(5.14) 式導出

計算の都合上必要なベクトル解析の公式は以下のとおりである。

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} \qquad \text{(ap5.14.0.1)}$$

とくに、$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ の場合、

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}{2}\right)-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} \qquad \text{(ap5.14.0.2)}$$

また、

$$\boldsymbol{A}\cdot\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}=0 \qquad \text{(ap5.14.0.3)}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\{\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\}=-\boldsymbol{B}\cdot\{\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\} \qquad \text{(ap5.14.0.4)}$$

である。

次に、導出に必要な方程式は

$$\frac{Du}{Dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+fv+F_{rx} \qquad (5.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}-fu+F_{ry} \qquad (5.2)$$

$$\frac{Dw}{Dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}+g\frac{\theta}{\theta_0}+F_{rz} \qquad (5.3)$$

および、

$$\frac{\overline{D}\overline{u}}{Dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+f\overline{v}-\left[\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}\right]+\overline{F}_{rx} \qquad (5.9)$$

$$\frac{\overline{D}\overline{v}}{Dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}-f\overline{u}-\left[\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial z}\right]+\overline{F}_{ry} \qquad (5.10)$$

$$\frac{\overline{D}\overline{w}}{Dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+g\frac{\overline{\theta}}{\theta_0}-\left[\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w'w'}}{\partial z}\right]+\overline{F}_{rz} \qquad (5.11)$$

である。平均化する前の方程式系と平均化した後の方程式系をそれぞれベクトル形式で表記すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}'\right)+\left(\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}'\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}'\right)=-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\left(\overline{p}+p'\right)+f\boldsymbol{k}\times\left(\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}'\right)+g\boldsymbol{k}\frac{(\overline{\theta}+\theta')}{\theta_0}+\overline{\boldsymbol{F}}+\boldsymbol{F}' \qquad \text{(ap5.14.1)}$$

$$\frac{\partial\overline{\boldsymbol{v}}}{\partial t}+\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{v}}+\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'}=-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\overline{p}+f\boldsymbol{k}\times\overline{\boldsymbol{v}}+g\boldsymbol{k}\frac{\overline{\theta}}{\theta_0}+\overline{\boldsymbol{F}} \qquad \text{(ap5.14.2)}$$

となる。これらはすべて (5.9) - (5.13) を導出する際に用いた方程式を再掲しただけである。(ap5.14.1) 式から (ap5.14.2) 式を引くと、

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t}+\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'-\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'}=-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}p'+f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}'+g\boldsymbol{k}\frac{\theta'}{\theta_0}+\boldsymbol{F}' \qquad \text{(ap5.14.3)}$$

が得られる。この式の両辺に $\boldsymbol{v}'$ で内積をとると、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'}{2}\right)+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{v}}\right\}+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\right\}-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'}\right\}\\ =&-\frac{\boldsymbol{v}'}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}p'+f\boldsymbol{v}'\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}')+g\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{k}\frac{\theta'}{\theta_0}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{F}'\end{aligned}$$

となる。右辺第 2 項はベクトル公式よりゼロ、$\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{k}=w'$ であることを用いると、上式は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'}{2}\right)+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{v}}\right\}+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\right\}-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'}\right\}\\ =&-\frac{\boldsymbol{v}'}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}p'+gw'\frac{\theta'}{\theta_0}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{F}'\end{aligned}$$

となる。さらに、左辺第 2 項は (ap5.14.0.1) 式を用いて、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'}{2}\right)-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}')+\boldsymbol{v}'\times(\boldsymbol{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{v}})-\boldsymbol{\nabla}\left(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}'\right)\right\}+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\right\}\\ &-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'}\right\}=-\frac{\boldsymbol{v}'}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}p'+gw'\frac{\theta'}{\theta_0}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{F}'\end{aligned}$$

となるので、左辺第 2 項を展開すると、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'}{2}\right)-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}')\right\}-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\times(\boldsymbol{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{v}})\right\}+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}'\right)\right\}\\ &+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\right\}-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'}\right\}=-\frac{\boldsymbol{v}'}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}p'+gw'\frac{\theta'}{\theta_0}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{F}'\end{aligned}$$

が得られる。左辺第 3 項は (ap5.14.0.3) からゼロ、左辺第 2 項は (ap5.14.0.2), (ap5.14.0.4) 式から変形でき、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'}{2}\right)+\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'}{2}\right)-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\right\}+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}'\right)\right\}\\ &+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\right\}-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'}\right\}=-\frac{\boldsymbol{v}'}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}p'+gw'\frac{\theta'}{\theta_0}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{F}'\end{aligned}\tag{ap5.14.4}$$

となる。ここで、左辺第 3 項は

$$\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}'\right)\right\}=\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\right\}+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{v}}\right\}$$

と変形できるので、(ap5.14.4) 式左辺第 2 項の括弧内第 2 項と上式右辺第 1 項が相殺するので、(ap5.14.4) 式は

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right\}\left(\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'}{2}\right)+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{v}}\right\}\\ &+\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\right\}-\boldsymbol{v}'\cdot\left\{\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'}\right\}=-\frac{\boldsymbol{v}'}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}p'+gw'\frac{\theta'}{\theta_0}+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{F}'\end{aligned}\tag{ap5.14.5}$$

この両辺の平均をとると、左辺最終項は単独でゼロとなるので、

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right\}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'}}{2}\right)+\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{v}}\}}+\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}'\}}=-\overline{\frac{\boldsymbol{v}'}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}p'}+\overline{w'\theta'}\frac{g}{\theta_0}+\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{F}'}$$

となるので、本書の記号に従うと、

$$\frac{\overline{D}TKE}{Dt} = MP + TR + BPL - \varepsilon$$

となる。ここで、

$$\frac{\overline{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla},$$

$$TKE \equiv \frac{\overline{\boldsymbol{v}'^2}}{2}, \quad TR \equiv -\overline{\frac{\boldsymbol{v}'}{\rho_0} \cdot \boldsymbol{\nabla} p'} - \overline{\boldsymbol{v}' \cdot \{\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}'\}}, \quad BPL \equiv \overline{w'\theta'}\frac{g}{\theta_0},$$

$$MP \equiv -\overline{\boldsymbol{v}' \cdot \{\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \overline{\boldsymbol{v}}\}}, \quad \varepsilon \equiv -\overline{\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{F}'}$$

である。ただし、本文中では、地表の起伏が複雑ではない場所を仮定しているので、平均場の水平方向の勾配が鉛直勾配に比して無視できるとされているので、MP はさらに簡単化して、

$$MP = -\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} - \overline{w'w'}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \tag{ap5.14.6}$$

となる。さらに、平均場の連続の式を用いると、先の起伏の仮定により平均場の変数の水平方向への勾配はゼロとなるので、

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

が成り立つ。よって、(ap5.14.6) 式は

$$MP = -\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \tag{ap5.14.7}$$

となることがわかり、これは本文での記述に一致する。以上で求める方程式がすべて導かれた。