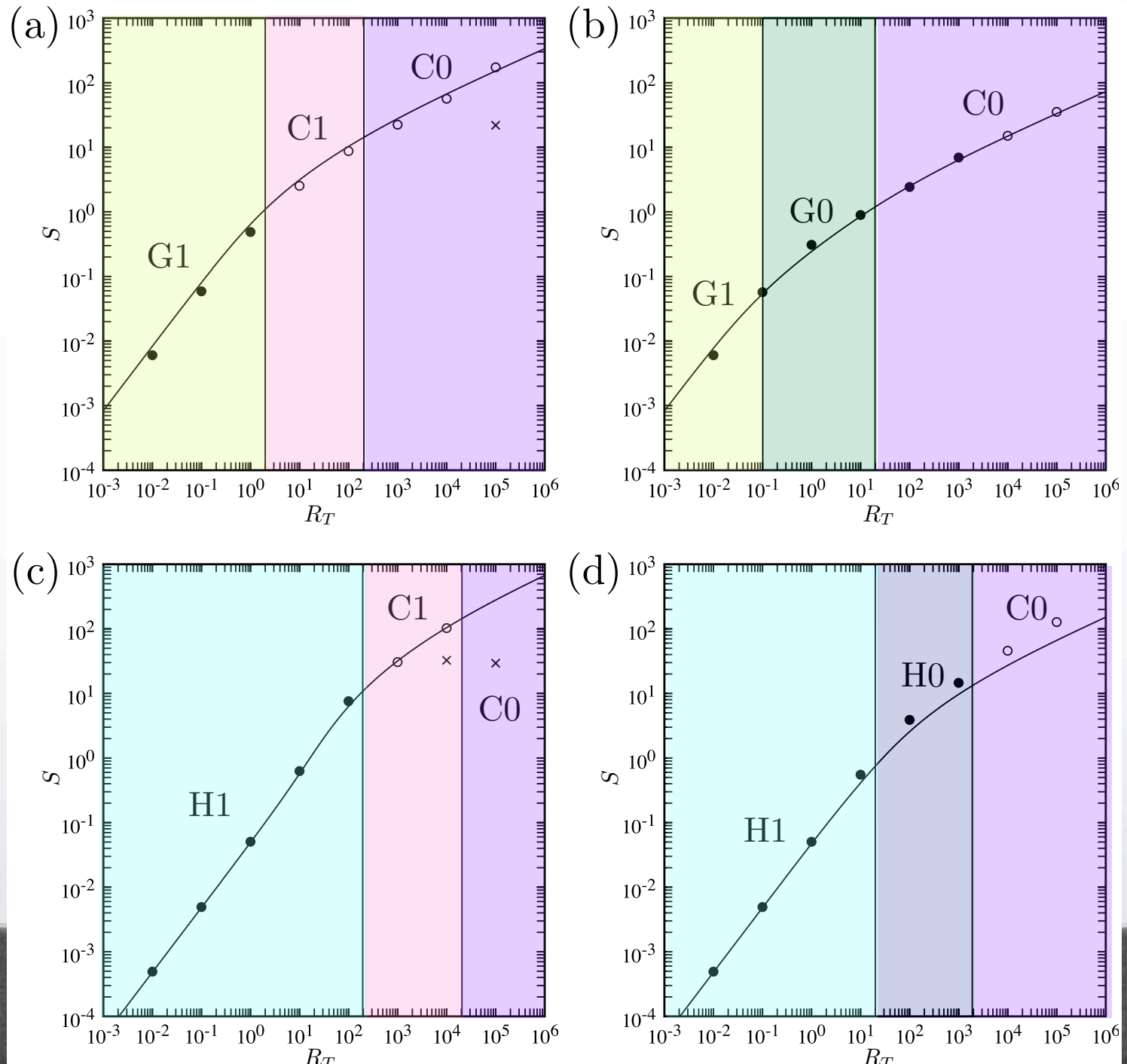


実線：5次方程式の解

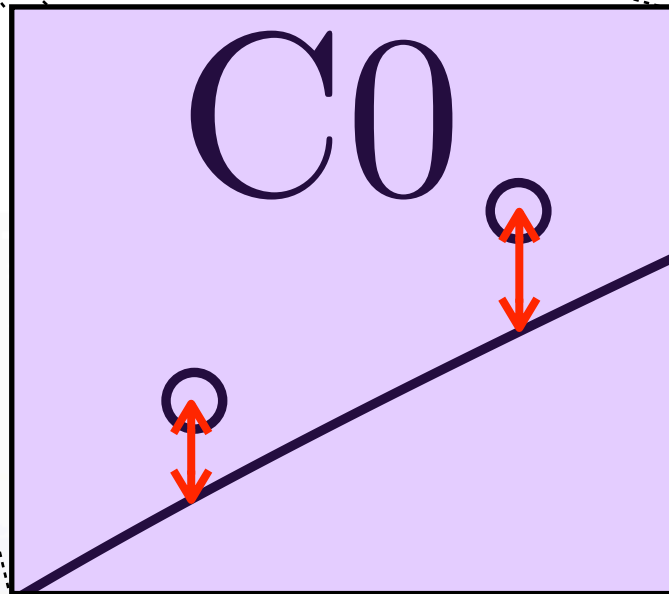
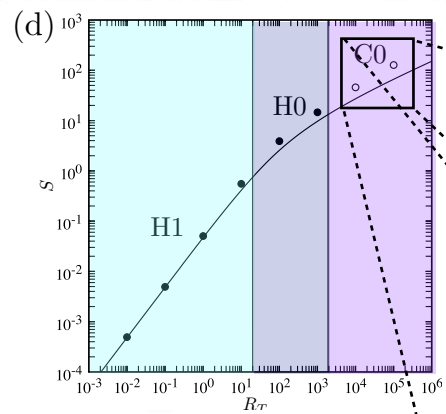
$$\left\{ S^2 + 2S + BS \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right\} \left\{ \frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right\} = 2R_T$$

- S_n ：数値解
- 定常状態
 - 統計的平衡状態
 - × 浅いジェット

スーパーローテーション強度 (S)



相対誤差



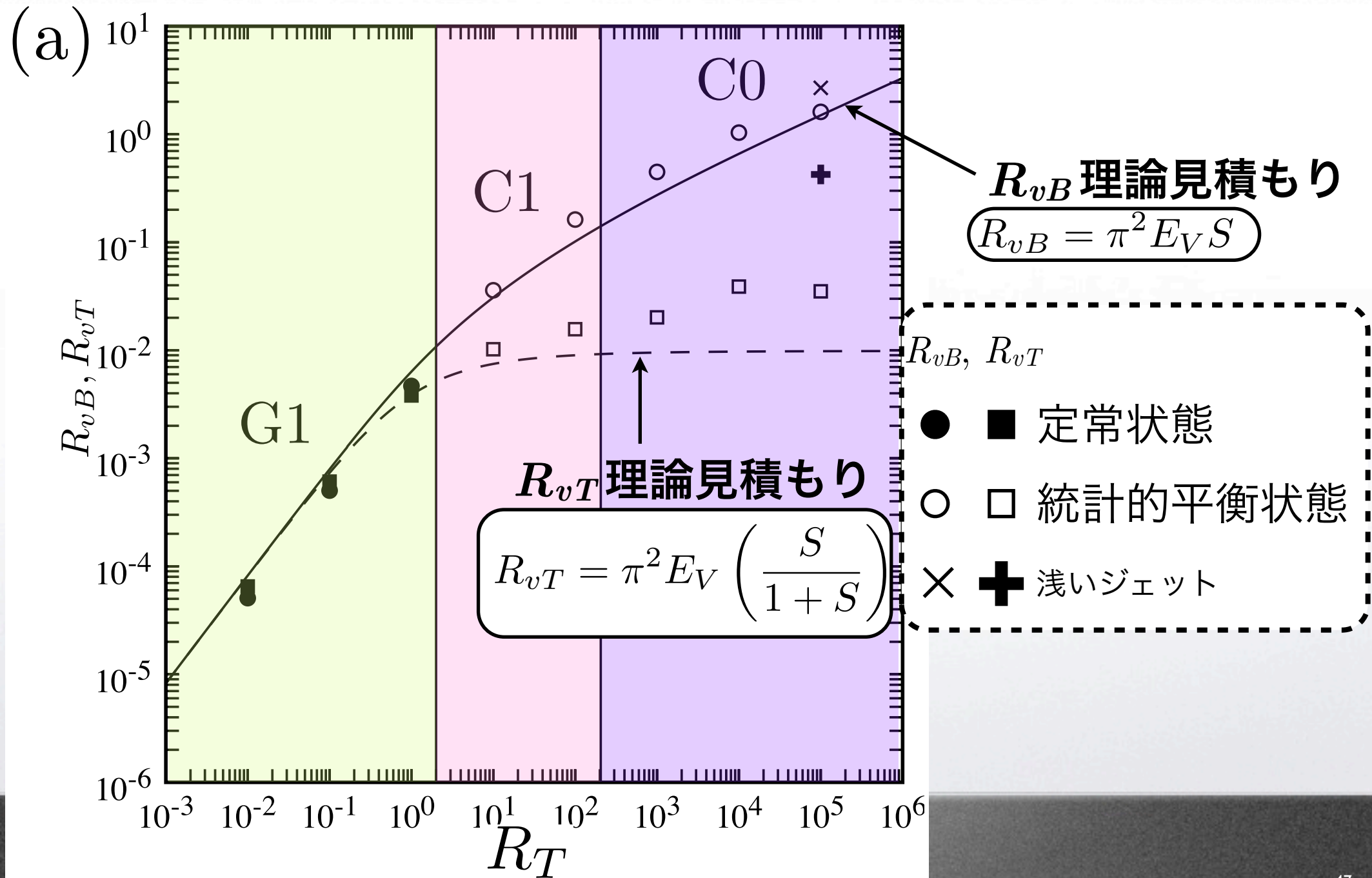
$$\text{相対誤差 } e_r \equiv \frac{S_t - S_n}{S_n}$$

計算した範囲では... 定常状態 $-0.34 \leq e_r \leq 0.38$

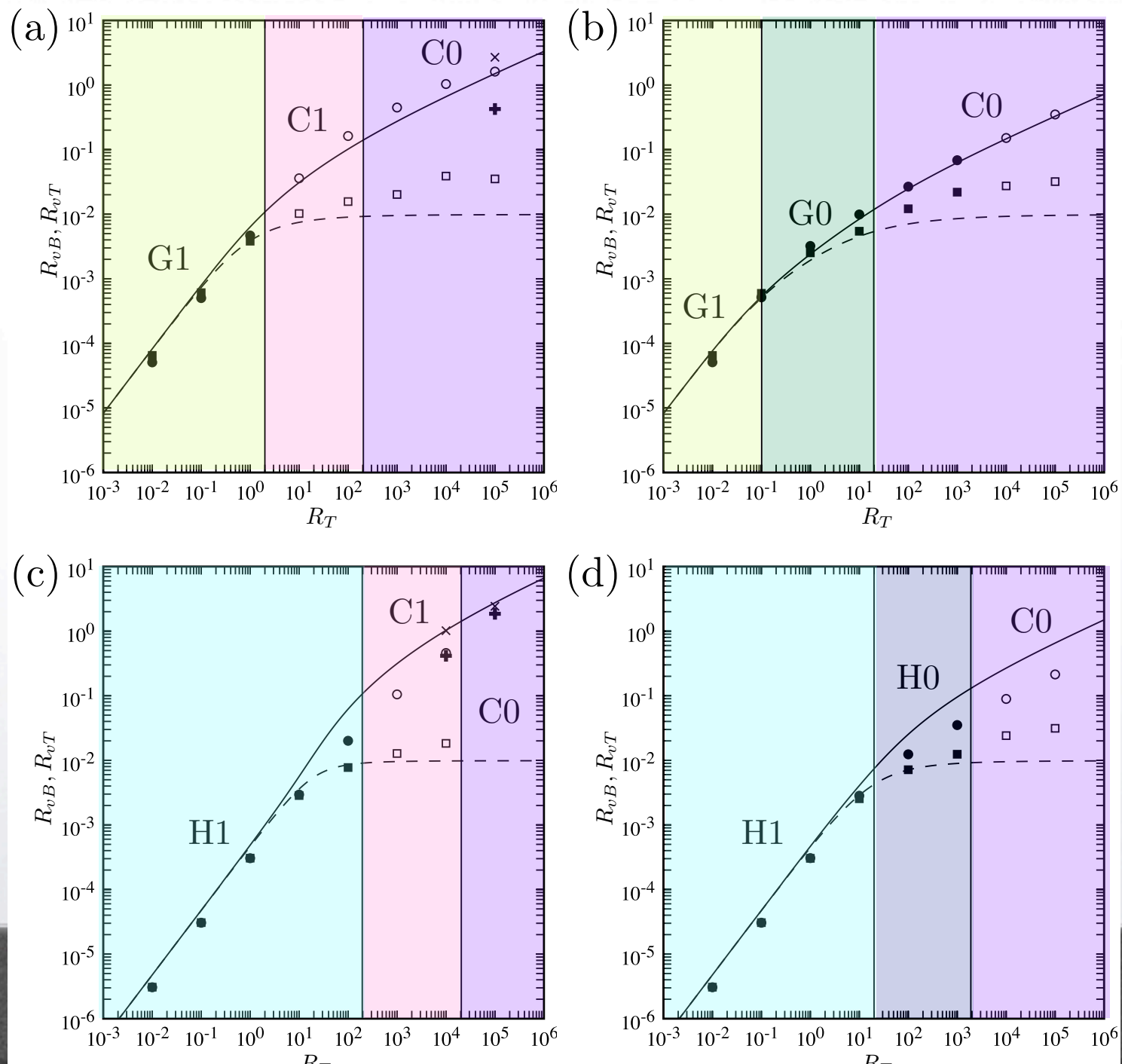
統計的平衡状態 $-0.48 \leq e_r \leq 0.23$

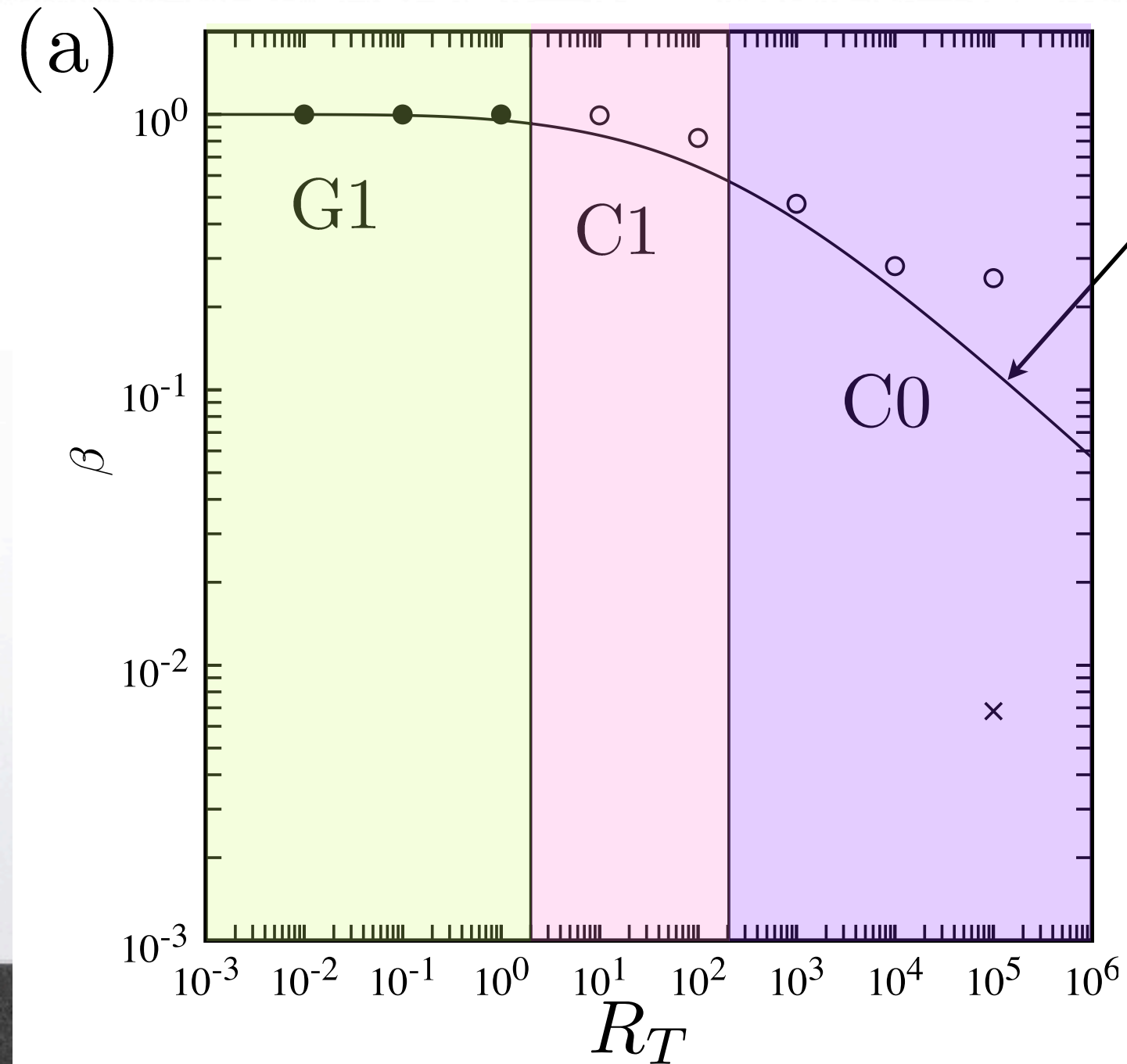
ただし、浅いジェットの場合は除く

R_{vB}, R_{vT}



R_{vB}, R_{vT}

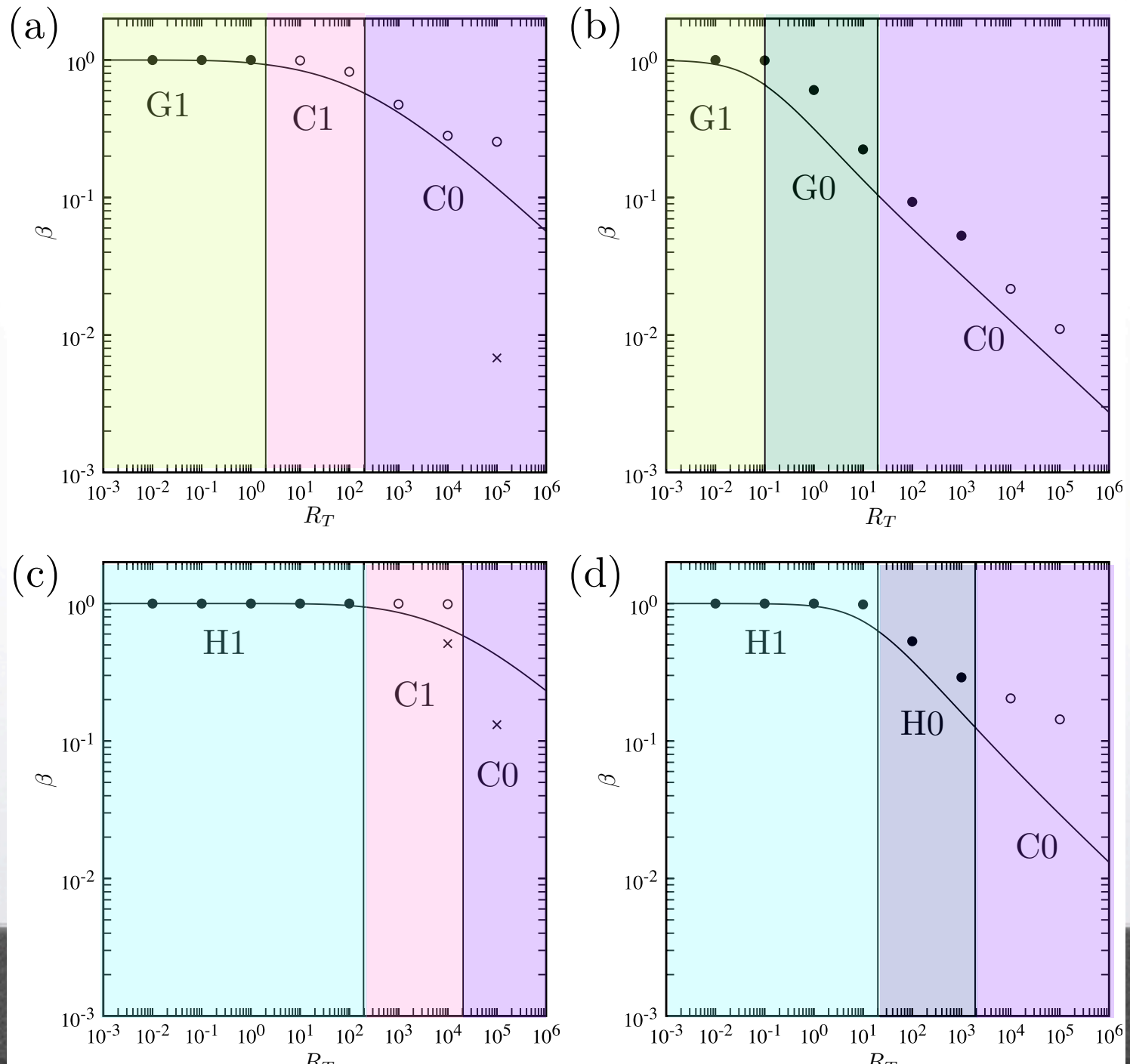


β 

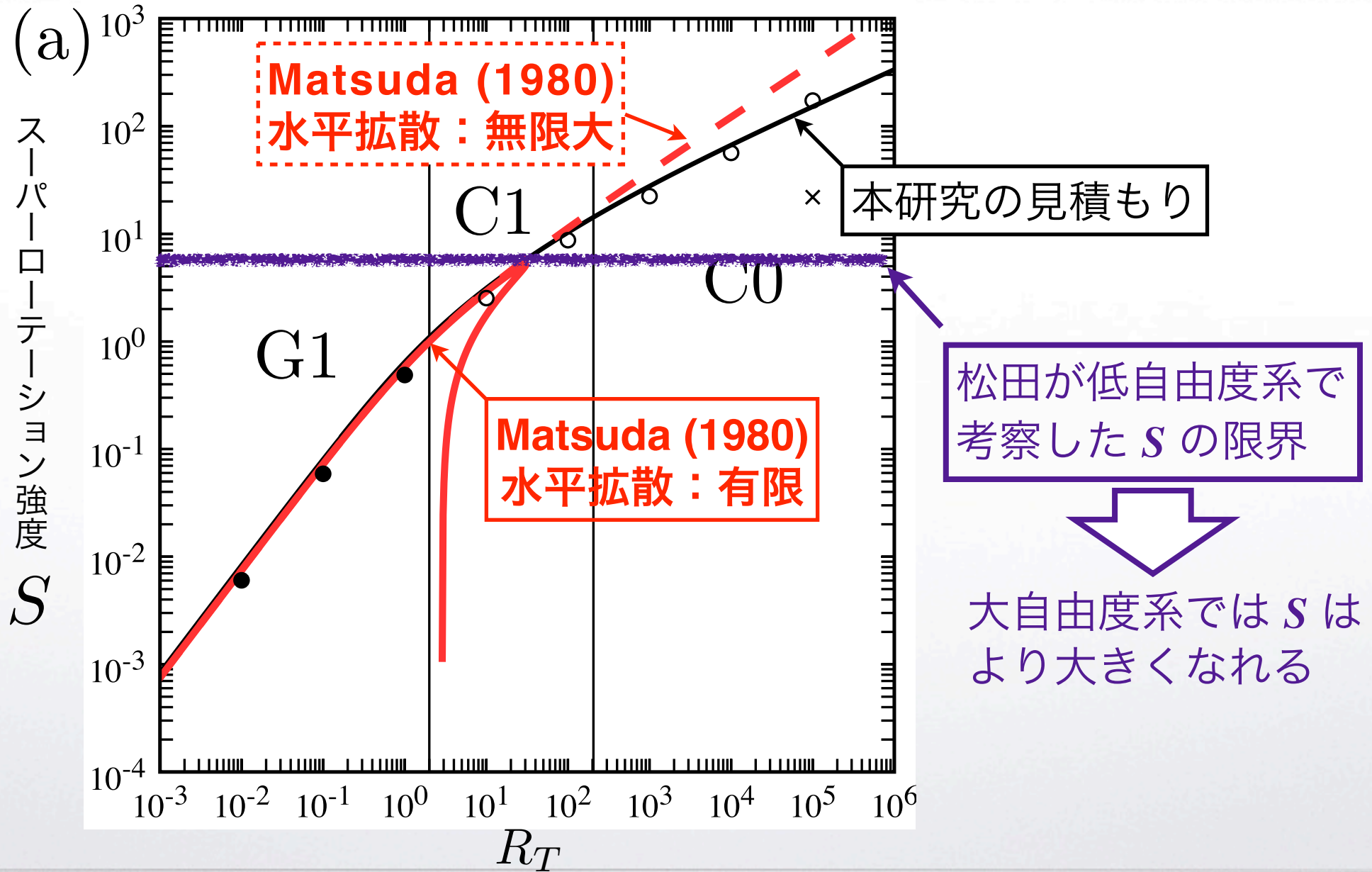
β 理論見積もり

$$\beta = \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right]^{-1}$$

β の比較



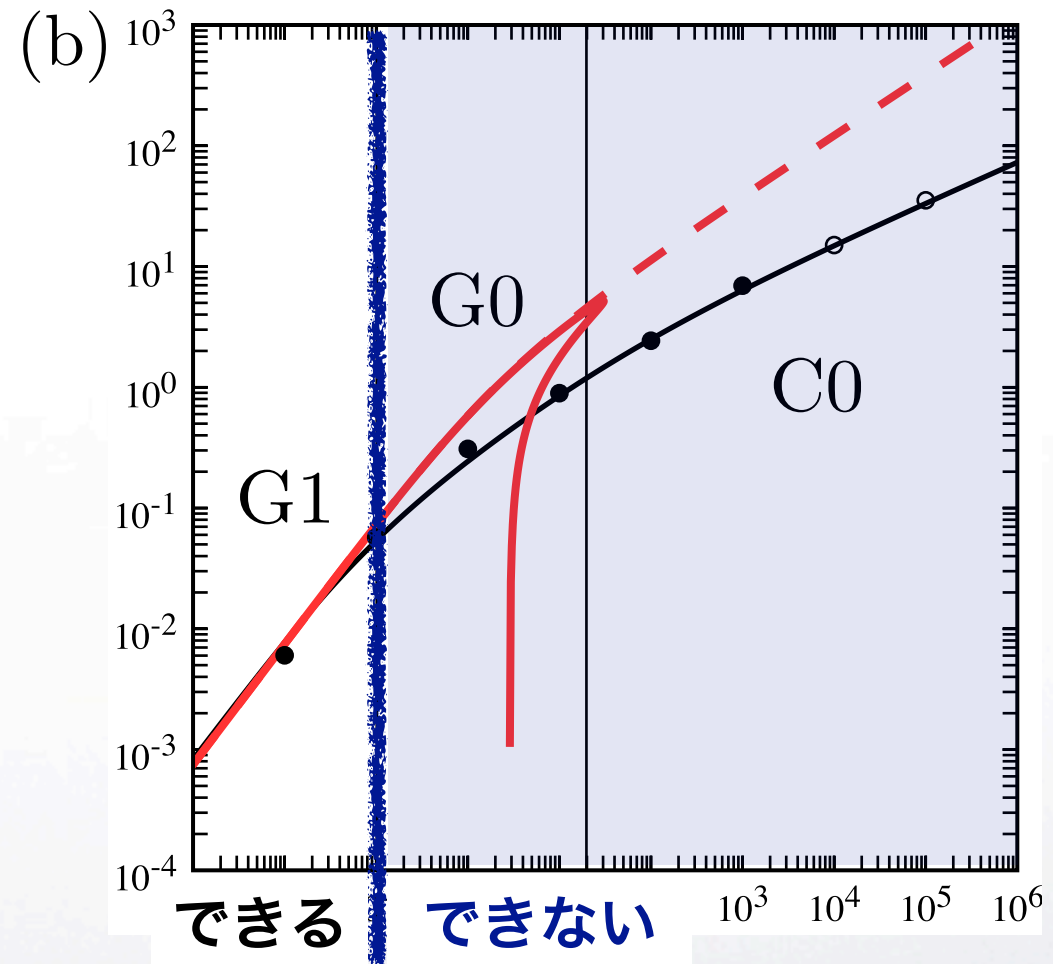
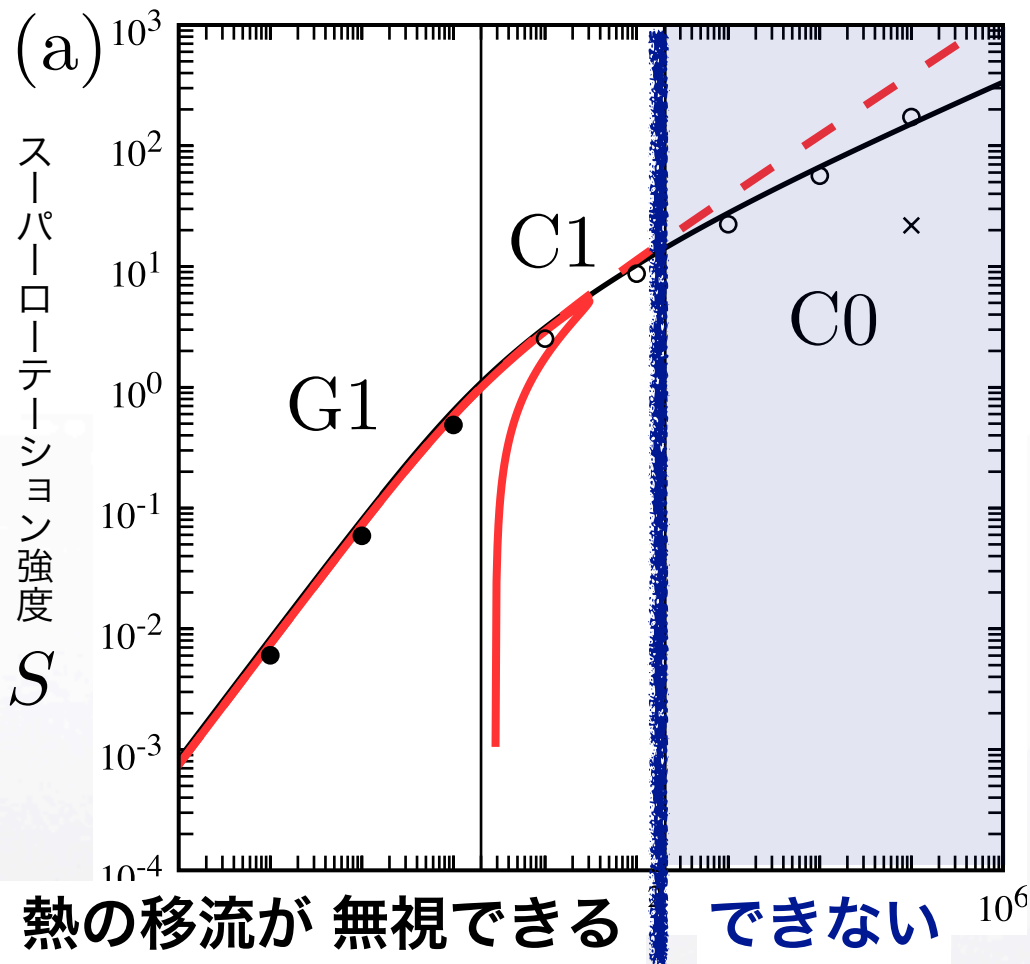
3.4 考察 | Matsuda (1980) との比較



数値解

●：定常状態 ○：統計的平衡状態 ×：浅いジェット

3.4 考察 | Matsuda (1980) との比較



Matsuda (1980) は南北温度差を固定していた → 整合的

本研究のまとめ

スーパーローテーション・・・ギーラシメカニズムの理解を深める

理論モデル | 連立4元代数方程式

理想化された大気の基本方程式系*

S, R_{vB}, R_{vT}, β

空間依存性を仮定 ・ 積分/スケーリング

時間発展計算

5次方程式 $S(A, B, R_T)$

正の解

近似

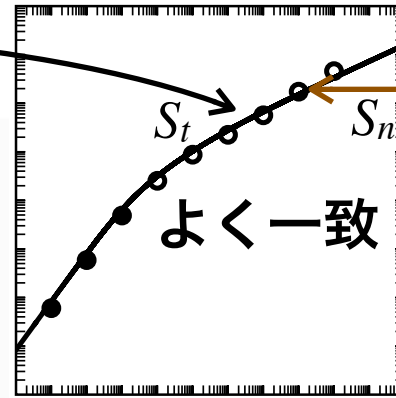
3次方程式

近似

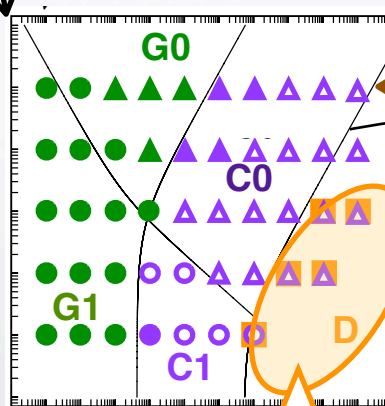
解型を定義

境界を表す式

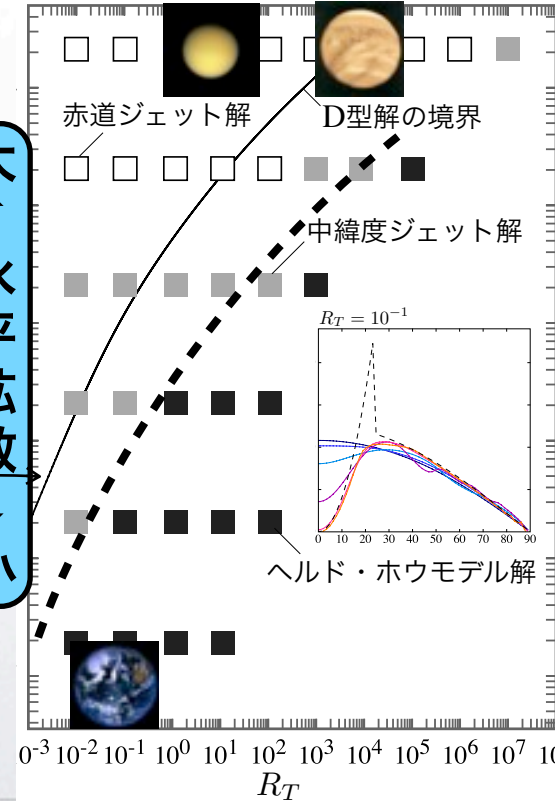
$R_T(S, A, B)$



レジームダイアグラム



理論モデルの有効範囲外：D型解



簡単な近似式			S_1	S_2	S_3
(a)	$B \ll 1$	$A \ll 1$	R_T	$\sqrt{2R_T}$ C1	$\left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}}$ C0
(b)		$A \gg 1$	G1	$\sqrt{\frac{2R_T}{AC}}$ G0	
(c)	$B \gg 1$	$AB \ll 1$	$\frac{2R_T}{BC}$	$\sqrt{2R_T}$ C1	
(d)		$AB \ll 1$	H1	$\sqrt{\frac{2R_T}{ABC^2}}$ H0	

* 自転軸対称な乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系 + 強い水平拡散₅₃

予備資料

第7章 本研究のまとめ

スーパーローテーション・・・ギーラシメカニズムの理解を深める

理論モデル | 連立4元代数方程式

理想化された大気の基本方程式系*

S, R_{vB}, R_{vT}, β

空間依存性を仮定 • 積分/スケーリング

時間発展計算

5次方程式 $S(A, B, R_T)$

正の解

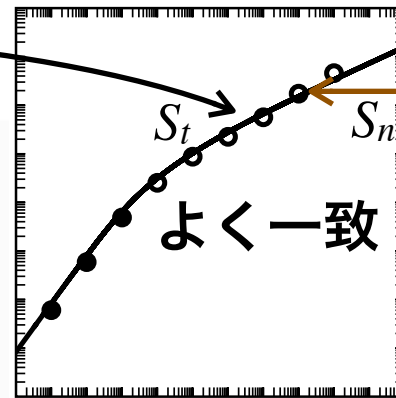
近似

3次方程式

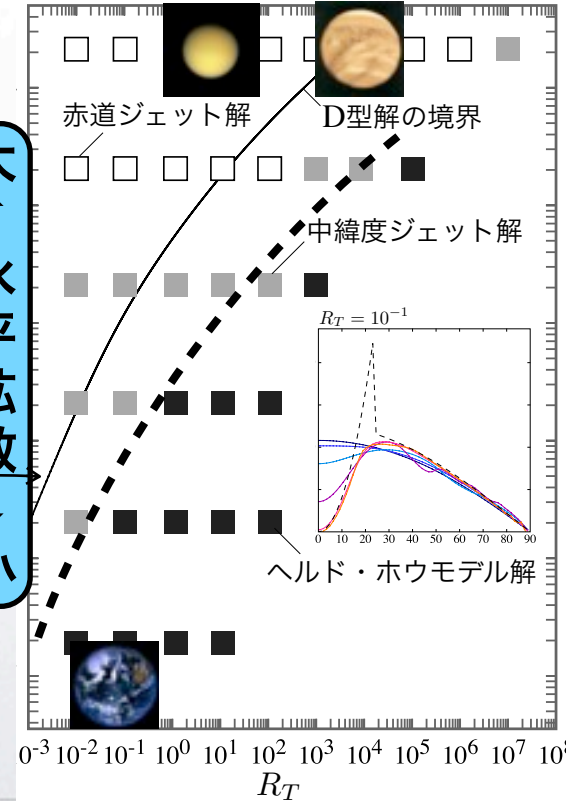
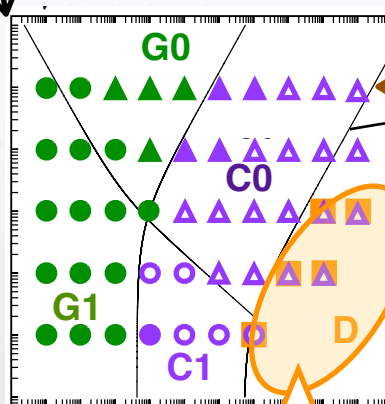
近似

解型を定義

境界を表す式



レジームダイアグラム

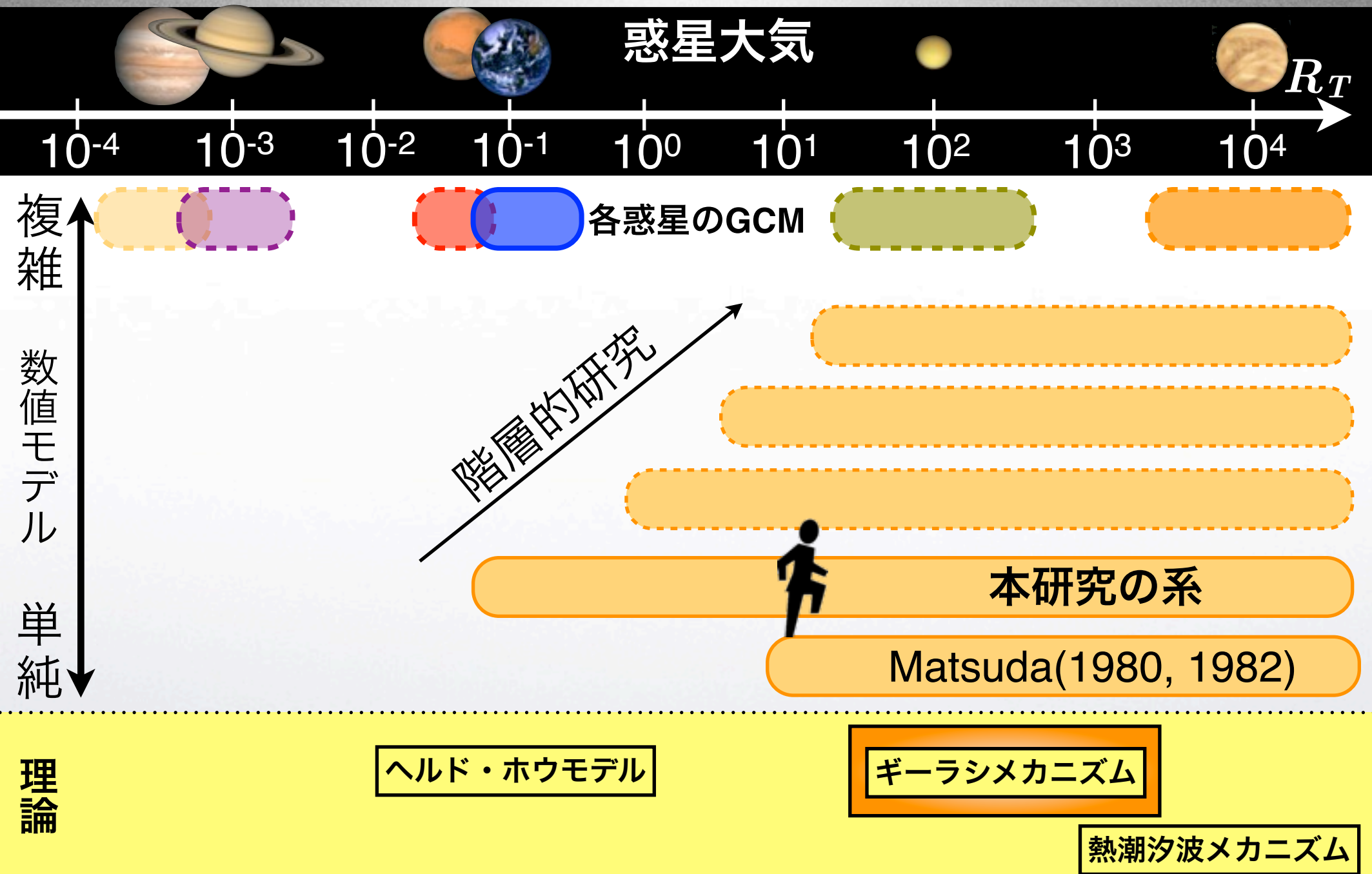


理論モデルの有効範囲外：D型解

簡単な近似式			S_1	S_2	S_3	
(a)	$B \ll 1$	$A \ll 1$	R_T	$\sqrt{2R_T}$ C1	$\left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}}$	
(b)		$A \gg 1$	G1	$\sqrt{\frac{2R_T}{AC}}$ G0		
(c)	$B \gg 1$	$AB \ll 1$	$\frac{2R_T}{BC}$	$\sqrt{2R_T}$ C1		C0
(d)		$AB \ll 1$	H1	$\sqrt{\frac{2R_T}{ABC^2}}$ H0		

* 自転軸対称な乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系 + 強い水平拡散₇₅

6.3 惑星大気大循環論における位置づけ



複雑
↑
数値モデル
↓
単純

惑星大気

R_T

10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2 10^3 10^4

各惑星のGCM

階層的研究

本研究の系

Matsuda(1980, 1982)

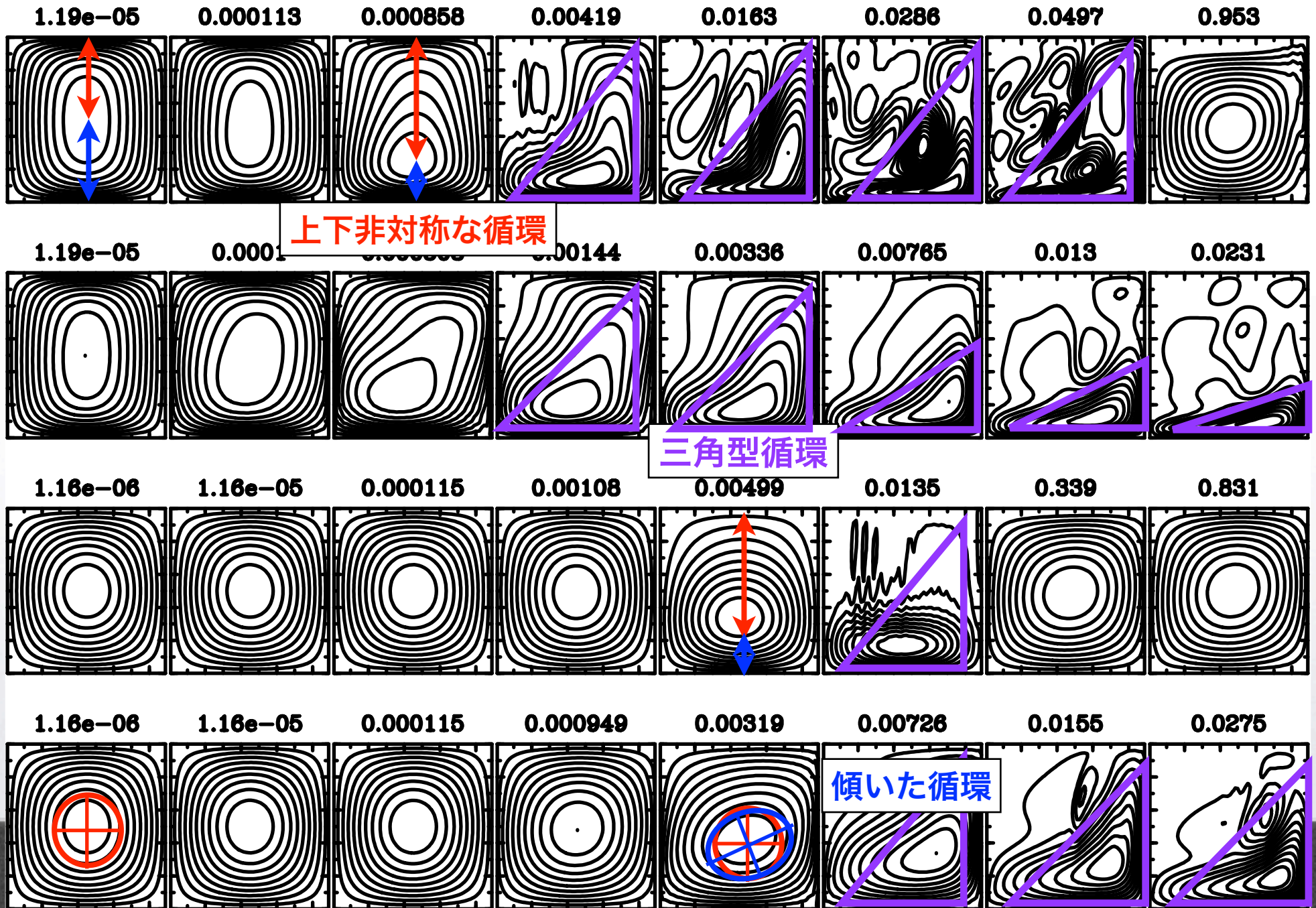
ヘルド・ハウモデル

ギーラシメカニズム

熱潮汐波メカニズム

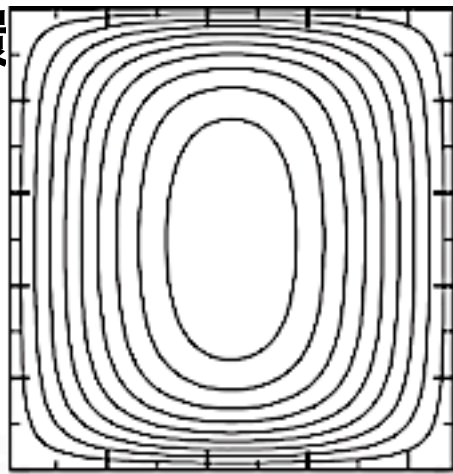
理論

3.4 考察 | 子午面循環パターンの変形



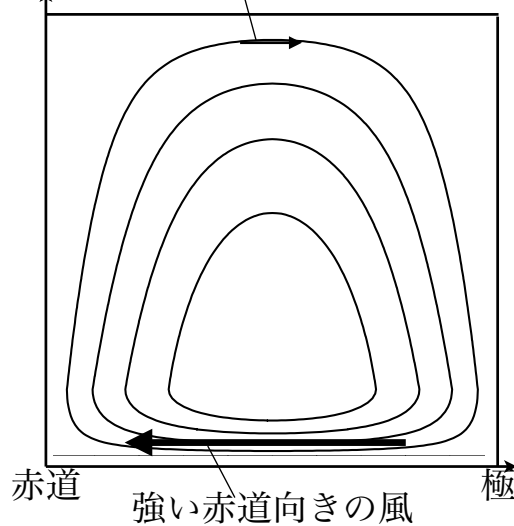
3.4 考察 | 子午面循環パターンの変形

変形前の循環



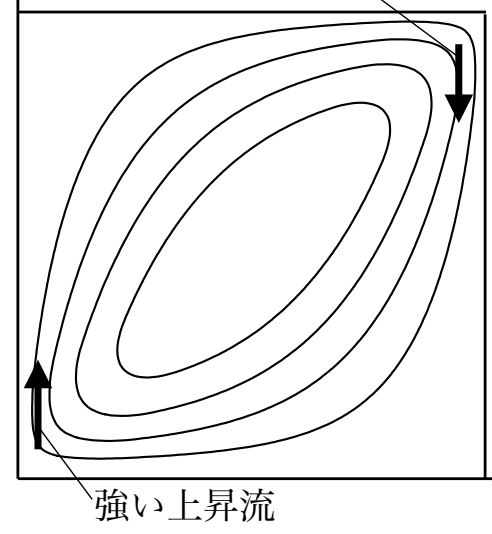
上下非対称な循環

弱い極向きの風

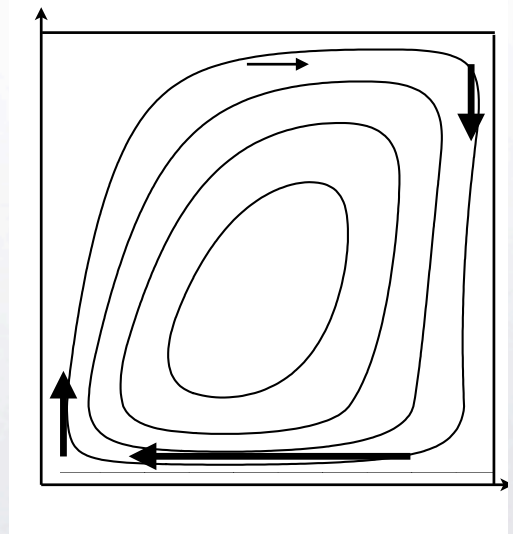


傾いた循環

強い下降流



三角型循環



+

=

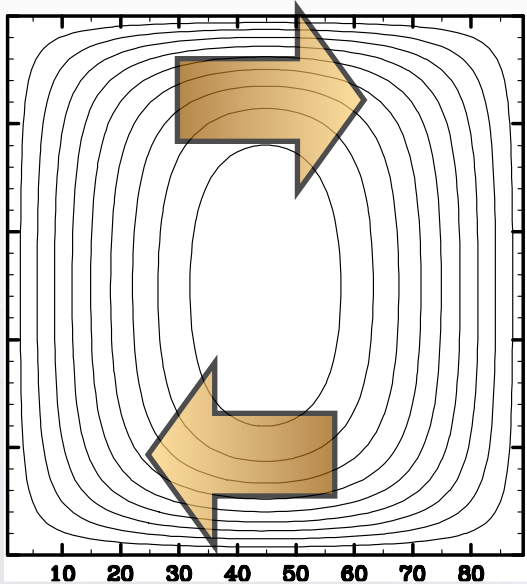
上下非対称化

$S \ll 1$ のうちは...

$$R_{vB} = \pi^2 E_V S,$$

$$\rightsquigarrow R_{vT} = \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right),$$

$$V_B \approx V_T$$



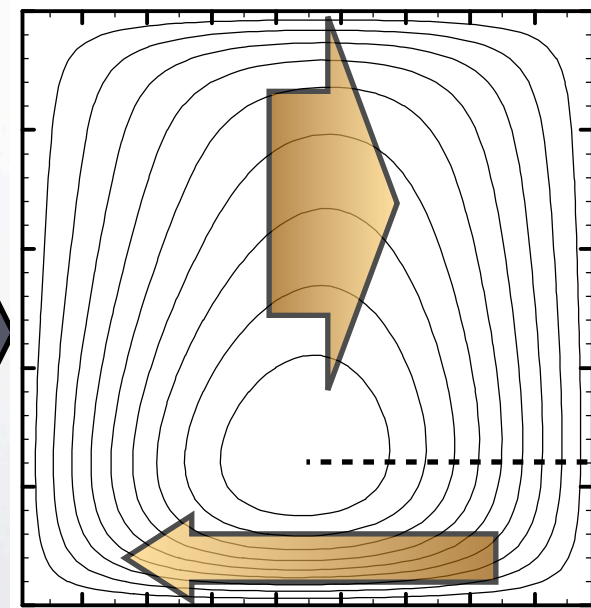
$S > 1$ になると...

$$R_{vB} > \pi^2 E_V$$

$$R_{vB} > R_{vT}$$

$$V_B > V_T$$

$$R_{vB} > \pi^2 E_V$$



極向き

赤道向き

(∴連続の式)

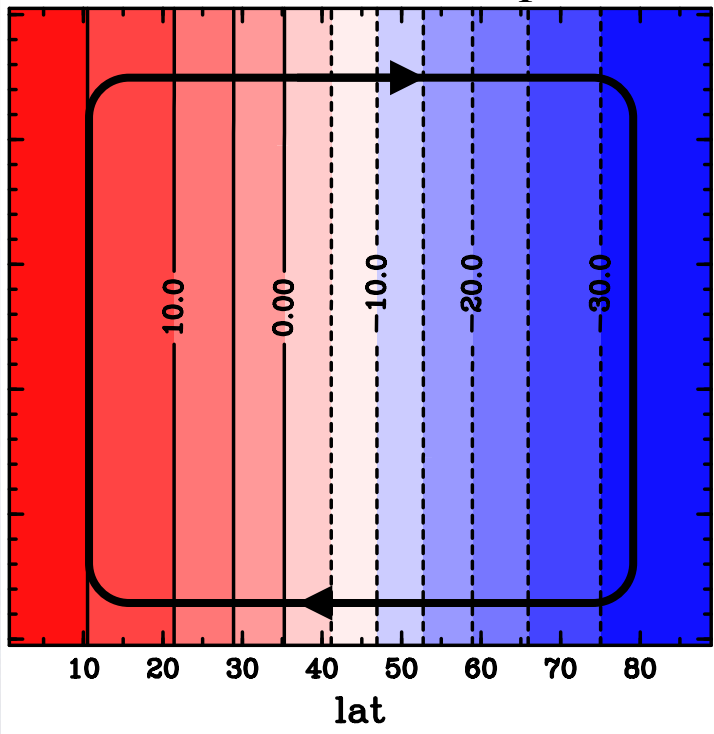
傾斜

循環時間 \gg ニュートン冷却の緩和時間

$$\frac{a}{V_B} \gg \tau$$

温位場

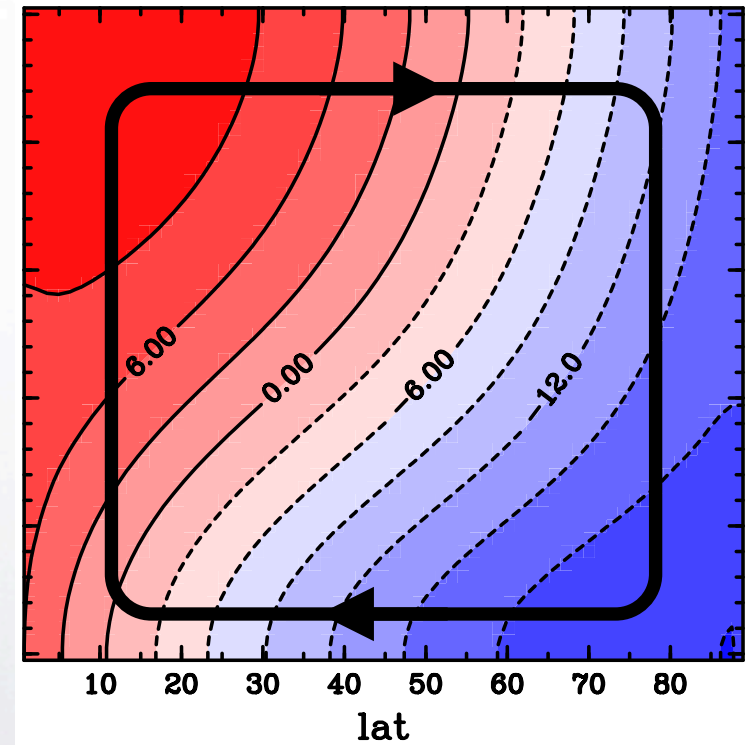
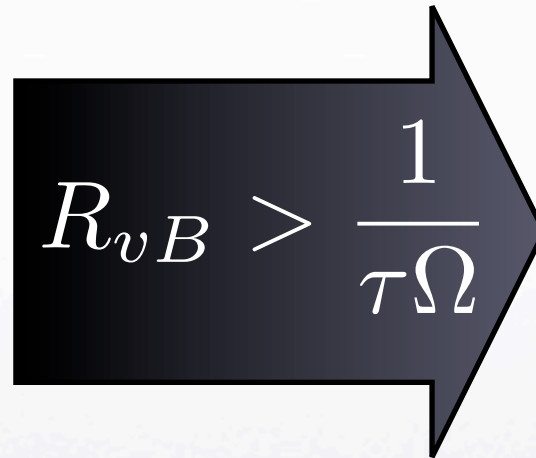
$$R_T = 10^{-2}$$



循環時間 \leq ニュートン冷却の緩和時間

$$\frac{a}{V_B} < \tau$$

$$R_T = 10^2$$

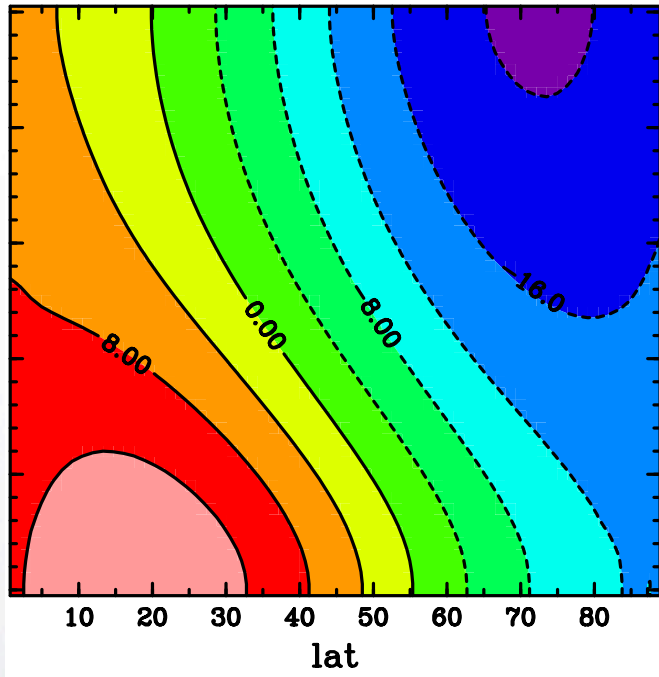


$$A \sim 1, B \sim 10$$

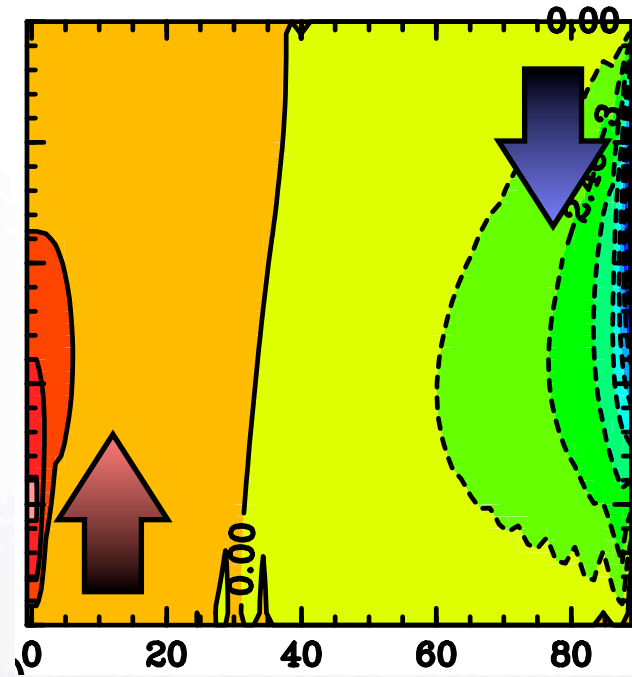
$$R_{vB} = \frac{V_B}{a\Omega}$$

傾斜

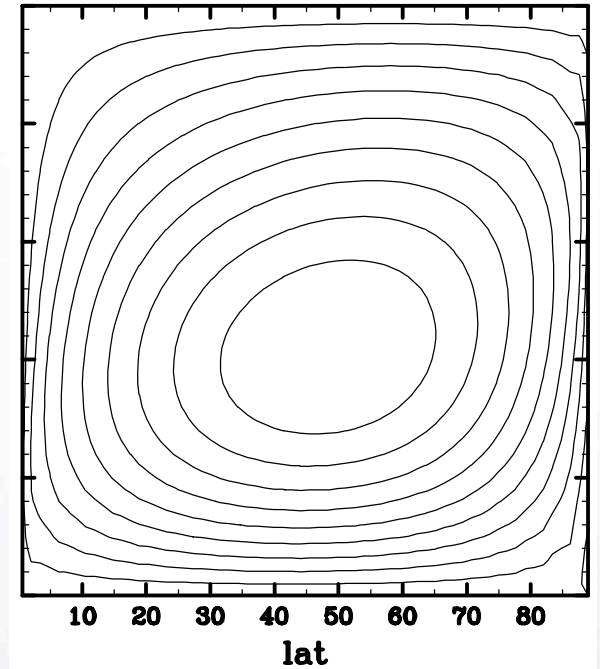
$$\frac{(\theta - \theta_e)}{\tau}$$



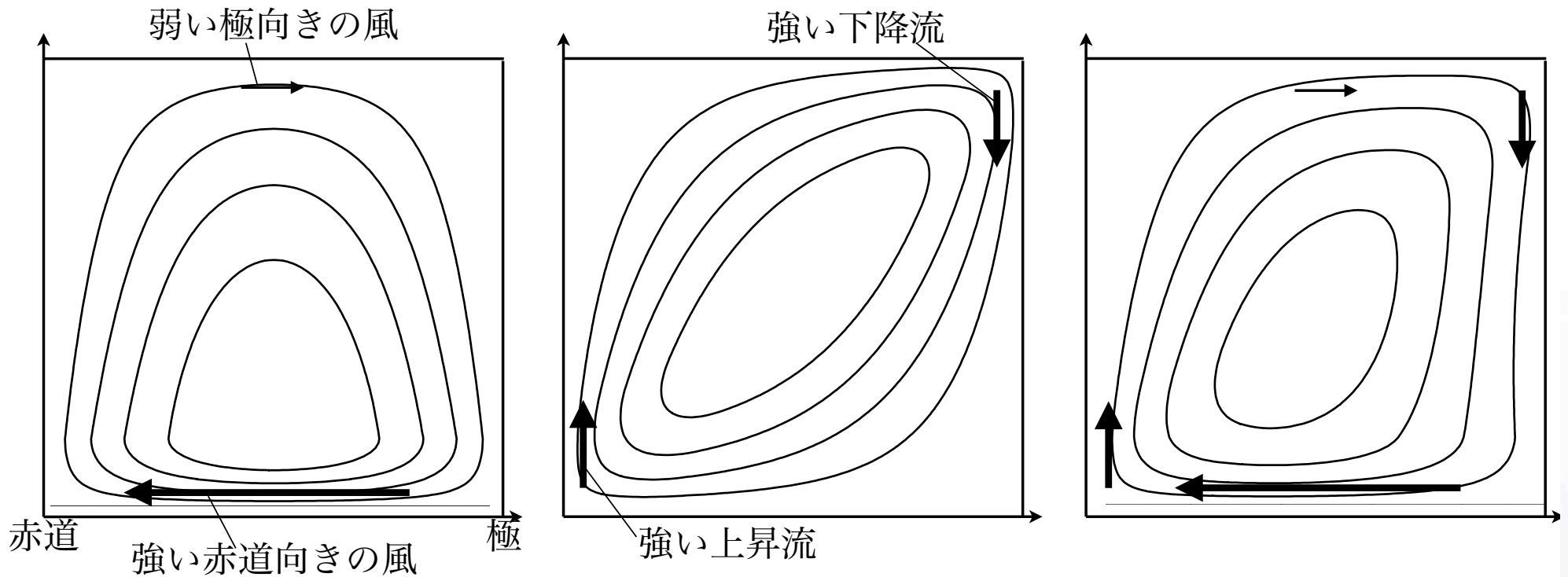
w



子午面循環



三角型循環



上下非対称な循環

+

傾いた循環

=

三角型循環

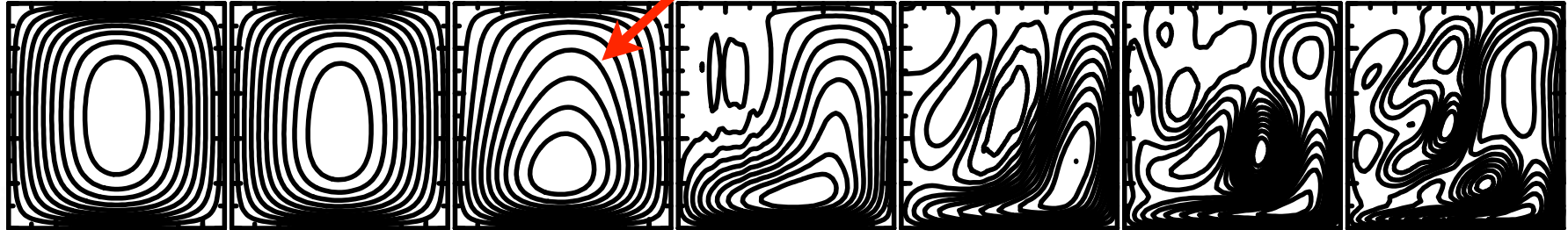
$$R_{vB} > \pi^2 E_V$$

$$R_{vB} > \frac{1}{\tau\Omega}$$

右の条件を両方
満たすとき

数値解の振る舞い

(a) $\pi^2 E_V = 10^{-2} < \frac{1}{\tau\Omega} = 10^{-1}$ 上下非対称な循環が先



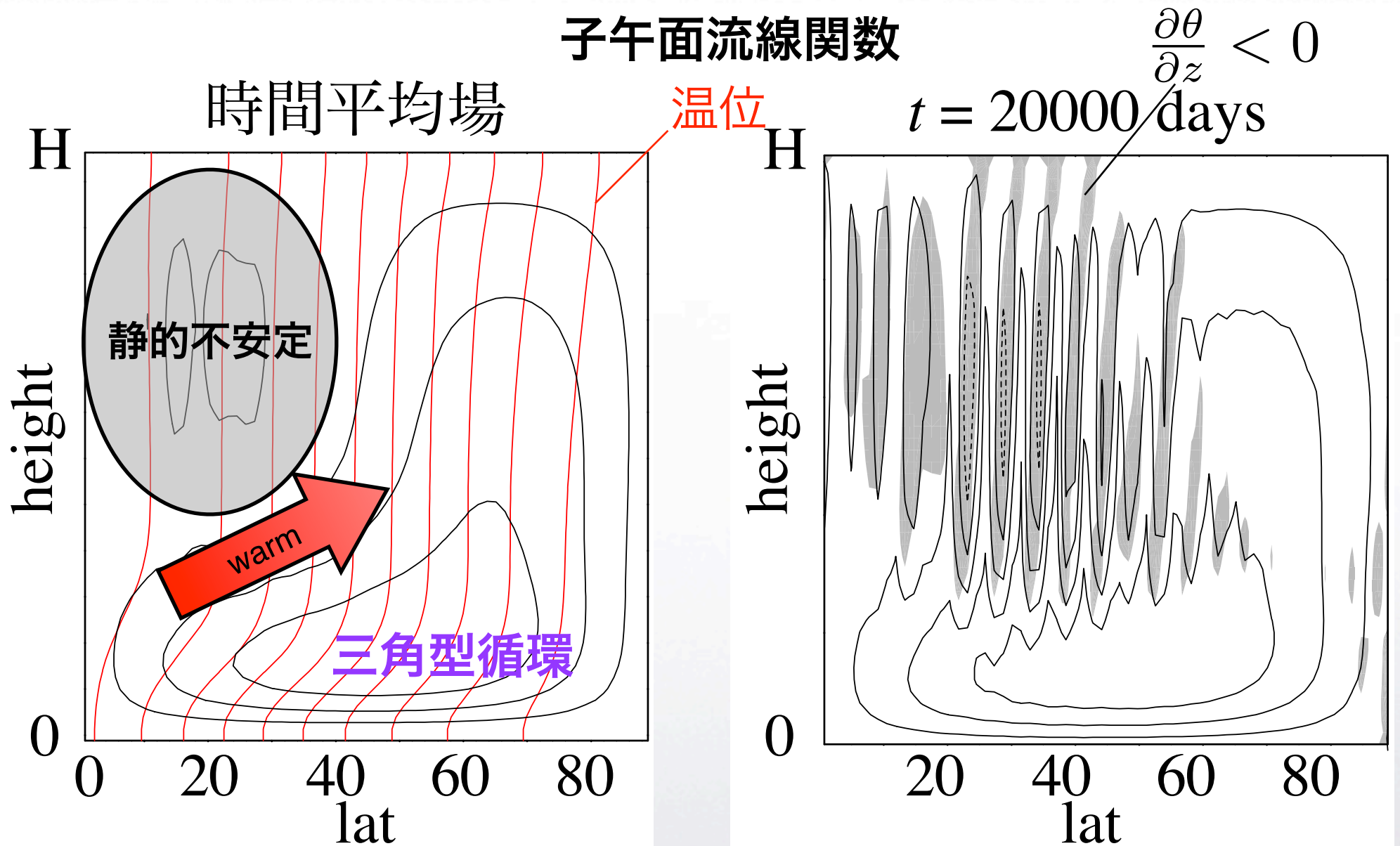
$R_{vB} =$ 5.1×10^{-5} 5.0×10^{-4} 4.7×10^{-3} 3.6×10^{-2} 0.16 0.45 1.0

(b) $\pi^2 E_V = 10^{-2} > \frac{1}{\tau\Omega} = 10^{-3}$ 傾いた循環が先



$R_{vB} =$ 5.1×10^{-5} 5.2×10^{-4} 3.2×10^{-3} 9.9×10^{-3} 2.7×10^{-2} 6.8×10^{-2} 0.15

3.4 考察 | 静的不安定



$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, R_T = 10^1$$